

CONSTRUCTION AND THE ROLE OF SCHEMATISM IN KANT'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

A.T. WINTERBOURNE*

I

THE IDEA that kantianism in the philosophy of mathematics has ceased to be tenable because of the very existence of non-Euclidean geometries is still, I think, widely held, even though the defendénts of this view have recently lost some ground. It is no doubt true that the development of hyperbolic and elliptic geometries compels some reassessment of Kant's claims about the science of real space, though even here, the rigidity of kantianism can be exaggerated. It is now much more generally understood that Kant's position not only explicitly allows alternative logical possibilities, but implicitly demands their existence (1). The distinction that Kant draws is between merely logical possibility and "constructibility", where the latter term is understood in relation to pure intuition. Kant is usually interpreted as meaning that constructions in the *a priori* intuition of space are indispensable for geometrical science. Since both analytic and non-Euclidean geometries dispense with spatial figures (although in the latter case they may be employed as 'analogies') Kant's theory seems far too restrictive to do further service.

The emphasis that Kant apparently places on actual spatial figures must seem somewhat naïve, especially since the Cartesian programme of analytic geometry can hardly have escaped Kant's attention. How does the existence of algebraic geometry affect the orthodox – and obsolete – view that Kant is supposed to hold, viz. that spatial figures are indispensable? Of course, from a purely historical point of view there is no explanation required. Descartes' fundamental idea was to employ geometric intuition to elucidate algebraic relationships. But how did Kant understand the epistemological relationship

* City of Birmingham Polytechnic, Margaret Street, Birmingham, B3 3BX. Stud. Hist. Phil. Sci., Vol. 12, No. 1, pp. 33-46, 1981. Printed in Great Britain.

between analytic and ‘synthetic’ geometry? He may have resisted the idea that the qualitative essence of figures could be reduced to numerical, and hence algebraic representations. He might have argued that analytic geometry can be seen as an analytical representation of the quantitative determinations of figures but does not capture the essence of such figures qua spatial entities. This would accord with that general view of Kant’s theory as insisting that Euclidean geometry is a description of our spatial intuition.

An alternative way of taking the relationship between Kant’s theory on the one side, and analytic geometry on the other, is provided by the *Transcendental Doctrine of Method*, where he makes some of his most interesting comments on the idea of construction. Kant here distinguishes mathematical and philosophical reasoning by saying that where as the latter proceeds by reasoning from concepts, the former proceeds ‘synthetically’, and finds its classic formulation in the axiomatic method of Euclid: the subject is founded on geometrical notions independent of algebra, and theorems are deduced from axioms by logical reasoning. That is, philosophy is reasoning from concepts; mathematics is reasoning from the *construction* of concepts. Algebraic geometry, on the other hand, proceeds analytically. Since Kant was convinced that his discovery of the distinction of methodology in mathematics and philosophy was of major importance, the Euclidean synthetic method must have seemed the perfect exemplification of that fact. Kant thus emphasizes the synthetic geometrical method, neglecting the analytical method for his purpose, that is, for the purpose of founding metaphysics as a science which would lead to the same certain results as geometry.

A third possibility is that Kant regarded algebra as more fundamental than either arithmetic or geometry; Cartesian geometry simply realises this idea in a way that Kant’s theory can accommodate. Does Kant have any theory of algebra that might support such a reading? There is no easy answer, given that an emphasis on spatial figures pervades much of Kant’s discussion in this field. Of course, since the context of much of this discussion – the *Transcendental Aesthetic* – is explicitly concerned with space, it may be argued that it would have been inappropriate for Kant to consider the reduction of spatial relationships to algebraic relationships. Spatial figures, in Kant’s theory, still apply to the space of perception, and it is this descriptive quality of geometry with which Kant is concerned in the *Aesthetic*. This would suggest a much less rigid interpretation of Kantianism in the philosophy of mathematics than has sometimes been given.

It is now well understood that Kant’s theory asserts the logical possibility of alternative geometries. The idea of construction is, for Kant, a constraint upon what might be called ‘real’ geometries, i.e. on interpreted systems that purport to apply to the space of experience. In this paper I shall emphasize one way of understanding the idea of construction in the critical writings, and link this with the doctrine of schematism. I shall then suggest that such a link provides a basis for a theory of algebra which Kant could have accepted (2).

II

That Kant's theory allows for non-Euclidean geometries is an interpretation which rests on two considerations, one direct, the other indirect. The indirect consideration is that since Kant insists on the synthetic character of the propositions of geometry, the replacement of the axiom of parallels by its contrary would generate no inconsistencies in the system as a whole. Since this is indeed the case, Kant must be correct in asserting the non-analyticity of the axioms and postulates of Euclidean geometry. I have stated this argument baldly since I wish to concentrate on the direct argument that Kant employs, and I shall leave the indirect argument without further comment. Nothing I say in the sequel depends crucially on this first consideration being accepted as it stands (3). The second consideration rests principally on the following passage of the *Critique*:

...whence shall we derive the character of the possibility of an object which is thought through a synthetic *a priori* concept, if not from the synthesis which constitutes the form of the empirical knowledge of objects? It is indeed a necessary logical condition that a concept of the possible must not contain any contradiction; but this is not by any means sufficient to determine the objective reality of the concept, that is, the possibility of such an object as is thought through the concept. Thus there is no contradiction in the concept of a figure which is enclosed within two straight lines, since the concepts of two straight lines and of their coming together contain no negation of a figure. The impossibility arises not from the concept in itself, but in connection with its construction in space, that is, from the conditions of space and its determination. (4)

Here Kant identifies mathematical 'existence' with the possibility of construction. A mathematical object – here a geometrical figure – 'exists' insofar as it can be constructed in pure intuition. Generally, Kant is taken to mean that space is given to us as being definitely and irrevocably Euclidean: what this really amounts to is the assertion that perceptual space – the space of any and every possible experience – could not be 're-constructed' such that non-Euclidean geometry provided the formal basis for intuitive, i.e. particular, constructions in space from which synthetic judgements, valid *a priori*, could follow.

What is involved in this idea of construction? The synthetic propositions of geometry are 'objectified' and thereby verified by constructing the 'object' of the concept in pure intuition, that is, by 'exhibiting' *a priori* the intuition which corresponds to the concept. The test of a 'real' geometry is this appeal to the possibility of constructing its figures – its objects – in pure intuition; more generally, the test is the *possibility* of intuitive construction. This means exhibiting *particulars* which manifest features that are true of a whole class of entities. Pure constructions in space (and time) are *symbolic instantiations*. Hintikka has argued that a proper understanding of Kant's philosophy of mathematics depends upon recognising that there are two distinct but related notions of 'intuition' in Kant. The mature theory links it with sensibility directly, and this meaning tends to be confused with the more restricted, and original meaning of the term, found in the pre-critical writings and the *Discipline of*

Pure Reason. Here, 'intuitive' means that which represents an individual, and is contrasted with general concepts (5). It is not the spatial character of 'intuitive' constructions that is of crucial importance, but the fact that they can be employed as exemplars for a general class. The constructed figure, a triangle for instance, is the spatial representation of the 'abstract' relations which constitute 'triangularity'. The figure is useful to us precisely because it embodies those relations which are less easily grasped independently of it.

The *a priori* exhibition of a concept by means of an intuitive construction may consist in a simple empirical procedure such as making marks on paper or moving the beads of an abacus. A natural interpretation of Kant's meaning of construction—or 'exhibiting in intuition'—is by means of the logical procedure of existential instantiation. The construction is a 'particular' which is effectively the concept made flesh: thus construction is a general way of allowing the deduction of $F(a)$ from the existentially quantified sentence $(\exists x)(Fx)$. The test of the meaningfulness of a concept—its 'real' rather than 'merely logical' possibility—is the construction of a figure. This is produced *a priori*—in a way that is somewhat analogous to syllogistic reasoning, which is determination of particular conclusions under general rules by means of the faculty of judgement—yet is at the same time 'an appearance present to the senses'(6). This idea—that Kant's philosophy of mathematics can be 'reconstructed' by appeal to quantification theory—is one of the main points of Hintikka's interpretation. The use of the natural deduction rule of existential instantiation introduces new representatives of individuals—and this, on Hintikka's view, is what Kant's use of *intuitive* construction involves, and pre-dates the *Aesthetic's* use of 'intuition' where it relates to spatial intuition directly. According to Hintikka, the idea that the mathematical method is based on the use of general concepts *in concreto*—that is, in the form of individual instances—provides the starting-point for Kant's mature theory of mathematical reasoning (7). Kant's view may be identified in a very general way with his claim against rationalist metaphysics that 'existence' is not a predicate:

...all existential propositions are synthetic... Anything we please can be made to serve as a logical predicate; the subject can even be predicated of itself; for logic abstracts from all content. But a *determining* predicate is a predicate which is added to the concept of the subject and enlarges it. (8)

We shall see later that for Kant the function of schemata is to 'particularise' certain concepts, that is, to present in intuition individuals which represent a general class.

