
INTERPRETAÇÕES DO INFINITO MATEMÁTICO A PARTIR DA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

Cristina Cavalli Bertolucci¹

Resumo

Neste relato apresenta-se um estudo sobre o infinito matemático a luz da Epistemologia Genética. A partir do método clínico piagetiano, realizou-se um estudo exploratório para conhecer as diferentes concepções sobre o tema. Os sujeitos participantes tinham entre 13 e 73 anos de idade, manipularam experimentos concretos e responderam a uma entrevista semi estruturada. A partir das atividades concretas, que conduziam a resultados infinitos ou a números muito grandes, observou-se como o sujeito encara a possibilidade sem a materialidade. Como resultados encontramos três níveis de entendimento sobre o tema: *Existência Inconcebível do conceito*, *Existência pouco previsível* e *Infinito como representação de algo que não tem fim*. A noção de infinito matemático não dependeu da idade, grau de instrução ou área de atuação dos participantes, concluindo-se que tal noção é construída por diferentes patamares de pensamento. O estudo apresentado torna-se proveitoso a professores da escola básica e de nível superior, uma vez que expõe a organização de pensamento dos entrevistados sobre tema investigado.

Palavras-chave: Infinito Matemático; Epistemologia Genética; Pensamento Matemático; Método Clínico Piagetiano.

¹ Pós-doutoranda no Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências PPGEC na Universidade Federal do Rio Grande - FURG junto ao Ceamecim - Centro de estudos Ambientais, Ciências e Matemática. E-mail: tinabertolucci@gmail.com

MATHEMATICAL INFINITY INTERPRETED THROUGH GENETIC EPISTEMOLOGY

Abstract

In this report, we present a study about the mathematical infinity with regard to the Genetic Epistemology. Through the Piagetian clinical method, an exploratory study was carried out to understand the different conceptions about the mathematical infinity. The subjects were between 13 and 73 years old and they have been addressed to manipulate concrete experiments and then have been asked to respond to a semi-structured interview. Using mathematical tests in which the results tend to infinity or to very large numbers, we notice how the subject faces a feasibility issue without having a concrete material to handle. Regarding the results, we find out three levels of understanding on the theme: Inconceivable Existence, Existence little conceivable and Infinite as a representation of something that has no end. We found that the notion of the mathematical infinity did not depend on age, degree of education or professional area of the participants and we conclude that this notion is constructed by different levels of the thought. The presented study could be useful for teachers of basic and higher education, since it exposes how the interviewees organize its thoughts when facing the addressed issues.

Keywords: Mathematical Infinity; Genetic Epistemology; Mathematical Thinking; Piagetian Clinical Method.

Introdução

O infinito é um conteúdo da matemática que ainda hoje apresenta-se como um tema fascinante, atraindo estudiosos de várias disciplinas. Em particular, no âmbito da educação matemática, o infinito é abordado de diferentes maneiras, revelando as passagens históricas mais importantes, os obstáculos epistemológicos específicos do conceito em si e as dificuldades que os estudantes de diferentes anos escolares encontram ao se depararem com o conceito.

As dificuldades encontradas pelos estudantes não são somente aos obstáculos epistemológicos, mas também a obstáculos didáticos criados pelos professores. Nas indicações curriculares, como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), não vem explícito em qual ano ou etapa escolar esse argumento deve ser trabalhado. Sua apresentação, de modo indireto, inicia na representação formal de conjuntos numéricos infinitos nos anos finais do Ensino Fundamental. A ideia de infinito vai além do conteúdo formal escolar da matemática, podendo fazer parte de algumas situações do cotidiano, como as atividades abordadas na metodologia. A expressão infinito é conhecida e usada em vários contextos, referindo-se a diferentes representações. Na grande maioria das situações, quando pretende-se expressar que uma quantidade é extraordinariamente grande, se diz infinita.

A pesquisa realizada² destinou-se a conhecer diferentes noções de infinito matemático, elaboradas por sujeitos de várias idades, independente do seu grau de escolaridade e área de atuação. Para a compreensão deste estudo, é importante entender que infinito é uma ideia ou um processo e não um número em si. A ideia de infinito ainda hoje é, por vezes, tão perturbadora quanto no

² Pesquisa de Mestrado realizada pela autora junto ao Programa de Pós Graduação em Educação - PPGE-DU - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, 2009, sob orientação da professora Tânia Beatriz Iwaszko Marques.

tempo de Aristóteles. Ao ser confrontado com o mundo real, muitas vezes torna-se misterioso e vago, parecendo se compelir na construção do raciocínio. Será possível pensar em uma realidade infinita? Pensar em uma realidade que tenha uma complexidade infinita ou um número infinito de elementos? De acordo com Morris (1998), a história do infinito, não é uma história da matemática, mas uma história de evolução do pensamento científico e de como é possível pensar em algo que transcende qualquer possibilidade de compreensão.

