ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

JOGO SEMPRE 12: OPÇÃO À COMPREENSÃO DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Sônia Bessa [1]
Váldina Gonçalves da Costa[2]

Resumo

Com aporte teórico na Psicologia Genética, esse estudo de natureza qualitativa, descritivo interpretativo teve como objetivo identificar e analisar as implicações pedagógicas do jogo SEMPRE 12, em contexto de aprendizagem das operações aritméticas. Participaram da intervenção pedagógica 13 estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental de escola municipal da periferia da grande São Paulo, reconhecidos pelos professores com dificuldades de aprendizagem na disciplina de matemática. Foram 13 intervenções semanais de 1h30. Os resultados permitiram identificar que a intervenção pedagógica foi eficaz na construção das operações. Os estudantes apresentaram expressivos progressos. A utilização de jogos e desafios mostrou que atividades desse tipo podem atender interesses e necessidades afetivas e cognitivas dos estudantes com ou sem dificuldades de aprendizagem. Os resultados abrem discussão para o papel dos jogos de regras usados no processo interventivo para a aprendizagem matemática no Ensino Fundamental.

Palavras Chave: intervenção pedagógica; operações aritméticas; jogos.

[1]Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, pós-doutorado pela Universidade Federal do Triangulo Mineiro-UFTM. Docente do Departamento de Educação da Universidade Estadual de Goiás-UEG. Membro do Laboratório de Psicologia Genética da Unicamp. E-mail: sonia.bessa@ueg.br

[2] Doutora em Educação Matemática (PUC-SP) docente do curso de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Triangulo Mineiro-UFTM. Coordenadora no grupo de estudo e pesquisa em Educação e cultura (GEPEDUC). E-mail: valdina.costa@gmail.com

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

GAME EVER 12: OPTION TO UNDERSTANDING OF ARITHMETIC OPERATIONS

Abstract

With theoretical background in psychology Genetics, this study qualitative, interpretive descriptive aimed to identify and analyze the pedagogical implications of the game ALWAYS 12, in the context of learning arithmetic. Attended the pedagogical intervention 13 students from the 4th grade of elementary school municipal school on the outskirts of Greater São Paulo, recognized by teachers with learning difficulties in mathematics discipline. There were 13 weekly interventions 1:30. The results showed that the educational intervention was effective in building operations. Students showed significant progress. The use of games and challenges showed that such activities can meet interests and affective and cognitive needs of students with and without learning difficulties in mathematics discipline. The findings open up discussion to the role of rules of games used in the intervention process for learning math in elementary school.

Keywords: pedagogical intervention; arithmetic operations; games.

Introdução

São exemplos de operações aritméticas a adição, subtração, multiplicação e divisão. Embora a aritmética seja um conhecimento necessário e importante em todas as relações humanas, estudantes têm apresentado dificuldades de aprendizagem, conforme estudos de Brenelli (1993, 2001), Zaia (1996), Sanches (2004); Kamii (2002, 2008, 2013), Saravali e Guimarães (2007), Nunes, Carraher e Schiliemann (2011), Becker (2012), etc.

Kamii (2008), ao referir-se aos princípios que envolvem as operações, faz algumas propostas de ensino que implicam na utilização de jogos e desafios: incentivar os estudantes a inventarem seus próprios procedimentos, em vez de mostrar-lhes como resolver os problemas; encorajar os estudantes a inventarem

ISSN: 1984-1655

vários métodos diferentes para resolver um mesmo problema; abster-se de reforçar as respostas corretas e de corrigir as erradas; em lugar disso, incentivar a troca de pontos de vista e os estudantes a pensar. Essa autora acredita em uma transformação capaz de considerar o desenvolvimento intelectual dos estudantes, propor mais desafios às crianças, permitindo a estas, através de suas experiências, passar da ação à operação. Em assim fazendo, a matemática sairia de um plano mecânico, com ênfase na memorização, para procedimentos capazes de garantir uma aprendizagem efetiva.

Para Piaget (2010):

> [...] uma experiência que não seja realizada pela própria pessoa, com plena liberdade de iniciativa, deixa de ser, por definição, uma experiência, transformando-se em simples adestramento, destituído de valor formador, por falta de compreensão suficiente dos pormenores das etapas sucessivas (p.47).

Para Piaget (2010), não seria possível constituir, com efeito, uma atividade intelectual verdadeira, baseada em ações experimentais e pesquisas espontâneas, sem uma livre colaboração dos indivíduos, isto é, dos próprios alunos entre si, e não apenas entre o professor e os alunos, bem como sem o exercício do espírito crítico. Na medida em que os métodos de ensino sejam ativos – isto é, confiram uma participação cada vez maior às iniciativas e aos esforços espontâneos do aluno –, os resultados obtidos serão significativos. "[...] que a criança reinvente aquilo de que é capaz, ao invés de limitar-se a ouvir e a repetir, pois a falha das escolas tradicionais consiste em haver negligenciado, quase sistematicamente, a formação dos alunos, no tocante à experimentação" (PIAGET 2010 p.17).

Há que se considerar não somente a perspectiva do aluno, mas também a de um professor que lance desafios, contra-argumentos, favoreça situações de tomada de consciência. Para Mantovani de Assis (2015, p.219), o professor deve ficar atento à atividade da criança e intervir oportunamente "[...] sempre no sentido de fazê-la tomar consciência do que faz e, assim, passar da fase do fazer para o compreender [...]". Para Macedo (2000, p.74), é importante criar situações que provoquem o olhar do estudante numa determinada direção. Ele afirma que "Levá-lo a constatar suas ações é um bom caminho para a compreensão". O simples êxito do estudante não é garantia de compreensão. Deve ser considerado o processo de tomada de consciência das ações.

Para Piaget (1978, p.176):

> [...] fazer é compreender em ação uma situação dada em grau suficiente para atingir os fins propostos e compreender é conseguir dominar em pensamento as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados, em relação do como e ao porque das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação.

Corroborando a perspectiva de Piaget quanto a relação fazer e compreender Macedo (2001, p.129) afirma que: "[...] o fazer é produto da coordenação das ações articuladas no espaço e no tempo com transformações (relações causais) entre objetos orientados à realização do objetivo proposto".