It should not be assumed that Kant thinks of this figurative construction as complete in itself; this would reduce the process of construction to an empirical procedure, valid for the presented spatial figure, but limited to it. This would of course fail to yield the characteristics bound up, for Kant, with the recognition of mathematical truth, *viz* necessity and universality. For instance, in order to obtain synthetic propositions about triangles it is not sufficient merely to consider the *concept* 'triangle:' such a procedure yields only analytic propositions. However, if we exhibit the triangle in intuition, i.e. if we draw a triangle, or think of one in imagination, then such a construction putatively generates the body of synthetic propositions, valid *a priori*, with which Euclidean geometry has made us

familiar (9). Clearly, this shows again that there must be something more in the notion of construction than merely the production of lines on paper or images in imagination. And Kant does indeed supply the required feature. So that the constructed figure may be ‘adequate to the concept’ Kant goes on to explain the procedure in terms of *transcendental* imagination, i.e. in terms of *a priori* conditions. There must be an element in the procedure that is ‘presuppositional’: in this way, the empirical construction is given an *a priori* ‘kick.’ We now ask again: how can we be certain that what can be ‘read off’ the individual figure is valid for all possible figures of this kind? Kant’s answer is that in employing the imagination to construct a triangle in pure intuition we uncover – by ‘regressive analysis’ – the *a priori* conditions by which imagination is itself bound in producing particular figures of this kind.

The single figure which we draw is empirical, and yet it serves to *express* the concept, without impairing its universality. For in this empirical intuition *we consider only the act* whereby we construct the concept, and abstract from the many determinations... which are quite indifferent, as not altering the concept ‘triangle.’ (10)

This consideration of an *act*, presupposed in the empirical construction, supplies the necessary presuppositional element. (I shall return to this below.) Mathematics, Kant insists, does not extend knowledge by analysis of concepts alone: verification in mathematics requires that it ‘hasten to intuition’. In pure intuition the concept is instantiated and considered *in concreto*, yet non-empirically, since the construction is in pure, not empirical intuition. The concept is ‘particularised,’ i.e. constructed, and whatever follows from the universal *conditions* of the construction, is universally valid of the object of the concept thus constructed. In order to produce a particular construction which is adequate to the concept, we require some form of mediation between understanding – the faculty of rules which at the same time provides *a priori* concepts – and sensibility, in whose domain the constructions must be presented if they are to acquire existential significance, i.e. sense (11). In this way, we effect an isomorphism between the *a priori* truths which belong to the concept ‘triangle’ and the identifiable *a priori* conditions exemplified in the construction. In Kant’s hierarchy of faculties, it is *judgement* that has the task of subsuming under rules, and is in general the procedure of moving from a major and a minor premiss of a syllogism to a particular conclusion. In this way Kant introduces – as part of the *Transcendental Doctrine of Judgement* – the idea of schemata of pure concepts of understanding:

If understanding in general is to be viewed as the faculty of rules, judgement will be the faculty of subsuming under rules. (12)

It is the notoriously difficult *Schematism* chapter which expands the implications of mathematical construction and contributes to a less constricted understanding of Kant’s philosophy of mathematics.

We have seen that the figure produced in intuition from which synthetic propositions, valid *a priori*, may be ‘read off,’ must in some matter be representative of *all* figures of that kind (13). Any characteristic possessed uniquely by the ‘empirical’ figure can be abstracted

and ignored in the reasoning process. How can a single figure perform such a task adequately? As Kant admits, no *image* could be adequate to the general concept 'triangle'(14). The answer lies in the notion of the transcendental schematism.

III

At this point it will be helpful to rehearse some of the key ideas relating to 'synthesis' in the critical philosophy, as preparation for the use made of this concept in the chapter on the schematism itself. The idea of construction is much wider and of more general significance in Kant than focussing on his philosophy of mathematics may suggest. It is initially located inside such a framework, but is generalised as the process of 'synthesis of the empirical manifold'(15). This synthesis, as I suggested above, provides the presuppositional or transcendental element by means of 'imagination.' The connection between concepts and intuitions is effected by means of a synthesis of which the schematism is the focal example.

Synthesis in general... is the mere result of the power of imagination, a blind but indispensable function of the soul, without which we should have no knowledge whatsoever, but of which we are scarcely ever conscious. To bring this synthesis *to concepts* is a function which belongs to the understanding, and it is through this function of the understanding that we first obtain knowledge properly so-called.(16)

This is the mirror-image of the specific case of mathematical construction. In mathematical construction we procure, by means of an 'imaginative synthesis,' an image for a concept:

The image is a product of the empirical faculty of reproductive imagination: the schema of sensible concepts, such as figures in space, is a product and, as it were, a monogram, of pure *a priori* imagination, through which, and in accordance with which, images themselves first become possible.(17)

To subsume particulars under concepts is the task of the faculty of judgement in general, and the schematism in particular. The productive synthesis of imagination is a transcendental act:

We cannot think of a line without drawing it in thought, or a circle without describing it... Even time itself we cannot represent save insofar as we attend, in the drawing of a straight line (which has to serve as the outer figurative representation of time) merely to the *act* of the synthesis of the manifold whereby we successively determine inner sense, and in so doing attend to the succession of this determination in inner sense.(18)

Connection – synthesis of the manifold – is not a merely passive process undertaken by sensibility and intuition, but is an active procedure of the faculty of imagination. Time, as *formal* intuition, demands synthesis of imagination qua transcendental act: as *form of* intuition, time is the undifferentiated phenomenon of lapse, and yields only the possibility

of determinate succession (19). The successive synthesis of the manifold – an act performed by means of the productive imagination – locates this whole problem for Kant within transcendental philosophy (20). Geometry itself – ‘the mathematics of space [Ausdehnung]’ – is grounded in the productive imagination in the generation of figures. It is on this basis that axioms are understood as *conditions of a priori* intuition in figurative construction.

In the transcendental deduction Kant had argued that the pure concepts of understanding apply to objects of intuition *in general*. However, such concepts are for this reason incapable of giving *determinate* knowledge of objects:

The pure concepts of understanding relate... to objects of intuition *in general*... through which no *determinate* object is known. (21)

It is schemata that ‘particularise’ concepts in the required sense. Only the schematism, *quâ* transcendental act, can provide determinate knowledge of objects.

IV

The schema is a product of imagination. It is a universal procedure – an act – which provides an image for a concept.

It is a rule of synthesis of the imagination, in respect to pure figures in space. (22)

The schema of a ‘sensibilised’ concept – in this case a spatial figure – is a product of pure *a priori* imagination, through which, and in accordance with which, images – something empirical – first become possible. It is not, ‘transcendentally’ speaking, the constructed triangle as such which is the ground of *a priori* valid synthetic propositions, but rather the fact that it has been produced in accordance with the schema for ‘triangle,’ either as a figure on paper or imaginatively. Images are connected with the concept by means of the schema which they designate (23). This schema for ‘triangle’ is a rule of procedure for construction in intuition. Without such an *a priori* rule of construction we could not be certain that we had in fact produced a triangle. The drawing is a particular which ‘presents’ an instance of the class ‘triangle,’ and thus *represents* this class. This enables us to recognise the figure *quâ* instance of a geometrical class rather than, say, an undifferentiated spatial area, or any of the various other possibilities which are implicit in the empirical construction (24). As Kant points out, in mathematics we consider the universal in the particular,

...or even in the single instance, though still always *a priori* and by means of reason. Accordingly, *just as this single object is determined by certain universal conditions of construction*, so the object of the concept, to which the single object corresponds merely as its schema, must likewise be thought as universally determined. (25)

We may object to this idea on the ground that it is, in an important sense, superfluous. Kant needs an ‘image’ – a spatial figure produced in intuition – in order that *a priori* valid synthetic propositions may be ‘read off’. Yet might it not be said that the empirical

construction serves as an heuristic aid rather than a necessary component of the reasoning process? The schema, as a *rule of procedure* for constructing any image for a concept, must ‘contain,’ abstractly, or ‘pre-constructively,’ all of the ‘information’ that can in principle be included in, and thus ‘read off’ from, the intuitive construction quâ particular instantiation. If this were not the case, the constructed figure could not be ‘adequate to the concept’ – that is, there would be either more or less ‘information’ in the empirical figure than is in the concept. This ‘rule’ of construction should contain, in principle, all that the geometer requires in order to ‘reason’ about triangles. The body of such rules would be a geometry without figures. More precisely, it would provide a ‘geometry’ which dispenses with *spatial* constructions.