De acordo com a Epistemologia Genética, o entendimento de um conceito inicia-se a partir de ideias simples que, de acordo com os significados que o sujeito vai atribuindo às diferentes concepções e ideias que vivencia, podem se constituir na construção de um conceito formal. Isso exige que o sujeito realize generalizações de pensamento, o que na teoria piagetiana é descrito como uma das passagens de pensamento do mundo concreto para o mundo formal. O conceito de infinito exige esta formalização de pensamento do sujeito, no sentido de raciocinar a partir de elementos fornecidos pelas próprias ideias.

Em Matemática, por exemplo, para a compreensão do comportamento de uma função, é necessário entender como ela se comporta nos seus extremos. Quando estudam-se os limites máximos e mínimos de uma função, tem-se a compreensão de como um fenômeno poderá se comportar quando atingir condições extremas. Nesse sentido, o entendimento dessa situação faz sentido somente quando o pensamento está apoiado em representações mentais. Dessa forma, podemos nos questionar se o sujeito com ideias apoiadas somente no mundo material conseguiria compreender o que é infinito.

A investigação foi conduzida a partir do método clínico piagetiano (DELVAL, 2011), fornecendo elementos para a coleta e análise de dados. Para a coleta de dados foram construídas três atividades concretas e uma entrevista

clínica. O estudo realizado forneceu dados interessantes sobre as concepções dos entrevistados, analisados a partir dos pressupostos teóricos da Epistemologia Genética. Entre as concepções, identificamos desde as mais elementares, como a não concepção de sua existência até a aproximação do conceito formal, como a representação de algo que não tem fim.

O infinito matemático no viés da Epistemologia Genética

A fim de compreender a “noção de infinito” elaborada pelos sujeitos, torna-se pertinente elucidar o que se entende por *noção* e por *infinito*.

De acordo com Abbagnano (1962, p.682), uma *noção* é entendida como “qualquer ato de operação cognoscitiva” ou ainda como “primeira operação de nosso intelecto, [...] que parecem ter origem e existência constante mais no pensamento dos homens do que na realidade das coisas”. Matematicamente falando, uma noção é estabelecida através de sua definição. Muitas definições são dadas a partir de outras noções já estabelecidas. As *noções primitivas*, por exemplo, são aceitas sem definição, não sendo definidas em termos de conceitos previamente definidos, como é o caso do ponto, da reta e do plano na Geometria Euclidiana.

Em uma perspectiva filosófica, o termo infinito assume três grandes vertentes. O primeiro é o *infinito matemático*, definido como “a disposição ou a qualidade de uma grandeza”, o segundo é o *infinito teológico*, estabelecido como “a ilimitação de potência” e o terceiro como *infinito metafísico*, referindo-se a “ausência de acabamento” (ABBAGNANO, 1962, p. 535). Mora (1961, p. 934) chama atenção para a “distinção entre indefinido e infinito”, segundo ele, o infinito é algo que está sendo, mas não é. Aqui abordamos o infinito matemático tomado como um processo que pode ser percorrido, mas nunca completamente.

A teoria piagetiana sustenta que, para que uma noção se torne um conceito, é necessário que exista uma tomada de consciência, da parte do sujeito, em relação às suas ações de pensamento. É através da tomada de consciência de esquemas de ação que se torna possível a construção de um conceito (PIAGET, 1975). Nessa perspectiva, para conceber o infinito, é necessário que o sujeito apoie seu pensamento em ideias e não somente em objetos concretos. Apoiar o pensamento no mundo material significa retirar características somente do que se observa e, a partir disso, construir relações. O sujeito, ao permanecer na materialidade dos fatos, restringe seu pensamento e fica preso a essa materialidade (PIAGET, 1995).

Para a compreensão desse conceito, a estrutura do pensamento deve permitir a construção de relações entre as ideias. A partir do referencial piagetiano, é possível pensar que o sujeito só poderá construir a noção de infinito quando apoiar seu pensamento no estruturalmente possível e puder superar o suporte material. Ao limitar-se ao materialmente possível, terá ideias equivocadas e restritas acerca do infinito, pois não tem condições de virtualizar o pensamento, o que é condição necessária para a construção de tal noção.