Kamii (2008), referindo-se ao papel importante da ação sobre o objeto, afirma que o conhecimento lógico-matemático nasce das ações que o indivíduo realiza sobre os objetos e das abstrações reflexionantes que decorrem das coordenações dessas ações e, ao contrário da informação, compreende uma construção individual que supõe a organização de estruturas reguladoras não podendo, portanto, ser diretamente transmitido.

Piaget (1995), afirma que a natureza da abstração reflexionante e, sobretudo, a sua fecundidade é um dos motores do desenvolvimento cognitivo e um dos aspectos mais gerais do equilíbrio. "Todo o desenvolvimento se caracteriza por um ajustamento laborioso das abstrações e das generalizações" (p.26).

> [...] mesmo sob suas formas mais elementares, este tipo de abstração não poderia consistir em puras 'leituras', pois para abstrair a partir de um objeto qualquer propriedade, como seu peso ou sua cor, é necessário utilizar de saída instrumentos de assimilação [...] oriundos de esquemas sensório motores ou conceituais não fornecidos pelo objeto (idem p.5).

Para Piaget (1995), a abstração reflexionante se apoia sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo essas coordenações e o próprio processo reflexionante permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas.

Para Macedo (2014), a partir de Piaget (1995), a abstração reflexionante implica distinguir e integrar quatro formas de abstrações: abstração empírica - tira suas informações dos objetos como tais, ou das ações do sujeito sobre suas características materiais; de modo geral, pois, dos observáveis. Abstração pseudo-empírica - quando o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações; trata-se de um caso particular de abstração reflexionante; a abstração reflexionante - se apoia sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo essas coordenações e o próprio processo reflexionante permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas, e em quarto lugar a abstração refletida - o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente. É a tomada de consciência.

Kamii (2002, p.21), afirma que a abstração reflexionante "[...] envolve fazer relações mentais entre um ou mais objetos [...]" Essas relações não têm existência na realidade externa, mas é feita mentalmente por cada indivíduo por abstração reflexionante.

Becker (2014), afirma que a abstração reflexionante difere da empírica porque por ela o sujeito retira qualidades, não de objetos, ou de ações observáveis, mas das coordenações das ações que, por se realizarem internamente ao sujeito, não são observáveis. Esse autor dá o seguinte exemplo para explicar a relação mental construída pelo sujeito no momento da interação:

> [...] Se um bebê, por volta dos quatro meses de idade, conseguiu olhar um objeto, agarrá-lo e leva-lo à boca, ele coordenou três ações ou três esquemas: de olhar, agarrar e sugar. Onde está essa coordenação? Em seu cérebro, em sua mente. Não como coisa, mas como operação. Ela não pode ser observada, apenas inferida a partir da observação de seu comportamento. Quando uma criança de oito anos infere que pode obter o mesmo resultado que obteve somando 3+3+3, multiplicando 3x3, ele coordena as duas ações de somar numa única de multiplicar. Onde está essa coordenação? No seu cérebro, na sua mente. Não como coisa, estática, mas como operação, dinâmica. Não pode ser observada, apenas inferida a partir da observação de seu comportamento (BECKER, 2014, p.106).

Para Piaget (1995), a abstração reflexionante comporta sempre dois aspectos inseparáveis a) reflexionamento, ou seja, a projeção sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior, como por exemplo, da ação à representação e da b) reflexão, entendida como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior.

Becker (2014), ao falar sobre esses dois aspectos da abstração reflexionante afirma que o reflexionamento consiste em retirar qualidades das coordenações, de um patamar qualquer, e transferi-las para o patamar acima. Consiste na projeção, sobre um patamar superior, daquilo que foi tirado de um patamar inferior. Ex.: da ação à representação; das operações aritméticas à álgebra, das geometrias ao cálculo diferencial e integral; das concepções de espaço e tempo absolutos, ao espaço e tempo relativos; entre outros.

Para Becker (2014), a reflexão (*réflexion*) consiste na reorganização do que foi transferido pelo re-flexionamento ao patamar superior em função do que já existia ali. Ao reorganizar, surge algo novo, uma nova forma (em relação aos conteúdos assimilados); algo que não existia anteriormente. Uma nova organização ou reconstrução.

O caminho da abstração empírica à abstração refletida é continuo e pode ocorrer simultaneamente. Becker (2014, p.108), afirma que "[...] a atividade científica caracteriza-se por trabalhar intensamente com abstrações refletidas, sem deixar de utilizar todas as outras formas de abstração". Esse autor afirma que todas as descobertas da humanidade, desde a pedra lascada, o fogo ou a roda, passando pelos teoremas de Euclides, até a lâmpada elétrica, a rede de água e esgoto, o cálculo diferencial e integral, o motor a explosão, a mecânica quântica, a relatividade, a computação eletrônica, a turbina de aviação, a internet, o bóson de Higgs, etc. originaram-se de abstrações refletidas. "A abstração refletida é sempre um ponto de chegada obtido mediante numerosas abstrações reflexionantes propriamente ditas que pressupõem outras tantas abstrações pseudoempíricas" (BECKER 2014 p.109).

Para Piaget (1978, p.196), a tomada de consciência "[...] seria a passagem da ação à representação e comportaria sempre, portanto, uma reconstituição dependendo da conceituação."

Para Becker (2001, p. 42), "[...] tomada de consciência significa apropriar-se dos mecanismos da própria ação, ou seja, o avanço do sujeito na direção do objeto, a possibilidade de o sujeito avançar no sentido de apreender o mundo."

Com base nos pressupostos da Psicologia Genética de Jean Piaget existe a necessidade da construção do conhecimento a partir do plano da ação até chegar a coordenação das ações no pensamento. Os estudos de Piaget com crianças pequenas comprovaram que, a ação sobre os objetos é indispensável para a compreensão das relações aritméticas. Piaget (2013 p.13) afirma que "[...]

ISSN: 1984-1655

é um grande erro negligenciar o papel das ações e ater-se sempre ao plano da linguagem". A abstração reflexionante deriva das ações e da coordenação das ações.

A inserção de atividades no ambiente escolar que recorram aos desafios, aos jogos e às situações problemas, utilizando situações do cotidiano que fazem sentido para os estudantes pode promover os processos de abstração reflexionante.