The idea of such an ‘act’ of imagination can only be understood in the context of the notion of synthesis to which I alluded above. Nonetheless, even for Kant it seems miraculous how such functions of the imagination can be the foundation for a system of relations which, when spatially interpreted, generates an *a priori* science which has application to experience, whilst yet nothing much can be said of it except that it exists. In talking of the schematism, Kant is at one point reduced to admitting that it is

...an art concealed in the depths of the human soul, whose real modes of activity nature is hardly likely ever to allow us to discover, and to have open to our gaze. (26)

Nevertheless, the conception of the schematism implies that geometrical science could dispense with spatial constructions. However, it could not dispense with ‘temporal’ constructions, since time – as the form of inner sense – is the necessary condition of all experience, outer – that is, spatial – and inner – that is, minimally temporal and maximally spatio-temporal. It is synthesis of the manifold of pure *a priori* intuition which gives knowledge of objects. This synthesis, or ‘taking up and connecting,’ is the result of the transcendental procedures of imagination, and as a function effecting the subsumption of intuitions under general concepts is the task of transcendental schematism:

...if this manifold is to be known, the spontaneity of our thought requires it to be gone through in a certain way, taken up and connected. *This act I name synthesis.* (27)

This is best understood in relation to Kant’s ‘definition’ of number. To think a number ‘in general’ is the representation of a method

...whereby a multiplicity... may be represented in an image in conformity with a certain concept. (28)

Number is, in Kant’s cryptic formulation,

...simply the unity of the synthesis of the manifold of a homogeneous intuition in general. (29)

The ‘movement’ of consciousness produces undifferentiated succession in the manifold if inner sense: ‘synthesizing’ the manifold is ‘taking up’ and ‘connecting.’ Number *in general* is the presented product of such synthesis (30). Crudely, a number is simply a conventional

way of marking a determinate position in the manifold of inner sense: numbers are a 'sensuous epistemological tool' (31). It should be recalled that schemata are not themselves spatial images: they are *a priori* determinations of *time* in accordance with rules, which make images possible (32). This locates Kant's 'pure science of time' within transcendental philosophy. Time is more general – less dispensable – than space: the 'science of time' must therefore be more fundamental than geometry quâ science of space. The pure science of time is not arithmetic, since this has actual numbers as its objects and is insufficiently general. The science of 'number in general' which, through its connection with the fundamental transcendental synthesis of the manifold of inner sense concerns 'taking up' and 'connecting' in an arbitrary way, and is therefore the condition for the possibility of both arithmetic and geometry, is algebra.

Mathematics does not only construct magnitudes (*quanta*) as in geometry; it also constructs magnitudes as such (*quantitas*), as in algebra. In this it abstracts completely from the properties of the object that is to be thought in terms of such a concept of magnitude. ...Once it has adopted a notation for the general concept of magnitudes so far as their different relations are concerned, it exhibits in intuition, in accordance with certain universal rules, all the various operations through which the magnitudes are produced and modified. Thus in algebra, by means of a *symbolic construction*, just as in geometry by means of an ostensive construction, we succeed in arriving at results which discursive knowledge could never have reached by means of mere concepts.(33)

In his theory of geometry Kant appears to insist on the indispensability of figures in space. Yet the teaching of the schematism, centering as it does on the fundamentally temporal nature of rules of synthesis for generating figures in space, links algebra to the intrinsically temporal character of construction by means of the symbol. Kant's theory indirectly suggests that spatial constructions are dispensable, provided that we are in possession of an adequate system of symbols by means of which any intuitive, that is, particular relations, can be expressed. The algebraic method is not 'geometrical,' but it is constructive in the required sense, that is, it employs variables the only acceptable value of which are *individuals* (34). The concepts expressed through and instantiated in the symbols – especially those concerning relations of magnitude – are presented in intuition: they are symbolically instantiated. The *sine quâ non* of geometrical science for Kant is not the existence of spatial figures, but the construction in pure intuition, *i.e.* the possibility of considering the universal in the particular construction (35). This may be either a spatially extended figure, or an algebraic representation of the *relations* expressed in such a figure. In Kant's letter to Schulz he says that 'universal arithmetic,' *i.e.* algebra, is an ampliative science and that the remaining parts of pure mathematics (*mathesis*), progress largely because of algebra, considered as the universal theory of quantities. As Hintikka has pointed out, Kant's theory of mathematical reasoning, and especially the interpretation of intuition which emphasises its non-spatial character, can be identified in the so-called pre-critical writings. As early as 1763, Kant had distinguished mathematical from

metaphysical reasoning by means of the former's use of *signs*, known 'individually and sensibly,' which give concrete knowledge of general concepts. (36)

V

This interpretation of construction and schematism seems to me to be consistent with the explicit remarks on algebra to be found in the *Critique of Pure Reason*. However, a serious problem of exegesis would appear to be raised by some typically convoluted remarks made in the *Critique of Judgement*, which bear on this issue, and suggest a fundamental inconsistency in Kant's use of terms. In section 59 of the *Critique of Judgement* Kant draws some distinctions between *schemata* and *symbols* which cannot easily be reconciled with his more detailed comments on the use of mathematical notation made elsewhere. Kant there says that all concepts demand 'verification' by means of intuitions. This is part of what is meant by Kant's assertion that thoughts without content are empty, and intuitions without concepts are blind. Neither concepts without a corresponding intuition, nor intuition without concepts can yield knowledge (37). Empirical concepts are verified by 'examples,' pure concepts by *schemata*. This process of verification, or 'rendering in terms of sense' can take place in either of two modes:

Either it is schematic, as where the intuition corresponding to a concept comprehended by the understanding is given *a priori*, or else it is symbolic, as where the concept is one which only reason can think, and to which no sensible intuition can be adequate. In the latter case the concept is supplied with an intuition such that the procedure of judgement in dealing with it is merely analogous to that which it observes in schematism. In other words, what agrees with the concept is merely the rule of this procedure, not the intuition itself. (38)

So far there is no difficulty: where the concept is an idea of reason such that there is, in principle, no intuition that could be adequate to it, the expression of the concept is made by means of a symbol. (An 'Idea of Reason' is a concept that is neither abstracted from, nor applicable to sense-experience: it 'transcends the possibility of experience' (39).) The relationship between a symbol and its concept is merely analogous to the manner in which a schema relates to its concept. The schematic and the symbolic are both, for Kant, intuitive modes of representation: the difference is that the former directly 'present' the concept through demonstration, while the latter are merely indirect 'presentations' of the concept by means of analogy. This interpretation of symbolism is what one would expect, given the critical philosophy's insistence on the *transcendent* character of certain concepts of reason. It is clear that such concepts could only be given intuitive—and hence *immanent*—meaning through analogies of some kind. However, Kant thereupon identifies both schematism and symbolism as 'hypotyposes,' i.e. presentations (*Darstellungen, exhibitiones*) and *not mere marks*, (*Charakterismen*). Marks are

...merely designations of concepts by the aid of accompanying sensible *signs devoid of any intrinsic connection with the intuition of the object*. Their sole function is to afford a means of reinvoking the concepts according to the imagination's law of association—a

purely subjective role. *Such marks are either words or visible (algebraic or even mimetic) signs, simply as expressions for concepts.* (40)

This presents a serious problem: here Kant is identifying algebraic symbols as merely conventional marks, whose purpose is to reinvoke concepts by means of simple association. before, I suggested that algebraic expressions directly presented in intuition relations of magnitude as such, so that they could be connected to the rules of synthesis described as schematism. But here, Kant appears to place algebraic notation inside his wider concept of symbolism, rather than inside a wider concept of schematism. The relationship between an algebraic symbol and a number concept should be direct, and is quite different from the relationship that a *model* or *analogy* has to that concept of reason for which it is a model or analogy. The connection between a symbol quâ analogy and its concept is looser than the connection between schemata and their concepts. One thing may be used as a symbol for another by virtue of the similarity in the 'structure of reflection' in the two cases:

In this way a monarchical state is represented as a living body when it is governed by constitutional laws, but as a mere machine (like a hand-mill) when it is governed by an individual absolute will; but in both cases the representation is merely *symbolic*. For there is certainly no likeness a despotic state and a handmill, whereas there surely is between the rules of reflection upon both and their causality... In language we have many such indirect presentations modelled up on an analogy enabling the expression in question to contain, not the proper schema for the concept, but merely a symbol for reflection. (41)

Thus symbols quâ analogies may express concepts for which the direct employment of an 'intuition' is out of the question. In the *Critique of Judgement* the idea of representation by means of analogy is used as Kant's central designation of symbolism, and although this idea is itself clear enough, algebraic symbolism should not be found within its compass.

An explanation for this confusion may be the *Critique of Judgement's* concern with so-called *reflective* judgement, in contrast to a determinant judgement. If the 'universal' – in the shape of a rule, principle or law – is given, the judgement which subsumes the particular under it is determinant: if, on the other hand, only the particular is given, then reflective judgement concerns finding a universal for it. Determinant judgement – the subsumption of particulars under rules – operates

...even where such a judgement is transcendental and, as such, provides the conditions a priori in conformity with which alone subsumption under that universal can be effected. (42)

Thus unlike *transcendent* judgements – where ideas of reason can only be represented by means of *analogies* – *transcendental* judgements – where *a priori* conditions of knowledge are involved – can be made determinate by means of schemata. Now since rules of synthesis of *a priori* imagination are presupposed in all construction of mathematical objects, such objects must present their concepts, and make them *determinate*, in a way that is quite different from reflective judgement by means of 'symbols,' which, as Kant

says, is representation by ‘mere analogy.’ Kant’s general theory of mathematical construction mitigates against any consideration of algebraic notation as mere marks, even though such a notation is ‘conventional.’ These symbols are important as practical devices, even though the *a priori* locus of mathematical construction is the procedure of imaginative synthesis (43).