Nessa direção, se o sujeito não operar com seu pensamento no plano do estruturalmente possível, não compreende o infinito, pois é um conceito que não se define no plano do concreto. Quando nos referimos ao estruturalmente possível, de acordo com Inhelder e Piaget (1976), significa que todas as possíveis operações e relações estabelecidas que o sujeito realiza, ocorrem no mundo das ideias. São transformações apenas virtuais, nas quais o sujeito efetua todas as possibilidades, ainda que elas não possam ser realizadas no mundo real. É como se os sujeitos pudessem testar todas as hipóteses de maneira muito rápida, em tempo quase imperceptível.

Alinhamento da investigação realizada

A fim de conhecer como raciocinam os sujeitos participantes sobre o infinito matemático, sentiu-se necessidade de construir instrumentos concretos que possibilitasse-os também a manipular, constituindo-se como atividades concretas.

Jean Piaget desenvolveu um conjunto de técnicas de coleta e análise de dados chamado Método Clínico. Tal método recebeu várias adequações ao longo das décadas de utilização pelo grupo de pesquisa do autor. O método consiste em um procedimento para investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem, procurando descobrir o que não está evidente nas suas ações ou falas (DELVAL, 2001). A partir de uma entrevista semiestruturada, denominada entrevista clínica, o experimentador mantém uma “conversa livre” com o entrevistado, conhecendo o que ele pensa sobre o tema proposto. Durante a entrevista clínica tem-se o cuidado de não se sugerir respostas, podendo essas interferirem nos resultados.

Neste trabalho optamos por utilizar a versão do método utilizada em pesquisas sobre Epistemologia Genética, especificamente a desenvolvida entre 1940 e 1955. Esta versão do método é descrita em detalhes por Delval (2001), o qual denomina esta fase metodológica como Método Clínico de Manipulação e Formalização (MCMF). De acordo com Delval (2001), o MCMF consiste em solicitar ao participante que realize uma tarefa, explicando-a logo após executá-la. A explicação, nesse sentido, é considerada um complemento da ação, e é fonte de informações sobre o percurso do pensamento que o participante mobiliza para realizar a tarefa proposta.

Os instrumentos de investigação foram construídos especificamente para este estudo. Como a intenção era conhecer como o sujeito organiza seu

pensamento sobre o tema abordado, procurou-se observar seu comportamento a partir de situações concretas. Essas provas consistem em três atividades cujas resoluções iniciam por meio do material concreto e continuam sua execução somente no pensamento, pois a sua continuidade material é inviabilizada durante as atividades. A intenção foi construir provas que levassem a resultados finitos e infinitos, sendo que em todas elas trabalha-se somente com o infinito enumerável, do qual se pode fazer a contagem.

O objetivo do estudo foi elucidar os processos mentais elaborados na solução de problemas que levam ao infinito, observando as possíveis tentativas de generalização que os sujeitos constroem sobre o infinito. Para a utilização do MCMF é fundamental ter uma ou mais hipóteses iniciais. A partir da delimitação do problema, sustentou-se como hipótese que a noção de infinito é construída, sendo resultado de uma construção progressiva realizada por patamares.

A escolaridade dos entrevistados variou entre Ensino Fundamental, Médio e Superior, abrangendo estudantes, profissionais da saúde, marketing, marcenaria e professores de diferentes áreas. Por serem sujeitos que já concluíram o oitavo ano do Ensino Fundamental, acredita-se que já trabalharam o conceito em algum momento da vida escolar, ainda que de modo informal. Doze sujeitos, com idades entre 13 e 73 anos, participaram de modo voluntário da pesquisa, sendo que o convite levou em consideração as suas disponibilidades e assinatura do termo de consentimento informado.

A coleta de dados foi realizada individualmente, os dados foram registrados por meio de gravador de voz e posteriormente transcritos. No primeiro momento, houve a execução das três provas concretas e, em seguida, foi realizada uma entrevista. As provas têm a função de investigar as diferentes noções de infinito; a entrevista clínica funciona como uma contra argumentação,

com o objetivo de conhecer elementos complementares sobre o curso do pensamento dos entrevistados. Para uma melhor compreensão da análise dos dados, torna-se pertinente descrever as provas concretas.