A natureza do jogo pode favorecer esses mecanismos da abstração reflexionante. Quando se depara com um jogo de regras ou um desafio, o estudante está diante de um sistema aberto em que apenas algumas informações estão disponíveis. Inicialmente o jogo ou o desafio tem uma ausência de informações e somente a partir das primeiras propostas, aparecem muitas possibilidades e ao longo da partida as possibilidades vão sendo eliminadas. Para Macedo (2009, p.62), ao se deparar com as muitas possibilidades do jogo o estudante vai "[...] retirar e organizar esse conhecimento em sucessivos patamares, com base em uma experiência vivida, são ações ou operações necessárias. Sem elas, pode-se ter experiência, mas não se terá aprendizagem".

Outro importante fator nas situações de jogos e desafios é a necessidade da cooperação. Um dos estudantes depende de informações que só o desafiante tem e este deve fornecer a informação correta, assim o estudante é obrigado a considerar as jogadas, levar em conta a informação presente e aquilo que está ausente e construir estratégias que lhe permitam jogar bem. Para Macedo, Petty e Passos (2000), no jogo pode ser promovida também a tomada de consciência.

O papel do jogo como estratégia de ensino aprendizagem da matemática tem sido apresentado em inúmeras pesquisas: Kamii (2002, 2008, 2013),

ISSN: 1984-1655

Brenelli (2001), Macedo, Petty e Passos (2000), Smole et.al. (2008) Strapason e Bisognin (2013), Mantovani de Assis (2013, 2015), Zaia (2014) Carvalho e Oliveira (2014), Piaget (2013), entre outros.

Esses pesquisadores têm proposto o ensino de matemática nas salas de aula, utilizando jogos, desafios ou linguagens diferenciadas das práticas tradicionais, uma vez que os jogos propiciam aprendizagens motivadoras e interessantes.

Objetivos

Investigar os procedimentos adotados pelos estudantes no jogo *SEMPRE 12* e identificar como eles constroem as operações aritméticas de adição, subtração e multiplicação impostas nas situações do jogo;

Considerar as possibilidades do jogo *SEMPRE 12* em promover abstrações reflexionantes no emprego de operações aritméticas.

Método

Esse estudo é de natureza qualitativa na modalidade interventiva e descritiva. Segundo Gil (2008), as pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno e sua análise deve ser feita de modo a respeitar a forma original dos registros.

Para as situações experimentais, durante a intervenção, foi utilizado o método clínico, também conhecido como método crítico. O método clínico consiste um uma intervenção sistemática do pesquisador em função do que a criança vai dizendo ou fazendo. Constitui-se em estabelecer um diálogo utilizando situações experimentais propostas pelo pesquisador, visando explorar os raciocínios das crianças. Piaget (1981, p. 176), disse que se trata de um método misto, porque faz uso da observação, da experimentação "[...] ele conserva, assim, todas as vantagens de uma conversação adaptada a cada estudante e destinada a permitir-lhe o máximo possível de tomada de consciência e de formulação de suas próprias atitudes mentais".

O objeto de estudo dessa investigação foi a intervenção pedagógica com estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental de escola municipal localizada na periferia de São Paulo. Para a constituição da amostra, foi solicitado aos professores de duas turmas de 4º ano que indicassem estudantes com dificuldades de aprendizagem na disciplina de matemática, ou seja, estudantes que, na avaliação de seus professores, não acompanham satisfatoriamente o processo de aprendizagem de matemática e, por essa razão, são encaminhados ao reforço escolar. Esse foi o critério de escolha dos estudantes. Foram 13 estudantes do 4o ano, sendo 9 do sexo masculino e 4 do sexo feminino, somente 1 dos estudantes com idade de 10 anos, os demais com 9. Nenhum dos estudantes havia sido reprovado nos anos anteriores.

Foram 13 encontros semanais com 1:30h de duração. Esses encontros foram em forma de oficina. Para a realização das oficinas, a escola disponibilizou uma sala pequena de apoio. O trabalho aconteceu em pequenos grupos de dois a três estudantes.

Inicialmente, criou-se um ambiente de acolhimento, os estudantes faziam a exploração do material e as situações problemas que envolviam o jogo. Após a partida, procedia-se ao registro dos pontos obtidos. Quanto ao registro, o estudante era estimulado a usar o procedimento que lhe parecesse melhor para descobrir quantos pontos havia feito no jogo.

Para a posterior análise dos dados, foi feito registro em áudio e fotografia com a prévia autorização dos pais e da escola. Após cada intervenção, foi feito um relatório detalhado da intervenção em forma de diário de campo. As-

ISSN: 1984-1655

sume-se como pressuposto que a documentação é fundamental no processo de obtenção e análise de dados, pois permite a sistematização das informações.

Dentre os jogos utilizados na intervenção, descreve-se o jogo conhecido pelo nome de *SEMPRE 12*. Esse jogo é de autoria de Constance Kamii e pode ser encontrado no livro Desvendando Aritmética do ano de 1995. Foi modificado para essa intervenção pelas pesquisadoras. Esse é um tipo de jogo que permite identificar o pensamento em construção. Ao observar e analisar os procedimentos adotados pelos jogadores no jogo *SEMPRE 12* é possível identificar como os estudantes constroem as operações de adição, subtração e multiplicação impostas nas situações do jogo.

O jogo *SEMPRE 12* dispõe de 72 cartas contendo algarismos de 0 a 6 nas seguintes quantidades: 0: 8 cartas; 1: 10 cartas; 2: 12 cartas; 3: 14 cartas; 4: 12 cartas; 5: 8 cartas e 6: 8 cartas e um tabuleiro dividido em quatro partes. O objetivo do jogo é fazer um total de 12 com quatro cartas. Todas as cartas são embaralhadas, viradas para baixo, e cada jogador pega três cartas. Quando chega a sua vez, o jogador coloca uma das cartas de sua mão sobre a mesa e retira uma nova carta do monte, de forma a ficar sempre com três nas mãos. A pessoa que faz um total de 12 com quatro cartas vence a rodada.