NOTES

- 1 – For instance, see Gordon Brittan, *Kant’s Theory of Science* (Princeton University Press, 1978), Chap. 3, p. 68.
- 2 – Cf. C. D. Broad, *Kant: An Introduction* (Cambridge: Cambridge University Press, 1978), p. 69.
- 3 – Cf. G. Brittan, *op. cit.*, pp. 43 ff and 68.
- 4 – Kant, *Critique of Pure Reason*, trans. by N. Kemp. Smith (Macmillan, 1973), B268.
- 5 – Hintikka’s various interpretations of Kant’s philosophy of mathematics emphasize the ‘synthetic’ character of the idea of ‘exhibiting in intuition,’ and relate this notion in Kant to Euclid’s *Elements*. In what follows, my debt to Hintikka will be obvious, and I believe that my understanding of the theory of algebra to be found in Kant dovetails with Hintikka’s general position. See J. Hintikka, ‘Kant on the Mathematical Method,’ *The Monist* 51 (1967), 352-375; ‘Kant’s “New Method of Thought” and Theory of Mathematics,’ *Ajatus* 27 (1965), 37-47; ‘Kant’s Notion of Intuition,’ *The First Critique*, T. Penelhum and J.H. MacIntosh (eds) (Belmont, 1969), pp. 38-53.
- 6 – A240/B299.
- 7 – J. Hintikka, ‘Kant on the mathematical method,’ *The Monist* 51 (1967), 359.
- 8 – A598/B626.
- 9 – A716/B744. If this is established, Kant believes he has justified his theory of space as a *priori* intuition. The transcendental exposition has the task of showing that only on the assumption of this characteristic view of space can the possibility of geometry as a body of synthetic propositions, valid *a priori*, be understood.
- 10 – A714/B742, my emphasis.

11 – A240/B299.

12 – A132 – 133/B171 – 172.

13 – A property unique to figures in Euclidean space. In non-Euclidean ‘spaces’ of variable curvature – Lobatschewskian, for instance – it may not be possible to construct similar triangles of different magnitudes. In homogeneous Euclidean space this is always possible.

14 – This problem clearly reminds us of Berkeley’s struggle against ‘abstract general ideas’. Cf. Gerd Buchdahl, *Metaphysics and the Philosophy of Science* (Blackwell, 1969) p. 285: ‘When a geometer appears to “reason round a triangle on a blackboard,” he is not drawing general conclusions from a particular triangle; but neither is he “really thinking” of some ‘abstract universal triangle’. Rather, he is reasoning about those properties of his triangle which are held in common with the class of triangles concerned in the demonstration, that is to say, with all those triangles which are given the properties mentioned in the definitions, postulates and axioms’.

15 – G. Buchdahl, op. cit., p. 556, especially note I.

16 – A78/B103, Kemp Smith’s emphasis: the language here reminds us of the schematism: cf. A141/B181.

17 – A141/B181.

18 – B154 – 155, my emphasis.

19 – G. Buchdahl, op. cit., p. 642.

20 – B155 and note; also A163/B204.

21 – B150.

22 – A141/B180.

23 – A142/B181; I have modified Kemp Smith’s translation here.

- 24—The active, interpretative process of ‘seeing an aspect’ requires imagination in a Kantian sense. Wittgenstein confirms Kant’s insight when he concludes that the concept of ‘seeing an aspect is akin to the concept of (forming) an image’. *Philosophical Investigations* (Oxford, 1953) p. 213. The general idea can also be found in E. Cassirer, *The Philosophy of Symbolic Forms*, Vol. 3 (Yale University Press, 1957) p. 200.
- 25—A714/B742, my emphasis.
- 26—A141/B181; cf. also B103.
- 27—A77/B102, my emphasis.
- 28—A140/B179.
- 29—A143/B182.
- 30—A103.
- 31—Kant, *Selected Pre-critical Writings*, trans. by G. Kerferd and D. Walford (Manchester University Press, 1968), p. 24: ‘Enquiry concerning the Clarity of the Principles of Natural Theology and Ethics’, 1763.
- 32—A145/B185.
- 33—A717/B745, my emphasis.
- 34—Hintikka, ‘Kant on the mathematical method’ etc., p. 359. Cf. also Kant, A159—160/B198—199.
- 35—Cf. note 14, and Brittan, *op. cit.*, pp. 53 ff.
- 36—Kant, ‘Enquiry etc.’, pp. 13 and 24; also *Philosophical Correspondence*, ed. and trans. by A. Zweig (University of Chicago Press, 1967), p. 129.
- 37—A51/B75.

38 – *Critique of Judgement*, trans. by James Creed Meredith (Oxford, 1957), Section 59, p. 221.

39 – A320/B377.

40 – *Critique of Judgement*, loc. cit., my emphasis.

41 – *Critique of Judgement*, p. 223.

42 – *Critique of Judgement*, p. 18.

43 – Cf. A. Heyting, Constructivity in Mathematics, *Proceedings of Colloquium* (Amsterdam, 1957; North Holland 1959), p. 70.

TRADUÇÃO/TRANSLATION

A CONSTRUÇÃO E O PAPEL DO ESQUEMATISMO NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE KANT*

A.T. WINTERBOURNE**

Tradução do inglês e introdução de
Lauro Frederico Barbosa da SILVEIRA***

NOTA INTRODUTÓRIA

A adequada compreensão do estatuto da matemática para Immanuel Kant tem sido procurada insistentemente por vários autores. Em torno dos trabalhos de Jaakko Hintikka vem se desenvolvendo uma ampla investigação sobre as implicações decorrentes do caráter sintético *a priori* conferido por Kant à matemática, perguntando se dele necessariamente decorrem o privilégio da geometria relativamente à álgebra e a não aceitabilidade de geometrias não euclidianas.

O texto de A.T. Winterbourne aqui traduzido coloca-se no interior deste questionamento e, por certo, contribui para desmontar a interpretação tradicional que, baseada principalmente nas considerações presentes na *Estética Transcendental da Crítica da Razão Pura*, aceita ambas as decorrências acima mencionadas e acaba por rejeitar como irremediavelmente obsoleta a concepção matemática de Kant.

Percorrendo de modo acessível e instigante o conjunto da obra kantiana assim como os textos dos comentadores dedicados à questão, o artigo colabora para a obtenção de um

* WINTERBOURNE, A.T. Construction and the role of schematism in Kant's Philosophy of Mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*. Cambridge, 12 (1): 33-46, 1981.

** City of Birmingham Polytechnic, Birgham, U.K.

*** Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências – UNESP – 17500 – Marília – SP.

tríplice resultado: reavaliar uma questão central do pensamento kantiano; introduzir o leitor numa importante corrente de investigação acerca daquele pensamento e trazer subsídios para se pensar a questão do caráter construtivo da matemática, dentro ou fora do conjunto da obra do autor da *Crítica*.

I

A idéia que o kantianismo na filosofia da matemática deixou de ser sustentável dada a existência de geometrias não euclidianas ainda é, penso eu, amplamente sustentada, embora os defensores deste ponto de vista tenham recentemente perdido algum terreno. Sem dúvida é verdade que o desenvolvimento das geometrias hiperbólica e elíptica impõe uma certa re colocação das propostas de Kant sobre a ciência do espaço real, embora, mesmo aí, a rigidez do kantianismo possa ser exagerada. Entende-se hoje em dia de modo mais generalizado que a posição de Kant não só explicitamente permite possibilidades lógicas alternativas, mas implicitamente exige sua existência (1). A distinção que Kant estabelece é entre a possibilidade meramente lógica e a "construtibilidade", onde o último termo é entendido enquanto relacionado à intuição pura. Kant é usualmente interpretado como querendo dizer que as construções na intuição pura do espaço são indispensáveis para a ciência geométrica. Uma vez que tanto a geometria analítica quanto a não euclidiana dispensam as figuras espaciais (embora no último caso, tais figuras possam ser empregadas como "analogias"), a teoria de Kant parece demasiadamente restritiva para ainda prestar um serviço.

A ênfase que aparentemente coloca Kant nas figuras espaciais atuais pode parecer de algum modo ingênua, especialmente já que o programa cartesiano da geometria analítica dificilmente escapou à atenção de Kant. Como a existência da geometria algébrica afeta a visão ortodoxa — e obsoleta — que se supõe ter Kant sustentado, a saber, que as figuras espaciais são indispensáveis? Naturalmente, de um ponto de vista puramente histórico nenhuma explicação é exigida. A idéia fundamental de Descartes consistia em empregar a intuição geométrica para elucidar relações algébricas. Mas como Kant entendeu as relações epistemológicas entre a geometria analítica e a "sintética"? Pode ter ele resistido à idéia de que a essência qualitativa das figuras, pudesse reduzir-se a relações numéricas e, por isso, algébricas. Deve ter argumentado que a geometria analítica pode ser vista como uma representação analítica das determinações quantitativas de figuras mas não capta a essência de tais figuras enquanto entidades espaciais. Isto estaria de acordo com a visão geral da teoria de Kant, quando insiste que a geometria euclidiana é uma descrição de nossa intuição espacial.