Prova do Quadrado: Solicita-se ao sujeito que divida um quadrado de papel de 30cm de lado em quatro novos quadrados. Depois de recortá-lo, toma-se somente um desses quadrados (15cm de lado) e pede-se para que ele faça novamente a divisão e o recorte, de modo sucessivo. Durante a realização da atividade, indaga-se sobre o tamanho do lado da figura e a quantidade de vezes que essa ainda pode ser dividida.

Prova da Areia: Entrega-se ao sujeito uma quantidade de areia fina, equivalente a 3dm³ e solicita-se que coloque a areia dentro de uma garrafa pet 2 litros, com auxílio de colher e funil. Na realização da atividade, pergunta-se sobre o número de grãos de areia, sobre a possibilidade de se realizar a contagem e possíveis estratégias para isso.

Prova do Círculo: Entrega-se ao sujeito um círculo de madeira de 20cm de diâmetro e solicita-se que desenhe um segmento que represente o raio. Durante a realização da atividade, pergunta-se sobre a quantidade de raios do círculo e se é possível fazer uma estimativa em relação ao número de raios que possui um círculo.

Resultados do estudo

Para análise dos resultados foram consideradas as diferenças encontradas nas respostas obtidas, em termos de conteúdo ou de raciocínio. É importante destacar que os experimentos realizados não corrigem, no sentido escolar, o pensamento do sujeito. Essa é uma das características do Método Clínico, capturando especificamente a forma como o raciocínio se apresenta. Esse estudo

não teve a intenção de classificar o estágio do desenvolvimento cognitivo dos sujeitos, apenas indicamos atributos de pensamento que são característicos de determinados estádios (PIAGET, 1972; 1978).

Muitas vezes, pela forma como uma pessoa se explica ou se utiliza de diferentes expressões linguísticas, tem-se a impressão de que existem vários níveis de pensamento, entretanto, em muitas situações, essa diferença está no conteúdo. Após um olhar individual sobre os dados coletados³, os diferentes tipos de pensamentos emersos sobre o infinito foram organizados em três níveis de pensamento: *Existência Inconcebível do conceito*, *Existência pouco previsível* e *Infinito como representação de algo que não tem fim*.

No **nível 1**, *Existência Inconcebível do conceito*, o infinito não é imaginado pelos sujeitos, caracterizando assim sua existência como algo inconcebível. Observa-se que BET⁴, ao ser indagado sobre a quantidade de números presentes no intervalo limitado $[0 ; 1]$, sustentou seu pensamento no material:

Quantos números tu achas que existem?

BET: *Pergunta difícil, não sei.*

Tu podes me dar um exemplo de algo que não tem fim?

BET: *O céu, como eu falei antes.*

Tu sabes quantos números existem entre o número zero e o um?

BET: *Meio centímetro, um meio.*

E tu sabes quantos são?

BET: *tem um milímetro... uns 4 números.*

Quatro números?

BET: *Não, 0,9.*

Se te perguntam quantos números tem entre o número zero e o número um, ou entre o número um e o número dois, tu dirias quantos mais ou menos?

BET: *Entre o zero e o dois tem vinte números.*

³ Na elaboração da investigação foi realizado um estudo piloto com quatro sujeitos, verificando a operacionalidade das atividades construídas. Esses não foram considerados na análise dos dados.

⁴ 19 anos, Superior Incompleto, área da saúde.

Percebe-se que BET não se incomoda com sua linha de raciocínio e satisfaz-se com explicações múltiplas e contraditórias entre si, não encontrando um curso de raciocínio coerente. Nessa linha em que se organizam as explicações, observa-se claramente uma limitação no raciocínio: a princípio BET fala da existência de números decimais entre os números zero e um, mas em seguida afirma que seriam esses *uns quatro números*. O sujeito finaliza então afirmando que no intervalo definido $[0 ; 2]$ existem um total de 20 números.

Observa-se que, neste nível, o raciocínio está subordinado ao conteúdo concreto, justificando assim a existência do infinito como algo não concebível. A prova da areia tem como resultado um número finito, do qual se pode fazer apenas uma estimativa. A consciência de finito no sujeito que apoia seu pensamento no materialmente possível vai até onde ele pode contar. A explicação apresentada por IRI⁵ sobre a infinitude de grãos de areia evidencia sua linha de raciocínio, sustentada pela materialidade do fato. Ao ser questionado sobre a quantidade de grãos o sujeito afirma ter milhões. Observamos detalhes do seu raciocínio no trecho abaixo:

Tu achas que é possível contarmos quantos grãos de areia estão sendo colocados nessa garrafa?