Outra opção de jogo é utilizar um tabuleiro dividido em quatro setores iguais. Todas as cartas são embaralhadas viradas para baixo dentro de uma caixa, e cada jogador pega três cartas para si. Cada jogador, na sua vez, coloca uma de suas cartas em um dos setores e pega uma nova do monte para continuar com três cartas na mão. Setores vazios devem ser preenchidos antes de se colocar uma carta sobre qualquer outra. Aquele que conseguir fazer 12 com 4 cartas pega-as para si. Como exemplificado nas figuras a seguir: na figura "1a" e “1b” o que conseguiu formar o 12 pega as quatro cartas. Na figura “1d” for-

ISSN: 1984-1655

mou-se 12 com três cartas, o próximo jogador poderá jogar o 0 e pegar as cartas para si. Na figura "1c" se o próximo jogador só tiver 5, será forçado a totalizar 17 e o próximo poderá cobrir o 6 com um 1, fazendo 12 e levando as quatro cartas para si. O 6 que está embaixo do 1 deve ficar na mesa para as próximas jogadas, bem como outras cartas que tenham ficado embaixo. Quem consegue mais cartas é o vencedor.

Figura 1: jogo *SEMPRE 12*

a)

2	3
1	6

b)

2	4
1	5

c)

2	4
6	5

d)

2	4
6	0

Fonte: organizado pelas pesquisadoras.

Após cada jogada, os estudantes registram e totalizam os pontos pra saber quem ganhou a partida.

Resultados e discussão

O jogo *SEMPRE 12* permite ao aluno somar 12 com quatro cartas incluindo o zero, possibilita a realização de adições com unidades e dezenas simultaneamente, favorecendo a construção do valor posicional, a construção de uma rede numérica envolvendo números de 1 a 12 e as operações de adição, e subtração com quatro números. Permite a percepção do todo e das partes simultaneamente (o total de 12 e os números que perfazem o 12). Ao concluir as

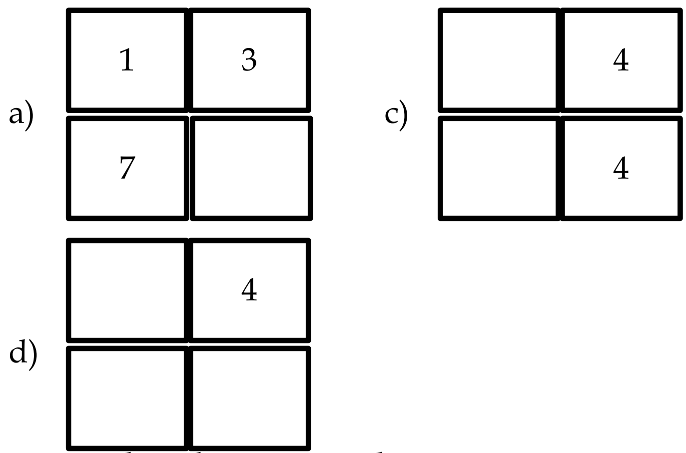
ISSN: 1984-1655

jogadas, ou seja, quando acabarem as cartas, o estudante faz a totalização dos pontos que acumulou durante a partida. Para calcular o total de pontos ele utiliza o registro que achar apropriado, desde a contagem de um em um numa relação termo a termo ou recorrer à adição ou multiplicação.

A seguir, descreve-se partida com um grupo de quatro estudantes. Para evitar identificação serão utilizadas como referência somente as letras iniciais de seus nomes: "F", "D", "B" e "I". Os trechos destacados em negrito ao longo do texto representam parte das falas dos estudantes que participaram da intervenção e em itálico das pesquisadoras.

Surgiu a seguinte configuração nos tabuleiros:

Figura 2 - setores na primeira partida do jogo SEMPRE 12.



Fonte: organizado pelas pesquisadoras.

Foi formulada a seguinte questão para o estudante "B": "*no primeiro setor quanto eu preciso para formar o 12?*" O estudante contou com dificuldade e respondeu: **"tem 11"**. "*Então quanto você precisa para chegar aos 12*"*?* Pensa algum tempo e responde: **"1"**. Confirmo a resposta com os outros estudantes, estes conseguiram com mais rapidez. Todos utilizaram como recurso contar nos dedos para ter certeza que faltava somente um. Nenhum dos estudantes conseguiu chegar ao total de 12 sem recorrer a marcas de contagem, palitos ou os dedos e com o predomínio da adição. Nenhum deles recorreu a subtração, por exemplo, 12 – 4 = 8 (figura 2b) então preciso de 8 para chegar ao 12, ou 12 -1 = 11 (figura 2c), etc.

Piaget (1995, p.43), afirma que: "Não obstante a aprendizagem escolar das operações aritméticas, o estudante em geral, somente consegue com bastante lentidão assimilar as relações de inversão que caracterizam a adição e a subtração".

Kamii (2008), enfatiza que um dos melhores caminhos para chegar à subtração é compreender claramente a adição.

> A subtração é um desenvolvimento secundário que surge após a adição. [...] aumentar a fluência na subtração é reforçar o conhecimento da adição. [...] as diferenças devem aparecer após as somas, pois os estudantes produzem diferenças pela dedução de seu conhecimento da soma (p.70).

Quando um dos estudantes conseguia fazer o agrupamento de 12, recolhia as fichas, era orientado a reservar as mesmas no agrupamento de 12 para facilitar a totalização dos pontos. Eles deveriam conferir se em cada grupo de cartas existia de fato o total de 12.

Foi entregue a cada aluno uma folha de papel para que registrassem o nome e os pontos que acumulou no jogo:

“B” conseguiu 24 pontos;

“I” fez 36 pontos;

"F" fez 84 pontos;

"D" fez 48 pontos.