Uma via alternativa de se estabelecer a relação entre a teoria de Kant e a geometria analítica é oferecida pela *Doutrina Transcendental do Método*, em que o autor tece alguns de seus mais interessantes comentários sobre a idéia de construção. Aí Kant distingue o raciocínio matemático e o raciocínio filosófico dizendo que, enquanto o último procede raciocinando a partir de conceitos, o primeiro procede "sinteticamente", e encontra sua formulação clássica no método axiomático de Euclides: o tema funda-se em noções geométricas independentes da álgebra, e os teoremas são deduzidos a partir de axiomas

por raciocínio lógico. Ou seja, a filosofia é um raciocínio a partir de conceitos; a matemática é um raciocínio a partir da *construção* de conceitos. A geometria algébrica, por sua vez, procede analiticamente. Já que Kant estava convencido de que sua descoberta da distinção metodológica em matemática e filosofia era da maior importância, o método sintético euclidiano deve ter se apresentado como a exemplificação perfeita daquele fato. Desse modo, Kant enfatiza o método geométrico sintético, negligenciando o método analítico para seu propósito de fundar a metafísica como uma ciência que conduziria a resultados tão certos quanto os da geometria.

A terceira possibilidade é de que Kant via a álgebra como mais fundamental do que a aritmética na geometria; a geometria cartesiana simplesmente lança esta idéia de um modo tal que a teoria de Kant pode adaptá-la. Tem Kant alguma teoria da álgebra capaz de dar suporte a tal leitura? Não há resposta fácil, já que uma ênfase em figuras espaciais atravessa a maior parte da discussão de Kant neste campo. Naturalmente, uma vez que o contexto da maior parte desta discussão — a *Estética Transcendental* — explicitamente diz respeito ao espaço, pode-se argumentar que teria sido inapropriado Kant considerar aí a redução das relações espaciais às relações algébricas. As figuras espaciais, na teoria de Kant, aplicam-se ainda ao espaço da percepção, e é desta qualidade descritiva da geometria que Kant cuida na *Estética*. Isto sugeriria uma interpretação menos rígida de kantianismo em filosofia da matemática do que a que algumas vezes tem sido oferecida.

Entende-se bem, hoje em dia, que a teoria de Kant afirma a possibilidade de geometrias alternativas. A idéia de construção é, para Kant, um constrangimento imposto às geometrias, que podem ser chamadas "reais", isto é, a sistemas interpretados como destinados a serem aplicados ao espaço da experiência. Neste artigo darei ênfase a um modo de entender a idéia de construção nos escritos críticos e ligarei tal idéia à doutrina do esquematismo. Sugerirei então que tal ligação fornece uma base para uma teoria da álgebra que Kant poderia ter aceito (2).

II

Que a teoria de Kant permita geometrias não euclidianas é uma interpretação que se sustenta em duas considerações, uma direta, a outra indireta. A consideração indireta é que desde que Kant insiste no caráter sintético das proposições da geometria, a substituição do axioma das paralelas por seu contrário não geraria qualquer inconsistência no sistema como um todo. Já que este é o caso, Kant deve estar correto ao afirmar a não analiticidade dos axiomas e postulados da geometria euclidiana. Apresentei sumariamente este argumento, pois desejo concentrar-me no argumento direto empregado por Kant, e deixarei o argumento indireto sem mais comentários. Nada do que direi em seguida depende crucialmente desta primeira consideração ter sido aceita tal como se apresenta (3). A segunda consideração baseia-se principalmente na seguinte passagem da *Crítica*:

... "de onde derivaremos o caráter da possibilidade de um objeto pensado através de conceitos sintéticos *a priori*, a não ser a partir da síntese que constitui a forma do conhecimento empírico dos objetos? Trata-se com efeito de uma condição lógica

necessária que o conceito do possível não possa conter qualquer contradição, mas esta não é de modo algum suficiente para determinar a realidade objetiva do conceito, isto é, a possibilidade de um tal objeto, como é pensado através do conceito. Assim, não há contradição alguma no conceito de uma figura inscrita em duas linhas retas, já que os conceitos de duas linhas retas e de sua intersecção não contêm nenhuma negação de uma figura. A impossibilidade surge não do próprio conceito, mas em conexão com sua construção no espaço, isto é, das condições do espaço e de sua determinação" (4).

Kant identifica aqui a "existência" matemática com a possibilidade de construção. Um objeto matemático — no caso presente, uma figura geométrica — "existe" na medida em que pode ser construído na intuição pura. Geralmente, julga-se que Kant entende que o espaço nos seja dado como sendo definitiva e irrevogavelmente euclidiano: o que realmente conta é a asserção de que o espaço perceptivo — o espaço de toda e qualquer experiência — não poderia ser "reconstruído" se coubesse à geometria não euclidiana fornecer a base formal para as construções espaciais intuitivas, isto é, particulares, a partir das quais os juízos sintéticos, válidos *a priori*, poderiam se seguir.

O que se encontra envolvido nesta idéia de construção? As proposições sintéticas da geometria são "objetivadas" e assim verificadas pela construção do "objeto" do conceito na intuição pura, isto é, "exibindo" *a priori* a intuição correspondente ao conceito. O teste de uma geometria "real" é este apelo à possibilidade de se construírem suas figuras — seus objetos — na intuição pura; mais em geral, o teste é a *possibilidade* de construção intuitiva. Isto significa apresentar *particulares* que manifestam aspectos verdadeiros para uma classe completa de entidades. Construções puras no espaço (e no tempo) são *concreções simbólicas* (*symbolic instantiations*). Hintikka argumentou que um entendimento apropriado da filosofia da matemática de Kant depende do reconhecimento da existência de duas noções distintas, mas relacionadas, de "intuição" em Kant. A teoria madura liga diretamente a intuição à sensibilidade, e este significado tende a se confundir com aquele mais restrito e original, encontrado nos escritos pré-críticos e na *Disciplina da Razão Pura*. Neste caso, "intuitivo" significa aquilo que representa um indivíduo, e contrasta com os conceitos gerais (5). Não é o caráter espacial das construções "intuitivas" que é de crucial importância, mas o fato de que elas podem ser empregadas como exemplares de uma classe. A figura construída, um triângulo por exemplo, é a representação espacial das representações "abstratas" que constituem a "triangularidade". A figura nos é útil precisamente porque dá corpo àquelas relações que são menos facilmente captadas independentemente dela.

A apresentação *a priori* de um conceito por meio de uma construção intuitiva pode consistir num simples procedimento empírico, tal como fazer marcas no papel ou mover as contas de um ábaco. Uma interpretação natural do significado kantiano de construção — ou "apresentar na intuição" — faz-se por meio do procedimento lógico da concreção existencial. A construção é um "particular" que efetivamente é o conceito feito carne: assim, a construção é uma via geral de permitir a dedução de $F(a)$ a partir da sentença existencialmente quantificada ($\exists x$) (Fx). O teste do significado de ser ou não um conceito significativo — sua possibilidade "real" e não "somente lógica" — é a construção de uma

figura. Esta é produzida *a priori* – por uma via que é de algum modo análoga ao raciocínio silogístico, o qual é a determinação de conclusões particulares sob regras gerais por meio da faculdade de julgar –, sendo ao mesmo tempo "uma aparência presente aos sentidos" (6). Esta idéia – a saber, que a filosofia da matemática de Kant pode ser "reconstruída" fazendo apelo à teoria da quantificação – é um dos pontos principais da interpretação de Hintikka. O uso da regra da dedução natural da concreção existencial introduz novos representantes de indivíduos – e isto, do ponto de vista de Hintikka, é o que o uso kantiano da construção intuitiva envolve, e prenuncia (*pre-dates*) o uso da "intuição" na *Estética*, onde esta é relacionada diretamente à intuição espacial. De acordo com Hintikka, a idéia de que o método matemático baseia-se no uso de conceitos gerais *in concreto* – isto é, em forma de concreções individuais – fornece o ponto de partida para a madura teoria kantiana do raciocínio matemático (7). Pode-se de modo muito geral identificar o ponto de vista de Kant com sua argumentação contra a metafísica racionalista de que a "existência" não é um predicado:

..."todas as proposições existenciais são sintéticas... Tudo que quisermos pode servir como um predicado lógico, o sujeito pode mesmo ser predicado de si mesmo; pois a lógica abstrai de qualquer conteúdo. Mas um predicado determinante é um predicado que se adiciona ao conceito do sujeito e o amplia"...(8)

Veremos mais tarde que a função dos esquemas para Kant é "particularizar" certos conceitos, isto é, apresentar indivíduos na intuição os quais representam uma classe geral.