IRI: *Não, tem até uma passagem na bíblia que chegou Jesus na beira do mar e quis botar o mar dentro de um objeto que ele possuía... não, é impossível. Então acho que é a mesma coisa que isto aqui. É impossível contar os grãos da areia.*

E se tivesses um recurso tecnológico que auxiliasse a contagem?

IRI: *Acho que mesmo assim não teria como.*

E tu poderias fazer uma estimativa de quantos grãos existem dentro dessa garrafa?

IRI: *Acho que neste pouco aqui tem milhões.*

E será um número finito ou infinito?

IRI: *É infinito, claro!*

⁵ 73 anos, Superior Completo, Professora de ciências humanas.

IRI não se perturba com possibilidades que podem depender de forças externas. Ele submete o infinito a um caráter subjetivo, ao próprio eu. Neste nível, o infinito não é um ente matemático em si, mas sim uma “coisa” que depende do sujeito, assim como o pensamento de uma criança que acha que a lua se desloca porque ela está caminhando. Respostas deste tipo apresentam características do pensamento pré-operatório.

Neste nível observam-se respostas que demonstram um pensamento muitas vezes dominado pela percepção e com estrutura lógica elementar. Os raciocínios caracterizam-se conforme a situação apresentada, nas quais o sujeito age diretamente sobre o material, experimentando por tentativa e erro, sem dissociar os fatores envolvidos, simplesmente classificando ou ordenando o que aconteceu, observando então os resultados (PIAGET, 1972). As respostas demonstram um pensamento muitas vezes dominado pela percepção e com estrutura lógica elementar. Quando não conseguiram compreender o que estavam realizando, os entrevistados apresentaram explicações contraditórias e não chegaram a uma coerência.

Percebe-se que os sujeitos não sentiram necessidade de compreender as suas ações. Souberam agir e às vezes acertar, construindo as relações pelas próprias ações. Isso significa que ainda não chegaram a interiorizar suas ações em operações, de modo consciente, tentando assim conciliar todas as explicações.

No **nível 2**, a existência do infinito caracterizou-se como pouco previsível, ou ainda relacionada à não possibilidade de contagem. A característica principal deste nível é apresentar pensamento parcial e, apesar de o sujeito fazer alguns avanços, suas explicações e linha de raciocínio ficaram incompletas. A concepção sobre o infinito aqui é ainda elementar, conseguindo imaginar que

algo até possa não ter fim. A infinitude foi relacionada ao que não se conhece, a algo cujo final não se pode prever ou enxergar. Tal compreensão vem exemplificada no recorte abaixo, quando MOR⁶ explica sobre a quantidade de maçãs já comidas:

MOR: *A [quantidade] que eu comi é finita, mas a que eu venha a comer pode ser infinita. Eu não sei a quantidade que vou comer enquanto eu existir, ela é infinita. No momento que eu morrer, aí eu comi aquela quantidade. Eu não vou poder fazer o cálculo, mas, se vocês sabem a quantidade de maçãs que eu comia por dia, dá pra fazer o cálculo. E aí vai ser o que, finito ou infinito?*

MOR: *Aí vai ser finito. Tudo que termina é finito.*

Então, o que tu vais comer a partir de hoje até o dia que morreres é uma quantidade infinita ou finita de maçãs?

MOR: *Infinita porque tu não estás sabendo a quantidade.*

Percebe-se que o sujeito relaciona o que não tem fim à impossibilidade de contar. MOR acredita que poderá comer infinitas maçãs até morrer, mas afirma que, após a sua morte, a quantidade poderá ser conhecida. Essa impossibilidade de admitir o que seria o final foge da capacidade imaginativa, dando assim a impressão de que a contagem está inacabada.

Apesar do pensamento apresentado já ter uma totalidade, partiu-se de uma situação geral com a intenção de particularizar. Pode-se observar que o raciocínio apresentado acontece mais por inferência do que por lógica operatória, significando assim que as constatações realizadas dependem de uma implicação dedutiva. A inferência tem por trás uma lógica operatória matemática, mas com caráter dedutivo, e o sujeito utiliza-se do mesmo raciocínio lógico matemático para explicar diversas situações (INHELDER, PIAGET, 1976).

⁶ 42 anos, Ensino Médio Completo, área da indústria.