ISSN: 1984-1655

O estudante "D" foi o primeiro a concluir a totalização dos pontos e disse: **"fiz 40 pontos."** "*Como você fez para descobrir?*" **"Contei de 10 em 10."** "*Mas aí são montinhos de 12.*" **"Ah então é 44."** "*Como você descobriu que é 44?*" **"Porque eu fiz assim: 10 + 10 + 10 + 10 então deu 40, mais 1 de cada dá 44"**. Nesse momento, o estudante "F" intervém e diz: **"mas você poderia contar 1 + 1 + 1 + 1 + 1... até o 44."** "*Tem certeza que é 44? Que tipo de cálculo você fez para chegar a esse número?*" "I" responde: **"é 48"**. "*Como você sab*e?" **"Porque não sobra 1, sobram 2 de cada um deles."** "D" com cara de espanto diz: **"é isso mesmo, professora, dá 48 mesmo e não 44."** Foi o princípio da tomada de consciência de "D" a partir da observação do colega. Reafirmou: **"É sim porque é 12 + 12 + 12 + 12 então sobram 2 em cada."** Nenhum dos estudantes refere-se à possibilidade de multiplicar 4 X 12, recorrem somente a adição. O estudante mediante o contra-argumento do colega já considerou 10+2 e somou 12+12+12+12 e acrescentou 2 para chegar ao resultado final. Foi capaz de coordenar mentalmente as suas ações e reorganizou as informações de soma: 10+10+10+10 sobre um patamar superior: 12+12+12+12, atribuindo um novo significado, o que caracteriza a reflexão um dos aspectos da abstração reflexionante.

Nesse contexto, a interação social foi fundamental para a compreensão de "D".

Kamii (2008), ao mencionar a questão da interação social, afirma que:

> O confronto de pontos de vista é indispensável na infância para a elaboração do pensamento lógico, e tais confrontos se tornam cada vez mais importantes para a elaboração das ciências por parte dos adultos. Sem a diversidade das teorias e a busca constante de ir além das contradições entre elas, o progresso científico não teria sido possível (p.41-42).

A contribuição dos colegas foi muito importante para a tomada de consciência de "D", contudo a compreensão do processo foi um processo individual. Mantovani de Assis (2013, p. 41), afirma que:

> [...] cada pessoa por si própria constrói o conhecimento. Vale dizer que o conhecimento é fruto de uma construção pessoal. [...] é imprescindível que o professor organize atividades adequadas, que embora seja influenciada pela experiência adquirida e pelas interações sociais, resulta de um processo interno de pensamento no decorrer do qual o sujeito coordena diferentes noções entre si atribuindo-lhes um significado, organizando-as e relacionando-as com outras anteriores.

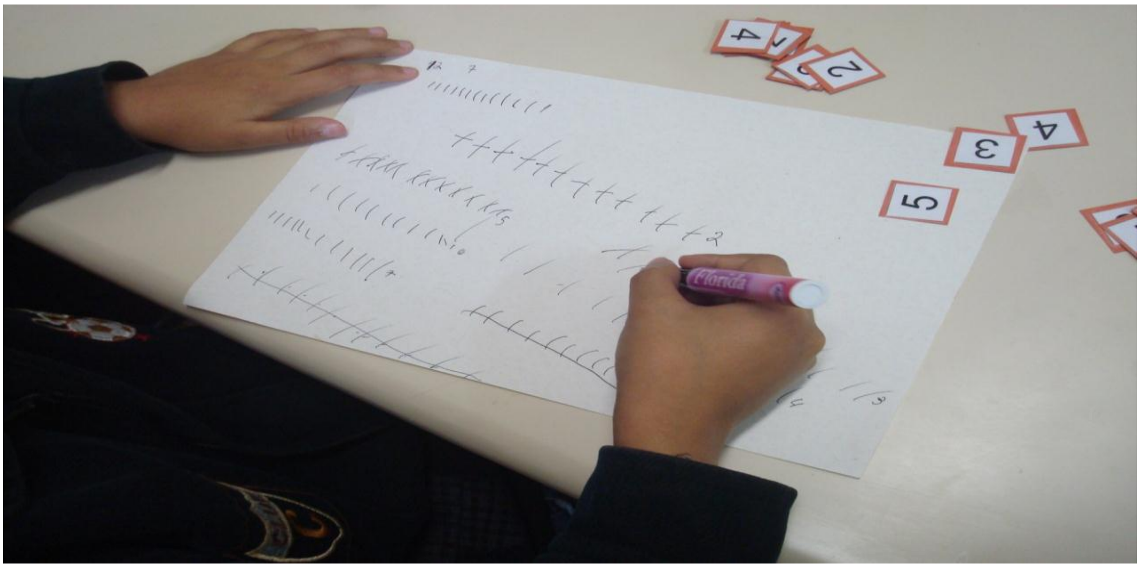
Retomando o resultado com outro estudante. "*E você, "I", quantos pontos fez?*" **"36."** "*Como você sabe que fez 36 pontos?*" **"Eu somei 12 + 12 + 12."** "*Existe outro jeito de você descobrir que não seja esse?*" **"Pode somar de 1 em 1 até chegar ao 36?"** "*E outro jeito?*" **"Não sei".**

Nenhum dos estudantes conseguiu perceber a multiplicação como alternativa para chegar ao resultado. O pensamento ainda estava centrado na relação termo a termo. Mas foi verificada a presença de agrupamentos para chegar ao resultado. O aluno que será descrito a seguir é o "F". Esse aluno juntou o maior número de pontos: 84, mas teve muita dificuldade de chegar ao resultado final. Conferiu todos os montinhos de 12. Após foi contando com os dedos e respondeu: **"professora dá 80 pontos."** (Como foi contando nos dedos de um em um, por ensaio e erro, chegou ao número aproximado) "*Como você descobriu?*" **"Contando".**

"*Então escreve no papel o que você fez para descobrir que dava 80*". Pega o papel e começa a riscar e foi ajudado pelo colega "I". Primeiro, no canto da folha, ele colocou os números 7 e 12 separados, mas não se referiu a nenhuma operação.