Não se poderia aceitar ter Kant pensado a construção figurativa como completa em si mesma; isto teria reduzido o processo de construção a um procedimento empírico, válido para a figura espacial apresentada, mas a ela limitado. Esta construção não produziria as características ligadas, para Kant, ao reconhecimento da verdade matemática, a saber: a necessidade e a universalidade. Com efeito, para se obter proposições sintéticas sobre triângulos, não é suficiente simplesmente considerar o *conceito* "triângulo": tal procedimento somente produz proposições analíticas. No entanto, se apresentamos o triângulo na intuição, isto é, se desenhamos um triângulo, ou o pensamos na imaginação, então tal construção presumidamente gera o corpo de proposições sintéticas, válidas *a priori*, com as quais a geometria euclidiana nos tornou familiar (9). É claro que isto mostra outra vez que deve haver alguma coisa mais na noção de construção do que meramente a produção de linhas no papel ou imagens na imaginação. E Kant efetivamente fornece o requerido aspecto. Já que a figura construída pode ser "adequada ao conceito" Kant avança, explicando o procedimento em termos de imaginação *transcendental*, isto é, em termos de condições *a priori*. Deve haver um elemento no procedimento que seja "pressuposto": deste modo, é dado um toque (*kick*) *a priori* à construção empírica. Perguntamos novamente: como podemos estar certos de que o que pode ser "lido" na figura individual é válido para todas as figuras possíveis desta espécie? A resposta de Kant é que, ao empregar a imaginação para construir um triângulo na intuição pura, nós descobrimos – por "análise regressiva" – as condições *a priori* pelas quais a própria imaginação está vinculada à produção de figuras particulares desta espécie.

"A figura singular que desenhamos é empírica, mas mesmo assim ela serve para *expressar* o conceito, sem prejudicar sua universalidade. Pois nesta intuição empírica *consideramos somente o ato* pelo qual construímos o conceito, e a abstraímos de várias determinações... as quais são totalmente indiferentes, pois não alteram o conceito 'triângulo'." (10)

Esta consideração de um *ato*, pressuposto na construção empírica, fornece o elemento pressuposto. (Voltarei a isto mais adiante.) A Matemática, insiste Kant, não estende o conhecimento tão-somente pela análise de conceitos: a verificação em matemática requer que ela "provoque a intuição" ("*hasten to intuition*"). Na intuição pura, o conceito é concretizado e considerado *in concreto*, embora não empiricamente, uma vez que a construção se faz na intuição pura e não na empírica. O conceito é particularizado, isto é, construído, e tudo o que decorre das condições universais da construção é universalmente válido do objeto do conceito assim construído. A fim de produzir uma construção particular que seja adequada ao conceito, requeremos alguma forma de mediação entre o entendimento — a faculdade das regras que ao mesmo tempo fornece conceitos *a priori* — e a sensibilidade, em cujo domínio as construções devem ser apresentadas caso devam adquirir significância existencial, isto é, *sentido* (11). Deste modo, nós produzimos um isomorfismo entre as verdades *a priori* que pertencem ao conceito de "triângulo" e as condições *a priori* identificáveis exemplificadas na construção. Na hierarquia kantiana das faculdades, é o *juízo* que tem a tarefa de subsumir sob leis, e este é em geral o procedimento de passar de uma premissa maior e de uma menor de um silogismo a uma conclusão particular. Deste modo Kant introduz — como parte da *Doutrina Transcendental do Juízo* — a idéia de esquemas dos conceitos puros do entendimento:

"Se o entendimento em geral deve ser visto como a faculdade das regras, o juízo será a faculdade de subsumir sob regras." (12)

O notoriamente difícil capítulo do *Esquematismo* é que estende as implicações da construção matemática e contribui para um entendimento menos restrito da filosofia kantiana da Matemática.

Vimos que a figura produzida na intuição, a partir da qual as proposições sintéticas, válidas *a priori*, podem ser "lidas", deve de algum modo ser representativa de *todas* as figuras daquela espécie (13). Qualquer característica possuída unicamente pela figura "empírica" pode ser abstraída e ignorada no processo de raciocínio. Como pode uma única figura realizar tal tarefa adequadamente? Como Kant admite, nenhuma imagem poderia adequar-se ao conceito geral de "triângulo" (14). A resposta está na noção do esquematismo transcendental.

III

Neste ponto é útil apresentar algumas idéias-chave relacionadas à "síntese" na filosofia crítica, como preparação para o uso que deste conceito se faz no próprio capítulo sobre o esquematismo. A idéia de construção é mais ampla e de significação mais geral em Kant do que pode sugerir seu enfoque na filosofia da Matemática. Inicialmente ela se localiza

dentro daquela moldura, mas se generaliza como um processo de síntese do diverso empírico (15). Esta síntese, como acima sugeri, fornece o elemento pressuposto e transcendental por meio da "imaginação". A conexão dos conceitos e das intuições efetua-se por meio de uma síntese da qual o esquematismo é o exemplo focal.

"A síntese em geral... é o mero resultado da força da imaginação, uma função cega mas indispensável da alma, sem a qual não teríamos qualquer conhecimento seja lá do que fosse, mas da qual quase não temos consciência. Trazer esta síntese *a conceitos* é uma função que pertence ao entendimento, e é através desta função que primeiramente obtemos o conhecimento propriamente dito."(16)

Esta é a imagem especular do caso específico da construção matemática. Na construção matemática nós produzimos, por meio de uma "síntese imaginativa", uma imagem para um conceito:

"A imagem é um produto da faculdade empírica da imaginação reprodutora: o esquema dos conceitos sensíveis, como as figuras no espaço, é um produto e como que um monograma da imaginação pura *a priori*, através do qual, e de acordo com o qual, as próprias imagens tornam-se primeiramente possíveis". (17)

Subsumir particulares sob conceitos é uma tarefa da faculdade de julgamento em geral, e do esquematismo em particular. A síntese produtiva da imaginação é um ato transcendental:

"Não podemos pensar uma linha sem traçá-la em pensamento, ou um círculo sem descrevê-lo... Mesmo ao próprio tempo só podemos representá-lo na medida em que, ao se traçar uma linha (que deve servir de representação figurativa exterior do tempo) prestarmos atenção meramente no *ato* da síntese do diverso, ato este no qual nós sucessivamente determinamos o sentido interior, e, ao assim agir, prestamos a atenção na sucessão desta determinação no sentido interior". (18)

A conexão – síntese do diverso – não é um processo meramente passivo levado a cabo pela sensibilidade e a intuição, mas é um procedimento ativo da faculdade de imaginação. O tempo, como intuição *formal*, exige a síntese da imaginação enquanto ato transcendental: como *forma da intuição*, o tempo é o fenômeno indiferenciado do intervalo, e dá origem somente à possibilidade da sucessão determinada (19). A síntese sucessiva do diverso – um ato realizado por meio da imaginação produtora – insere, para Kant, todo este problema na filosofia transcendental (20). A própria geometria – "a matemática do espaço (*Ausdehnung*)" – fundamenta-se na imaginação produtora na geração de figuras. Com base nisso é que os axiomas são entendidos como condições da intuição *a priori* na construção figurativa.

Na dedução transcendental, Kant argumentara que os conceitos puros do entendimento aplicam-se aos objetos da intuição *em geral*. No entanto, tais conceitos são incapazes, por esta mesma razão, de fornecer um conhecimento *determinado* dos objetos:

"Os conceitos puros do entendimento relacionam-se... aos objetos da intuição *em geral*... através dos quais nenhum objeto determinado é conhecido". (21)

São os esquemas que "particularizam" os conceitos no requerido sentido. Somente o esquematismo, enquanto ato transcendental, pode fornecer um conhecimento determinado dos objetos.

IV

O esquema é um produto da imaginação. Ele é um procedimento universal – um ato – que fornece uma imagem ao conceito.

"É uma regra de síntese da imaginação, com respeito às figuras puras no espaço". (22)

O esquema de um conceito "sensibilizado" – neste caso, uma figura espacial – é um produto da imaginação pura *a priori*, através do qual, e de acordo com o qual, as imagens – alguma coisa empírica – tornam-se primeiramente possíveis. "Transcendentalmente", não é o triângulo construído enquanto tal que é o fundamento das proposições sintéticas *a priori* válidas, mas o fato de ele ter sido produzido de acordo com o esquema para "triângulo", quer como uma figura no papel quer imaginativamente. As imagens conectam-se com o conceito por meio do esquema que designam (23). Este esquema para "triângulo" é uma regra de procedimento para a construção na intuição. Sem uma tal regra *a priori* de construção não poderíamos ter certeza de que tínhamos de fato construído um triângulo. O desenho é um particular que "apresenta" um exemplar da classe "triângulo", representando deste modo esta classe. Isto nos capacita a reconhecer a figura mais como exemplar de uma classe geométrica do que como uma área espacial indiferenciada, ou do que qualquer uma das várias possibilidades implícitas na construção empírica (24). Como Kant aponta, na matemática consideramos o universal no particular,

"... ou ainda na concreção singular, embora ainda sempre *a priori* e por meio da razão. Deste modo, *assim como este objeto singular é determinado por certas condições universais de construção*, o objeto do conceito, ao qual o objeto singular corresponde tão-somente como seu esquema, deve semelhantemente ser pensado como universalmente determinado". (25)

Pode-se objetar contra esta idéia baseando-se em que ela é, num importante sentido, supérflua. Kant necessita de uma "imagem" – uma figura espacial produzida na intuição – a fim de que se possam extrair (*read off*) proposições sintéticas *a priori* válidas. Não seria ainda o caso de dizer que a construção empírica serve mais como uma ajuda heurística do que como um componente necessário do processo de raciocínio? O esquema, como uma *regra de procedimento* para construir-se qualquer imagem para um conceito, deve "conter", abstrata ou "pré-construtivamente", toda a "informação" que em princípio pode estar incluída na construção intuitiva enquanto concreção particular, e assim ser dela extraída. Se este não fosse o caso, a figura construída não poderia ser "adequada ao conceito" – isto é, haveria ou mais ou menos "informação" na figura empírica do que no conceito. Esta "regra" de construção conteria, em princípio, tudo o que o geômetra requer a fim de

"raciocinar" sobre triângulos. O corpo de tais regras seria uma geometria sem figuras. Mais precisamente, ele forneceria uma "geometria" que dispensa construções *espaciais*.