Em relação a prova do círculo, alguns sujeitos acreditam que, se o círculo for maior, a quantidade de raios também será maior. Matematicamente falando, a quantidade de raios de um círculo será sempre infinita, independentemente do seu tamanho de diâmetro.

Quantos raios tu achas que existem em um círculo?

LIS⁷: *Não tenho a menor ideia. [...] Mas também depende do tamanho do círculo, porque se ele for maior, tipo 30 metros, dá pra ser feito milhões, mais do que se fosse 30 cm.*

Esse que tens em mãos tem quanto de diâmetro?

LIS: *Não lembro muito bem como mede, mas acho que são 20 cm.*

Então se for um círculo de 40 cm de diâmetro, como tu achas que seria o número de raios?

LIS: *Cada raio com 20 cm seria.*

A quantidade de raios seria a mesma ou diferente?

LIS: *Acho que teria que ser maior, daí seria mais fácil para a pessoa fazer mais riscos.*

Mas vai ter mais raios, menos ou a mesma quantidade?

LIS: *Num círculo de 20 cm para o de 40 cm, acho que vai ter mais raios no de 40 cm. Ou também pode ser a mesma coisa também, depende da pessoa que faz.*

De acordo com Piaget (1975, p. 202), o dado de observação constatado não é um fato físico exterior ao sujeito, mas “[...] pertence a uma ação própria e é, portanto, conhecido do sujeito, apenas em atos inconscientes e não em sua conceituação consciente”. Nesta categoria existe um progresso na direção da não-contradição e na busca de uma explicação única. Por não existirem relações operatórias suficientes que concebem o que é finito ou infinito, a explicação pressentida não é ainda encontrada, e não se atinge ainda a total coerência do evento.

No **Nível 3** encontramos pensamentos mais elaborados sobre infinito, relacionando-o à representação de algo que não tem fim. Esta forma mais elaborada de raciocínio apresentou noções de infinito matemático mais estrutu-

⁷ 13 anos, Ensino Fundamental incompleto, estudante.

radas, algumas delas na forma de conceito científico. Aqui o pensamento caracterizou-se pela dedução⁸, partindo de uma ideia particular para então generalizá-la.

De acordo com Piaget (1972), a realização de deduções lógicas é uma característica do pensamento formal. No pensamento formal, o mundo real está subordinado ao mundo das possibilidades. Nesse estágio de desenvolvimento cognitivo, as operações mentais são realizadas entre ações de pensamentos, ou seja, os objetos a serem operados não são mais concretos e sim as possíveis hipóteses construídas em função da situação. O pensamento em termos de hipóteses, chamado de hipotético dedutivo, permite ao sujeito unir todas as possibilidades entre si, com implicações que incluem e superam o real (PIAGET, 1972).

O pensamento hipotético permite ao sujeito a capacidade de realizar muito mais operações e operações em patamares muito mais elevados do que aquelas que se apoiam no real. Todavia, antes de chegar à formalização, o pensamento tem a necessidade lógica de comprovar o real. Existem áreas muito específicas, que são muito formalizadas, que em sua particularidade não permitem uma manipulação no real ou a testagem da hipótese. Nestes casos, o pensamento hipotético opera somente no pensamento, ou seja, no mundo virtual.

O virtual aqui é entendido como uma oposição ao que é real ou concreto. Abaixo apresenta-se uma passagem interessante de pensamento apoiado no real e, em seguida, transposto ao virtual. Na Prova do Quadrado, quando o sujeito GUI⁹, após a quarta divisão realizada no papel, é convidado a pensar sobre a continuidade das divisões, transfere sua ação de pensamento para um recurso eletrônico, explicando assim a continuidade da atividade:

⁸ A dedução é uma análise lógica utilizada para construir argumentos, utiliza-se de premissas ou argumentos para obter uma conclusão.

⁹ 26 anos, Ensino Superior Incompleto, área da saúde.

GUI: [...] *Como o quadrado é uma forma geométrica, tu podes usar a matemática e fazer um cálculo que te dá o número exato de dividir o papel. Isso se tu não usares um microscópio eletrônico. [...] A matemática te dá tudo, não sei se te dá teoria, mas ela te visualiza, através de equações e tal. Se quiseres fazer na prática tu podes usar um equipamento deste.*

Mesmo que tu não consigas mais recortar com o concreto, ainda é possível dividir?

GUI: *Ainda é possível.*

Quantas divisões são possíveis?

GUI: *Não posso te informar porque não sei exatamente. Acho que não tenho conhecimento suficiente, mas eu sei que é possível [...].*

Qual seria a medida de menor lado do quadrado?