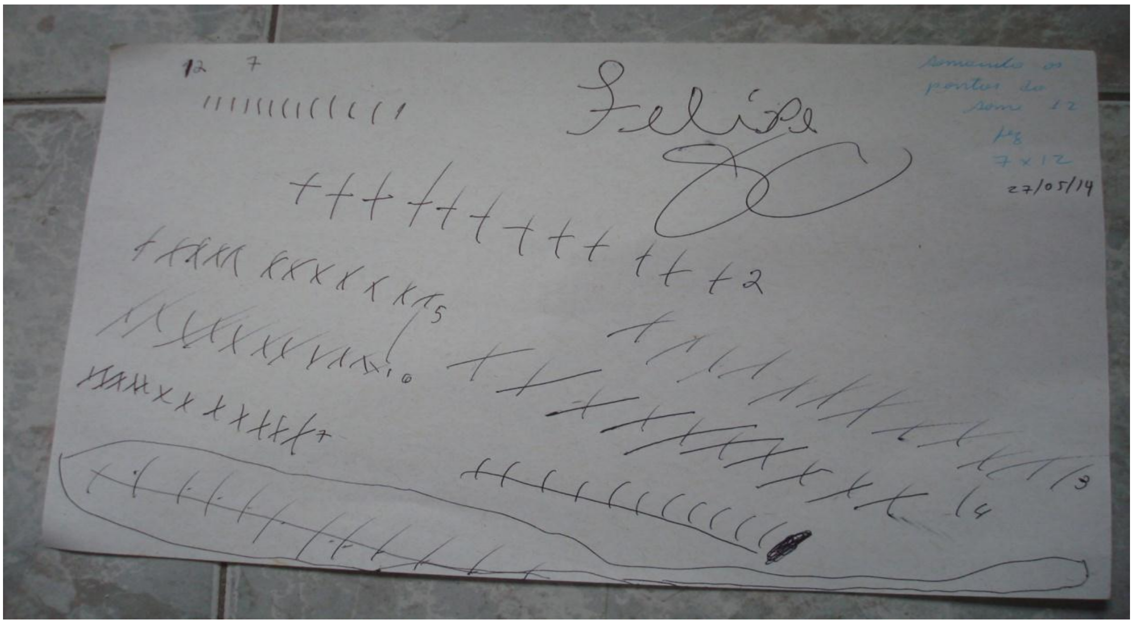
Com a caneta foi fazendo marcas de contagem (figura 3), o colega o auxiliou dizendo: **"já passou, cara, risca aí o que está sobrando"**. O estudante fez 9 agrupamentos de 12 com as marcas de contagem. Diante da observação do colega, ele riscou dois grupos e colocou o número de 1 a 7 na frente dos riscos. Quando terminou de marcar voltou ao início da folha e foi fazendo uma cruz em cada marca de contagem e baixinho ia contando de um em um. À medida que contava, todos os colegas pararam e começaram a contar junto. Contou de 1 a 84, então disse: **"dá 84, professora"**. "*Existe outra forma de você descobrir, sem usar esses risquinhos?*" **"Tem, mas dá muito trabalho."** "*E se fizéssemos como fez o "I" somando de 12 em 12?*" **"Daria também."** Não soube fazer e mostrou desinteresse em descobrir outras formas. A figura 3 e 4 refere-se à primeira intervenção com esse estudante.

Figura 3 - Calculando pontos do jogo com auxílio de marcas de contagem para o resultado de 7 X 12.



Fonte: acervo das pesquisadoras.

Figura 4: calculando com marcas de contagem o resultado do jogo SEMPRE 12



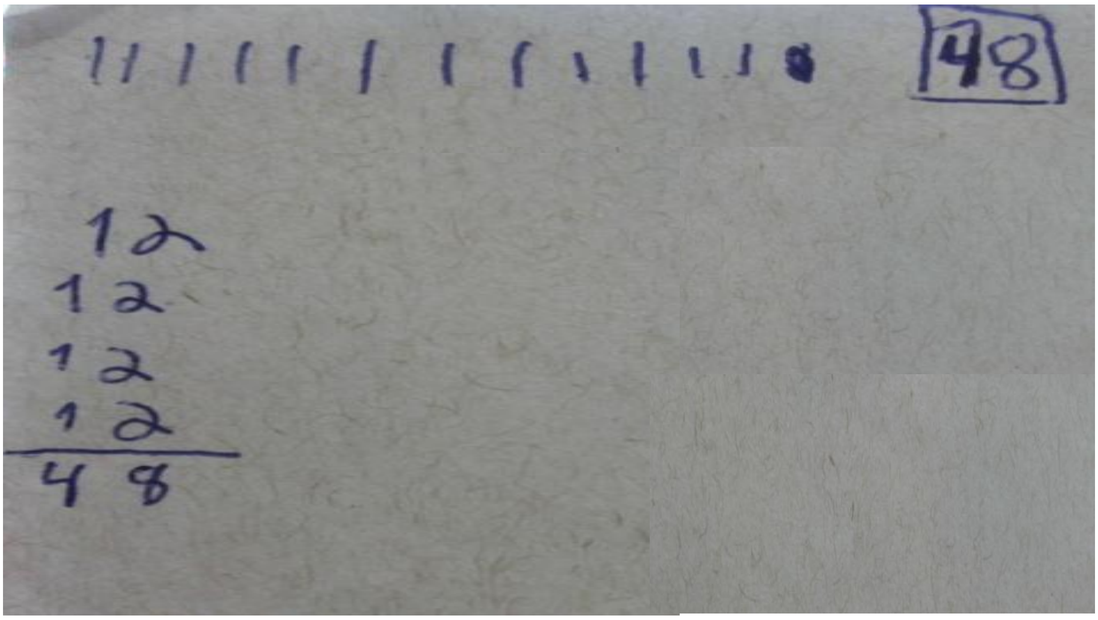
Fonte: acervo das pesquisadoras

Embora o estudante "F" esteja no 4º ano, não conseguiu ainda desvencilhar-se de procedimentos empíricos, só percebe a relação termo a termo. Transforma todos os números em unidades, para facilitar a contagem. "F" está evoluindo, embora não compreenda os processos implícitos, mas já faz inferências da possibilidade de operar por procedimentos aditivos.

A figura 5 mostra a evolução do aluno "F" numa intervenção posterior com o mesmo jogo *SEMPRE 12* e a verificação dos pontos. Ele ainda utiliza as marcas de contagem como referência, mas já faz uso do processo aditivo, conta nos dedos e chega ao resultado correto.