Só se pode entender a idéia de um tal "ato" da imaginação no contexto da noção de síntese à qual antes já aludi. Todavia, para Kant, parece milagroso como tais funções da imaginação possam constituir o fundamento de um sistema de relações que, quando interpretado espacialmente, gera uma ciência *a priori* com aplicação na experiência, embora ainda que dele nada mais se possa dizer, senão que existe. Ao falar do esquematismo, Kant é levado a admitir que ele é:

"...uma arte escondida nas profundezas da alma humana, cujos modos reais de atividade a natureza parece dificilmente nos deixar descobrir e observar". (26)

A concepção do esquematismo implica, porém, que a ciência geométrica possa dispensar construções espaciais. Mas não pode dispensar as construções "temporais" uma vez que o tempo—como forma do sentido interior—é a condição necessária, tanto exterior—isto é, espacial—quanto interior—isto é, no mínimo temporal e no máximo espaço-temporal. É a síntese do diverso da intuição *a priori* pura que fornece o conhecimento dos objetos. Esta síntese, como "retenção e conexão", é o resultado dos procedimentos transcendentais da imaginação, e como uma função efetuando a subsunção da intuição sob conceitos gerais é a tarefa do esquematismo transcendental:

"...se o diverso deve ser conhecido, a espontaneidade do nosso pensamento requer que ele seja perpassado de uma certa maneira, retido e conectado. *A este ato denomino síntese*" (27).

Compreende-se isto melhor com relação à "definição" kantiana de número. Pensar o número "em geral" é a representação de um método "...pelo qual a multiplicidade... pode ser representada numa imagem em conformidade com um certo conceito" (28).

O número, na formulação crítica de Kant, é:

"...simplesmente a unidade da síntese do diverso de uma intuição homogênea em geral". (29)

O "movimento" da consciência produz uma sucessão indiferenciada no diverso do sentido interior: "sintetizar" o diverso é "reter" e "conectar". O número *em geral* é o produto apresentado de tal síntese (30). Cruamente falando, o número é simplesmente um meio convencional de marcar uma determinada posição no diverso do sentido interior: os números são uma "ferramenta epistemológica sensual" (31). Dever-se-á lembrar que os esquemas não são, eles mesmos, imagens espaciais: eles são determinações *a priori do tempo* de acordo com regras, que tornam possíveis as imagens (32). Isto localiza "a ciência pura do tempo" kantiana no interior da filosofia transcendental. O tempo é mais geral—menos dispensável—do que o espaço: "a ciência do tempo" deve, portanto, ser mais fundamental do que a geometria como ciência do espaço. A ciência pura do tempo não é a aritmética, pois esta tem números atuais como seus objetos e é insuficientemente geral. A ciência do "número em geral", que, através de sua conexão com a síntese transcendental

do diverso do sentido interior, diz respeito à "retenção" e à "conexão" de um modo arbitrário e é, portanto, a condição para a possibilidade tanto da aritmética quanto da geometria, é a álgebra.

"A matemática não constrói somente magnitudes (*quanta*) como na geometria; constrói também magnitudes enquanto tais (*quantitas*), como em álgebra. Nesta, *ela abstrai completamente* das propriedades do objeto aquilo que deve ser pensado em termos de um tal conceito de magnitude ... Uma vez que tenha adotado uma notação para o conceito geral de magnitude desde que nele as diferentes relações tenham sido contidas, a matemática apresenta na intuição, de acordo com certas regras universais, todas as várias operações pelas quais as magnitudes são produzidas e modificadas. Deste modo, em álgebra, por meio de uma *construção simbólica*, assim como na geometria por meio de uma construção ostensiva, chegamos a resultados aos quais o conhecimento discursivo jamais chegaria por meio de meros conceitos". (33)

Em sua teoria da geometria, Kant parece insistir na indispensabilidade das figuras no espaço. O próprio esquematismo tal como é exposto, centralizado na natureza fundamentalmente temporal das regras da síntese a fim de gerar figuras no espaço, liga a álgebra ao caráter intrinsecamente temporal da construção simbólica. A teoria kantiana indiretamente sugere que as construções espaciais são dispensáveis, desde que estejamos de posse de um sistema adequado de símbolos por meio dos quais qualquer relação intuitiva, ou particular, pode ser expressa. O método algébrico não é "geométrico", mas é construtivo no sentido exigido, pois emprega variáveis cujo único valor aceitável são *indivíduos* (34). Os conceitos expressos através dos símbolos e neles concretizados – sobretudo os que dizem respeito às relações de magnitude – apresentam-se na intuição: eles estão concretizados simbolicamente. O que é exigido na ciência geométrica para Kant não é a existência das figuras espaciais, mas a construção na intuição pura, isto é, a possibilidade de se considerar o universal na construção particular (35). Esta pode ser uma figura espacialmente externa, ou uma representação algébrica das *relações* expressas em tal figura. Na carta de Kant a Schulz ele diz que a "aritmética universal", isto é, a álgebra, é uma ciência ampliativa e que as outras partes da matemática pura (*mathesis*) progridem em grande parte por causa da álgebra, considerada como a teoria universal das quantidades. Como Hintikka fez notar, a teoria kantiana do raciocínio matemático e especialmente a interpretação da intuição que dá ênfase a seu caráter não espacial podem ser reconhecidas nos escritos denominados pré-críticos. Desde 1763, Kant distingue o raciocínio matemático do metafísico pelo uso "individual e sensível" que o primeiro faz *dos signos*, o qual fornece um conhecimento concreto de conceitos gerais (36).

V

Esta interpretação da construção e do esquematismo parece-me ser consistente com as notas explícitas sobre álgebra que se encontram na *Crítica da Razão Pura*. No entanto, um sério problema de exegese pareceria surgir em algumas observações feitas na *Crítica do Juízo*, que dizem respeito a este assunto, e que sugerem uma fundamental inconsistência

no uso kantiano de termos-chave. Na secção 59 da *Crítica do Juízo*, Kant estabelece algumas distinções entre os esquemas e os símbolos que não podem facilmente ser conciliadas com seus comentários mais minuciosos feitos em outros lugares sobre o uso da notação matemática. Kant afirma que todos os conceitos exigem "verificação" por meio de intuições. Isto é parte daquilo que a asserção kantiana de que os pensamentos sem conteúdo são vazios e as intuições sem conceitos são cegas quer significar. Nem os conceitos sem uma intuição correspondente nem a intuição sem conceitos podem produzir conhecimento (37). Os conceitos empíricos verificam-se por "exemplos", e os conceitos puros pelos "esquemas". Este processo de verificação, ou de "apresentação em termos de sentido", pode ter lugar de dois modos:

"Ou é esquemático, como quando a intuição correspondente a um conceito compreendido pelo entendimento é dada *a priori*, ou é simbólico, como quando o conceito é tal que somente a razão pode pensá-lo, e ao qual intuição sensível alguma pode adequar-se. Neste último caso, supre-se o conceito com uma intuição, de modo que o procedimento do juízo lidando com ele é meramente análogo ao que se observa no esquematismo. Em outras palavras, é a regra de seu procedimento, e não a própria intuição, que concorda com o conceito". (38)

Deste modo não há mais qualquer dificuldade: quando o conceito é uma idéia da razão de tal modo que não haja, em princípio, intuição alguma que possa adequar-se a ele, expressa-se o conceito por meio de um símbolo. (Uma "Idéia da Razão" é um conceito que não é abstraído da experiência sensível nem a ela é aplicável: ela "transcende a possibilidade da experiência". 39) A relação entre um símbolo e seu conceito é meramente análoga à maneira pela qual o esquema relaciona-se ao seu conceito. Tanto o esquemático quanto o simbólico são, para Kant, modos intuitivos de representação: a diferença é que o primeiro "apresenta" diretamente o conceito através da demonstração, enquanto o último constitui-se somente de "apresentações" indiretas do conceito por meio da analogia. Esta é a interpretação do simbolismo que se poderia esperar, dada a insistência da filosofia crítica no caráter *transcendente* de certos conceitos da razão. Claro está que tais conceitos somente poderiam fornecer um significado intuitivo—e, pois, *imanente*— através de analogias de alguma espécie. Kant, porém, identifica tanto o esquematismo quanto o simbolismo como "hipotiposes", isto é, como apresentações (*Darstellungen, exhibitiones*) e não como simples marcas, (*Charakterismen*). As marcas são:

..."meramente designações de conceitos com a ajuda de signos sensíveis que os acompanham *destituídos de qualquer conexão intrínseca com a intuição do objeto*. Sua única função é providenciar um meio de reinvoacar os conceitos de acordo com a lei da associação da imaginação— um papel puramente subjetivo. *Tais marcas são palavras ou signos visíveis (algébricos ou mesmo miméticos)*, simplesmente como expressões de conceitos". (40)

Isto apresenta um sério problema: aqui Kant identifica os símbolos algébricos como meras marcas convencionais, cujo propósito é reinvoacar conceitos por meio de simples associação. Anteriormente, sugeri que expressões algébricas apresentavam diretamente na intuição relações de magnitude enquanto tais, de modo que podiam conectar-se às regras

da síntese descritas como esquematismo. Mas Kant parece aqui localizar a notação algébrica mais no interior de um conceito mais amplo de simbolismo do que de um conceito mais amplo de esquematismo. A relação entre um símbolo algébrico e um conceito de número seria direta e bastante diferente da relação que um *modelo* ou *analogia* tem para com o conceito de razão, para o qual é um modelo ou analogia. A conexão entre um símbolo enquanto analogia e seu conceito é mais frouxa do que aquela entre os esquemas e seus conceitos. Pode-se usar uma coisa como um símbolo para outra em virtude da similaridade na "estrutura de reflexão" em dois casos:

"Um estado monárquico é representado como um corpo vivo quando é governado por leis constitucionais, mas como uma simples máquina (tal como um moinho manual) quando é governado por uma vontade individual absoluta; mas em ambos os casos a representação é meramente *simbólica*. Pois, certamente, não há semelhança alguma entre um estado despótico e um moinho, embora seguramente haja entre as regras de reflexão sobre ambos e as relações causais (que os determinam)* ...Na linguagem temos várias apresentações indiretas tais como estas, modeladas sobre uma analogia, que permitem que a expressão em questão contenha, não o próprio esquema para o conceito, mas simplesmente um símbolo para reflexão". (41)

Assim, os símbolos enquanto analogias podem expressar conceitos para os quais o emprego de uma "intuição" estaria fora de questão. Na *Crítica do Juízo*, a idéia da representação por meio de analogia é usada como a designação central kantiana do simbolismo, e, embora esta idéia seja suficientemente clara, o simbolismo algébrico não poderia se localizar em seu domínio.

Uma explicação para esta confusão pode ser o comprometimento da *Crítica do Juízo* como o juízo denominado *reflexivo*, em contraste com um juízo determinante. Se um "universal" — sob a forma de uma regra, um princípio ou uma lei — é dado, o juízo que subsume sob ele um particular é determinante; se, de outro lado, somente é dado o particular, então cabe ao juízo reflexivo achar-lhe um universal. Um juízo determinante — como subsunção dos particulares sob regras — opera

"...mesmo onde um juízo é transcendental e, como tal, oferece as condições *a priori* em conformidade com as quais somente pode se efetuar a subsunção sob aquele universal". (42)

Deste modo, diferentemente dos juízos *transcendentes* — nos quais as idéias da razão só podem ser representadas por meio de *analogias* —, os juízos *transcendentais* — onde se acham envolvidas condições *a priori* do conhecimento — podem determinar-se por meio de esquemas. Uma vez, porém, que as regras da síntese da imaginação *a priori* são pressupostas em todas as construções de objetos matemáticos, tais objetos devem apresentar seus conceitos e torná-los *determinados*, de um modo bastante diferente do juízo reflexivo por meio de "símbolos", que, como diz Kant, é uma representação por "mera analogia". A teoria

* O acréscimo é do tradutor.

geral kantiana da construção matemática *minimiza* qualquer consideração da notação algébrica como simples marcas, mesmo que tal notação seja convencional.

Estes símbolos são importantes como recursos práticos, mesmo que o lugar *a priori* da construção matemática seja o procedimento da síntese imaginativa (43).

NOTAS

- 1 – Como exemplo, ver Gordon Brittan, *Kant's Theory of Science* (Princeton University Press, 1978), Chap. 3, p. 68.
- 2 – Cf. C. D. Broad, *Kant: An Introduction* (Cambridge: Cambridge University Press, 1978), p. 69.
- 3 – Cf. G. Brittan, op. cit., pp. 43 ss. e 68.
- 4 – Kant, *Critique of Pure Reason*, trans. by N. Kemp. Smith (Macmillan, 1973), B268.
- 5 – As várias interpretações da filosofia da Matemática de Kant feitas por Hintikka enfatizam o caráter "sintético" da idéia de "apresentar na intuição", e relacionam esta noção em Kant aos *Elementos* de Euclides. No que se segue, minha dívida a Hintikka será óbvia, e creio que minha compreensão da teoria da álgebra encontrável em Kant se encaixa com a posição geral de Hintikka. Ver J. Hintikka, "Kant on the Mathematical Method", *The Monist* 51 (1967), 352-375; "Kant's 'New Method of Thought' and Theory of Mathematics", *Ajatus* 27 (1965), 37-47; "Kant's Motion of Intuition". *The First Critique*, T. Penelhum and J.H. Mac Intosh (eds.) (Belmont, 1969), pp. 38-53.
- 6 – A240/B299.
- 7 – J. Hintikka, "Kant on the mathematical method", *The Monist* 51 (1967), 359.
- 8 – A598/B626.
- 9 – A716/B744 – Se isto estiver estabelecido, Kant acredita ter justificado sua teoria do espaço como intuição *a priori*. A exposição transcendental tem a tarefa de mostrar que somente ao se assumir esta visão característica do espaço pode-se compreender a possibilidade da geometria como um corpo de proposições sintéticas, válidas *a priori*.
- 10 – A714/B742, a ênfase é minha. (n. do A.)

11 – A240/B299.

12 – A132 – 133/B171 – 172.

13 – Uma propriedade unicamente atribuível às figuras no espaço euclidiano. Em espaços não euclidianos de curvatura variável – por exemplo, Lobatschefskiano – não será possível construir triângulos semelhantes de diferentes magnitudes. No espaço homogêneo euclidiano isto é sempre possível.

14 – Este problema lembra-nos claramente o esforço de Berkeley contra as "idéias gerais abstratas". Cf. Gerd Buchdahl, *Metaphysics and the Philosophy of Science* (Blackwell, 1969) p. 285: "Quando um geômetra aparece 'raciocinando sobre um triângulo no quadro negro', não está tirando conclusões gerais a partir de um triângulo particular; mas também não está 'realmente pensando' em algum 'triângulo universal abstrato'. Ele está, de fato, raciocinando sobre algumas propriedades de seu triângulo mantidas em comum com a classe de triângulos a que a demonstração se refere, isto é, com todos aqueles triângulos que apresentam as propriedades mencionadas nas definições, postulados e axiomas".

15 – G. Buchdahl, op. cit., p. 556, especialmente a nota 1.

16 – A78/B103, a ênfase é de Kemp Smith: a linguagem aqui lembra-nos a do esquematismo: Cf. A141/B181.

17 – A141/B181.

18 – B154 – 155, a ênfase é do autor do artigo.

19 – G. Buchdahl, op. cit., p. 642.

20 – B155 e nota, também A163/B204.

21 – B150.

22 – A141/B180.

23 – A142/B181; (o autor declara que:) modifiquei aqui a tradução de Kemp Smith.

- 24 – O processo ativo e interpretativo de "ver um aspecto" requer imaginação num sentido kantiano. Wittgenstein confirma o enfoque kantiano quando conclui que o conceito de "ver um aspecto é semelhante ao conceito de (formar) uma imagem". *Philosophical Investigations* (Oxford, 1953) p. 213. A idéia geral, pode-se também encontrar em E. Cassirer, *The Philosophy of Symbolic Forms*, Vol. 3 (Yale University Press, 1957) p. 200.
- 25 – A714/B742, ênfase do autor do artigo.
- 26 – A141/B181; Cf. também B103.
- 27 – A77/B102, a ênfase é do autor de artigo.
- 28 – A140/B179.
- 29 – A143/B182.
- 30 – A103.
- 31 – Kant, *Selected Pre-critical Writings*, trans. by G. Kerferd and D. Walford (Manchester University Press, 1968), p. 24: "Enquiry concerning the Clarity of the Principles of Natural Theology and Ethics", 1763.
- 32 – A145/B185.
- 33 – A717/B745, ênfase do autor do artigo.
- 34 – Hintikka, "Kant on the mathematical method" etc., p. 359. Cf. também Kant, A159 – 160/B198 – 199.
- 35 – Cf. nota 14, e Brittan, op. cit., pp. 53 ff.
- 36 – Kant, "Enquiry etc.," pp. 13 e 24; também *Philosophical Correspondence*; ed. and trans. by A. Zweig (University of Chicago Press, 1967), p. 129.
- 37 – A51/B75.

38 – *Critique of Judgement*; trans. by James Creed Meredith (Oxford, 1957), Section 59, p. 221.

39 – A320/B377.

40 – *Critique of Judgement*, loc. cit., ênfase do autor do artigo.

41 – *Critique of Judgement*, p. 223.

42 – *Critique of Judgement*, p. 18.

43 – Cf. A. Heyting, "Constructivity in Mathematics", *Proceedings of Colloquium* (Amsterdam, 1957; North Holland 1959), p. 70.