GUI: *Acho que chegaria a milímetros. Isso na mão [...], mas pode chegar a muito mais. Micro, milímetro... 10 vezes na menos 30. A nanotecnologia te permite fazer isso.*

GUI quando questionado sobre a medida que o menor lado do quadrado pode assumir, elenca unidades utilizadas para representar números muito pequenos, como “micro” e “nano”, dirigindo seu pensamento ao infinitamente pequeno. Ainda que de forma inconsciente, percebe-se a noção de infinito em suas respostas. Piaget (1975, p. 206) explica que os processos de pensamento podem permanecer inconscientes “[...] especialmente quando se encontram na fonte de coordenações inferenciais, conscientes como raciocínios, mas cujo sujeito não sabe de onde tirou sua necessidade intrínseca”. Dessa forma, é como se o sujeito ainda não tivesse tomado consciência sobre essa questão.

Quando o sujeito compara duas iniciativas que tomou e procura o que elas têm em comum, seu pensamento começa a tornar-se consciente. Nessa direção, uma tomada de consciência é a representação de algo que vai além de considerar algo, tratando-se na realidade “de uma verdadeira construção, que consiste em elaborar, não a consciência considerada como um todo, mas seus diferentes níveis enquanto sistemas mais ou menos integrados” (PIAGET, 1975, p. 9). Ao pensar sobre o próprio pensamento, toma-se consciência da coordena-

ção das próprias ações. Logo, o próprio pensamento é objeto da ação. É a partir então da tomada de consciência que existe a possibilidade de construir conceito. Em seguida apresenta-se um interessante exemplo em direção à construção de um conceito:

Tu sabes quantos números existem entre o número zero e o número um?

GUI: *Infinitos.*

Como assim?

GUI: *Não sei se é infinito, mas tem várias casas decimais, então o número vai até a casa 0,00000000...*

Teve uma pessoa que disse que existem 9 números entre o zero e o um. O 0,1; 0,2; 0,3; ... até o 0,9.

GUI: *Pelo que eu entendo, tu tens os números irracionais, acho que são infinitos números para representar isso aí. Eu não consigo responder exatamente, mas a matemática consegue.*

A partir dos significados que o sujeito produz e organiza é que se pode construir ideias mais elaboradas, indo em direção à formalização de um conceito em si (PIAGET, 1975). GUI parte do seu conhecimento sobre números decimais e relaciona o intervalo assumido com a definição de números irracionais, afirmando assim que existem infinitos números entre zero e um.

A generalização que o sujeito realiza nesse nível é construtiva, permitindo novas organizações estruturais. Tal generalização relaciona-se à abstração reflexionante, pois está sustentada sobre as operações do sujeito (PIAGET, 1978). Segundo Piaget (1978), através dos processos de generalização construtiva começa a existir um domínio dos sucessos pelo das razões, invocando as capacidades construídas e reconstruindo novas operações. Esse processo de generalização construtiva acontece por sucessivas diferenciações e integrações (PIAGET, 1978), transpondo a um plano superior o que colheu no patamar prece-

dente. Na teoria piagetiana, pode-se entender tal ação também como uma abstração de reflexão.

Discussão dos resultados

A Prova da Areia trabalha com um resultado finito, abordado a partir de uma grande quantidade de areia. Nessa prova o sujeito tem condições de verificar a sua finitude apoiando-se somente no materialmente existente. As provas que trabalham com o infinito são duas. A Prova do Quadrado tende a um resultado infinitamente grande de possibilidades de corte e infinitamente pequeno no que diz respeito ao tamanho que vai tomando o objeto. A Prova do Círculo conduz a um resultado infinitamente grande no que se refere à quantidade de raios existentes no círculo.

A linha de raciocínio assumida por cada sujeito foi observada a partir da manipulação dos instrumentos utilizados durante a coleta de dados. Na prova da areia pode-se fazer uma estimativa do resultado. Dessa forma, se o sujeito concebe o que é finito, responderá que é um número muito grande, podendo ainda apresentar uma estratégia de fazer a contagem. A consciência de finito no sujeito que apoia seu pensamento no materialmente possível vai até onde ele tem condições para contar.