ISSN: 1984-1655

Figura 5 - calculando os pontos do jogo SEMPRE 12



Fonte: acervo das pesquisadoras

O aluno "F" estava somando os pontos com os dedos: "F", "*como você está fazendo?*" **"Somando todas as fichas."** "*Por que você colocou essas marcas aqui?*" (Na parte de cima da folha) **"Coloquei o 12 para ver se estava certo, para conferir. Eu sabia que era 12. Então eu peguei os 12 palitinhos e fui somando nos dedos, 12 + 5 + 6 + 3 ... até chegar ao 48."** "*Existe outro jeito de chegar ao mesmo resultado que não fosse esse?*" **"Contando ou somando."** E registrou o 12 + 12 + 12 + 12 no papel.

Foi uma significativa evolução. Ainda faz uso de marcas de contagem, e até conta nos dedos, mas vai além ao estabelecer ações mentais (por abstração reflexionante) como a soma de 12 + 12 + 12 + 12 = 48 conforme a figura 5. Em intervenções anteriores ele só conseguia chegar ao resultado fazendo e contando as marcas de contagem, que de certa forma é o seu jeito próprio de chegar ao resultado, mas já evoluiu para procedimentos mais requintados e complexos.

Ao contar nos dedos ou utilizar as marcas de contagem é possível identificar a presença da abstração pseudo-empírica conforme descrita por Piaget (1995), Macedo (2009) e Becker (2014), contudo "F" faz uma reflexão ao reorganizar a relação termo a termo no processo aditivo, para esse estudante surge algo novo, uma nova forma em relação aos conteúdos já assimilados, é algo que não existia anteriormente, o que implica uma nova organização.

Em outra intervenção, três estudantes foram convidados a participar (G, J, e JV). Verificou-se que os estudantes estavam começando a migrar das relações termo a termo, para a construção do processo aditivo e começando a somar por agrupamentos. Esses estudantes, nas primeiras intervenções, só conseguiam fazer as somas se utilizassem os palitos. Contudo, ainda apresentam dificuldade em somas simples, como por exemplo, saber que para fechar o 12 ele precisa somente de 1 ou 2 ou 3, embora sejam números pequenos, também não percebem as estratégias de jogo.

Num dos setores do tabuleiro tem 5 + 2 + 2. Perguntou-se a G: "*para chegar ao 12 que número você precisa ter?*" Como ele não consegue realizar o cálculo com os dedos recorre aos palitos. Junta 12 palitos retira 5, 2 e 2 e verifica que sobrou 3. Utilizou a adição para chegar à multiplicação.

O aluno “G” tem fichas com os números 4, 3 e 0 e em um dos setores tem 8. *“G é a sua vez de jogar. Para fechar esse setor com 12, você precisa de quanto?"* Pensa, olha para as cartas na mesa e para suas cartas, conta e reconta nos dedos e responde: **"preciso de 4 e eu tenho 4."** Fica exultante com a descoberta. Ele percebeu o todo e as partes simultaneamente retornou mentalmente ao ponto de partida calculando 12 – 8 = 4 para chegar a operação inversa 8 + 4 = 12, ou seja, o seu pensamento já é reversível. Percebe uma transformação como parte

ISSN: 1984-1655

de um sistema de transformações possíveis, relacionada com uma transformação potencial que a anula.

Inicialmente ele só conseguia transformar tudo em unidade, agora já utiliza a operação de adição e subtração simultaneamente. "G" retira as informações da relação e reorganiza em outro patamar quando soma 8 + 4 e quando subtrai 12 - 8. Para esse aluno foi uma descoberta nova. A intervenção da pesquisadora foi suficiente para garantir um retorno à situação inicial e provocar a tomada de consciência do estudante para perceber a relação entre a operação e suas partes. O tipo de conhecimento manifestado por "G" é conhecimento lógico matemático que ele realizou por abstração reflexionante. A ação inicial de somar os pontos e a coordenação mental dessas ações ao realizar o cálculo de 12 - 8 e inferir que precisava de 4 para fechar o total de 12 permite identificar a presença do processo de tomada de consciência.

Nesse caso do estudante "G" verifica-se que a partir do diálogo com a pesquisadora ele antecipou os resultados por meio de cálculo mental apropriando-se da reversibilidade de pensamento. Mantovani de Assis (2015) a partir da perspectiva piagetiana afirma que a reversibilidade de pensamento permite o retorno ao ponto de partida, não por uma nova ação, mas sim através de uma ação mental.

Ao realizar o cálculo dos pontos obtidos, a maioria dos estudantes preferiu recorrer aos dedos, contando a partir de 12, por exemplo: 12 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +1 + 1 + 1 + 1 = 24 e continuavam contando: 24 + 1 + 1 + 1 e assim sucessivamente. À medida que iam jogando, foram aperfeiçoando os procedimentos e utilizando formas mais sofisticadas, como é o exemplo de "J".

"J quantos pontos fez?" Ele inicialmente disse que tinha feito 63 pontos. "*Você tem certeza?*" **"Não sei. Acho que tem mais que isso."** "*Como você pode*

fazer para ter certeza?" Pegou o papel e anotou 10 + 10 + 10 e escreveu embaixo 36. "*Mas você escreveu aí 36? 10 + 10 + 10 dá 36?*" **"Eu tirei o 2, separei, então aqui é 36 e não 30, porque sobraram 2 em cada um."** Anotou o 36 no canto da folha, separou empiricamente os grupos de 12 dos pontos do jogo e disse: **"aqui tem 36 e aqui tem mais 36"**, anotou e somou na folha. Disse que daria 62, registrou o 6 + 6 mencionou que deu 12, mas não levou o 1 do algoritmo e somou o 3 + 3 dando o resultado de 62, colocou o 62 em outra coluna acrescentou o outro grupo que havia sobrado e chegou ao total de 74.

Pedi aos demais que ajudassem a conferir se esse era o resultado final. "G" e "J" somaram 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 e disseram: **"deu 70"** e "J" disse: **"mas tem o 2 de cada um que não somamos"** e juntos chegaram à conclusão de que dava 84 e não 74. Em nenhum momento os estudantes pensaram no algoritmo, é como se não existisse. Vibraram quando chegaram ao resultado final. Nos procedimentos utilizados pelos estudantes é possível identificar a abstração reflexionante. Eles que inicialmente só conseguiam somar com a ajuda de palitos, e de um em um, nessa situação fizeram agrupamentos de 10 e de 2 para chegar ao resultado final por coordenação das ações mentalmente. Outro fator importante foi a interação social permitindo a tomada de consciência.