A divisão do quadrado utilizando-se a tesoura oferece um número limitado de cortes, chegando a um momento onde não é mais possível a materialidade do corte. Através de um suporte material, que vai progressivamente diminuindo de tamanho, temos o lado do quadrado tendendo a um tamanho infinitamente pequeno, que, porém, nunca chegará à medida zero. É como se pudéssemos continuar a cortar com o pensamento. Através dessa atividade observou-se como o sujeito encara o possível sem a materialidade, ou seja, a possibilidade de continuar a divisão sem o material concreto.

O sujeito que apoia seu pensamento no materialmente palpável não compreende quantos raios tem um círculo, uma vez que é impossível desenhá-los, pois são infinitos. Na existência de um círculo com o dobro de tamanho, alguns sujeitos foram levados a pensar de forma comparativa em relação à quantidade de raios.

No **nível 1** os sujeitos dirigem-se para o êxito das respostas, não para a compreensão da situação. Realizam a ação para atingir os fins propostos, mas não conseguem dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas originados por elas, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas (PIAGET, 1978).

No **nível 2**, o que o sujeito consegue retirar de conhecimento das situações expostas, não foi suficiente para engendrar e realizar novas tomadas de consciência, a partir do que conseguiu constatar. Em consequência, apresentaram concepção limitada sobre o infinito.

No **nível 3** encontramos o entendimento de infinito na direção formal do conceito. No nível da conceituação, atingido a partir de generalizações construtivas, o movimento de interiorização é marcado primeiramente por um processo geral de tomada de consciência das próprias ações. É justamente a possibilidade de generalização que faz uma aprendizagem ser interessante.

Considerações Conclusivas

A utilização do Método Clínico durante a realização das atividades permitiu entender detalhes do pensamento dos sujeitos, procurando-se fazer questionamentos a partir das respostas apresentadas. O fato das provas partirem de uma situação concreta não limita o pensamento, pois se o sujeito tem

estruturas para operar sobre, o concreto não limita a possibilidade do raciocínio.

Nos dados emersos, pode-se observar desde a ausência de noção, noções parciais e refinadas até a elaboração do conceito abordado. A concepção apresentada por um sujeito que trabalha na área das exatas não necessariamente foi mais refinada que a do adolescente. Com o estudo percebe-se que o nível de entendimento sobre o infinito independem da idade ou do grau de instrução dos participantes.

Considerando as trajetórias de vida e experiências próprias de cada sujeito, observou-se o uso de diferentes conteúdos e expressões linguísticas quando expressam seus pensamentos. A análise do estudo, assim como a construção dos níveis de pensamento, concentrou-se nas formas de raciocínio apresentadas pelos sujeitos em suas explicações. A investigação constatou que a noção de infinito é construída de modo singular por cada indivíduo, não sendo transmitida por ensinamentos, corroborando com a teoria construtivista. Nessa direção, uma aprendizagem é possível se basearmos a estrutura mais complexa em estruturas simples, isto é, quando há uma relação natural e desenvolvimento de estruturas e não simplesmente um treinamento (PIAGET, 1972). Quando uma estrutura se desenvolve espontaneamente, ao alcançar um estado de equilíbrio, ela é conservada por toda a vida, tornando-se um “patrimônio cultural” permanente.

As atividades construídas na coleta apresentam-se como situações a serem desenvolvidas em sala de aula, possibilitando ao docente expandir e recriar situações que coloquem os estudantes a pensar sobre o conceito. A interpretação do infinito a luz da Epistemologia Genética ofereceu elementos para compreender como o indivíduo constrói e organiza seu pensamento.

Referências

- ABBAGNANO, N. Dicionário de Filosofia. São Paulo: Mestre Jou, 1962.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular – Educação é a Base. Ministério da Educação, Brasília, 2017. Disponível em:
<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em 30 de março de 2018.
- DELVAL, J. Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- INHELDER, B.; PIAGET, J. Da lógica da criança a lógica do adolescente. São Paulo: Pioneira, 1976.
- MORA, J. F. Dicionário de Filosofia. Buenos Aires: Editorial Sudamericana, 1964.
- MORRIS, R. Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.
- PIAGET, J. A Tomada de Consciência. São Paulo: EDUSP, 1975.
- PIAGET, J. et al. Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.
- PIAGET, J. Evolução intelectual da adolescência à vida adulta. In: Human development, n.15, p.1-12, 1972 (Tradução de Tania B. I. Marques e Fernando Becker).
- PIAGET, J. Fazer e compreender. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978.
- PIAGET, J. A Tomada de Consciência. São Paulo: EDUSP, 1975.

Recebido em: 02/04/2018
Aprovado em: 30/06/2018