Kamii (2008, p. 81), afirma:

> Em vez de dizer "certo" ou "errado", o que devemos fazer é encorajar o intercâmbio por meio de perguntas: "todos concordam"? A troca de pontos de vista entre os estudantes é muito importante [...] [...] a matemática não se desenvolveu historicamente por meio do destaque conferido a uma autoridade superior. Toda invenção foi mantida ou rejeitada pelo debate entre as partes.

Identificou-se que embora o estudante "JV" já consiga fazer a soma por pequenos agrupamentos, recorre regularmente aos dedos e em alguns casos

ISSN: 1984-1655

até aos palitos. Nas ações de JV o objeto é modificado pelas suas ações e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações, o que indica a abstração pseudo-empírica.

O registro descrito na figura 6 permite identificar o raciocínio de agrupamento do aluno "G". Ele agrupa o 7 x 12 relaciona o número 12, 7 vezes e registra no final da relação o número de vezes que representa e vai assinalando os números 2, que sobraram à direita. Ele se vale da abstração reflexionante ao estabelecer as relações entre o 7 e 12, quando soma 10 + 10 + 10 + 10 + 10 +10 + 10 e depois estabelece a relação entre a diferença de 10 e 12. Após somar 7 x 10 ele soma + 4, 8, 12, 14 e vai mencionando os números. Ainda não houve tomada de consciência do processo multiplicativo. Em nenhum momento “G” se refere à multiplicação, seja de 7 x 2 ou 7 X 10 ou 7 X 12. Todo seu raciocínio está concentrado a partir da adição. Ao realizar a operação de 7 X 12, “G” soma com os dedos e ao mesmo tempo tem o procedimento empírico de separar os grupos de 12 para se certificar que está fazendo correto.

Kamii (2008, p. 65), afirma que:

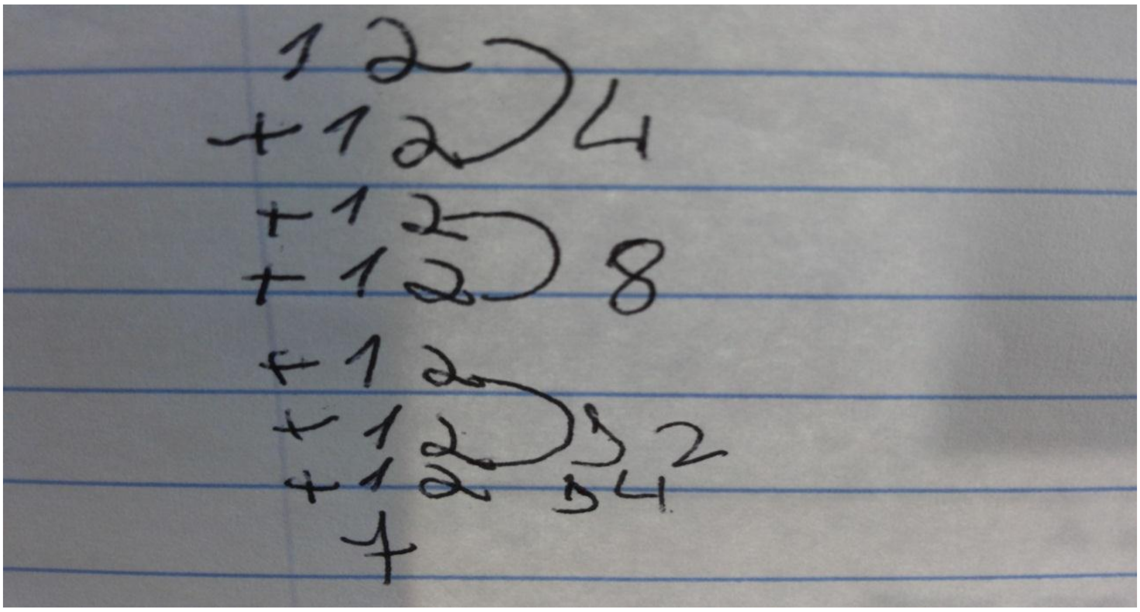
> A estrutura repetida, tal como 5 + 5 + 5 + 5, é simples, pois envolve apenas unidades em um nível de abstração. A multiplicação do tipo 4 X 5 envolve a estrutura hierárquica, o "4" no 4 X 5 refere-se a "4 cincos". Para ler "4 X 5" corretamente, o estudante tem de conseguir transformar "5 unidades" em "um cinco", que é uma unidade de ordem maior. Em outras palavras, em "4 X 5", o "4" não é o mesmo tipo de número que "5".

Na investigação descrita, verificou-se a dificuldade que os estudantes apresentavam em compreender as relações multiplicativas. Somente após sucessivas tomadas de consciência, a partir dos jogos e desafios, estes conseguiram perceber essas relações. Nesse jogo o estudante "G" saiu da abstração empírica e chegou a abstração refletida com relação a adição, contudo, não houve a tomada de consciência para a operação de multiplicação. Piaget (1995, p. 41),

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

afirma que "[...] através do jogo das abstrações reflexionantes vai-se construir a multiplicação a partir da adição".

Figura 6 - registro de 7 X 12 do aluno "G"



Fonte: acervo das pesquisadoras

O estudante "J" juntou todos os grupos de 12 que tinha e foi somando nos dedos. Somava 12 + 3 + 5 + 4 + 10 e assim sucessivamente. Chegou a 116 e falou: **"professora, fiz 116 pontos."** "*Como você fez para chegar a esse número?*" **"Eu fui somando todos os números."** "*Quantos grupos de 12 você fez?*" **"Não sei, eu juntei todos."** "*Precisa separar novamente?*" **"Não".**

"*Mas existe um jeito de descobrir com esse número que você encontrou?*" **"Só se eu tirar 12 de 116 até o fim, ou então juntar de 10 em 10 e somar os que restaram, ou então separa em 4 + 3 + 1 + 2 dá 10 e separa os outros 2."** (considera a possibilidade da adição) "*Pense no que fazer para descobrir quantos montinhos tem?*" **"Conta de Menos?"** "*Não sei.*" **"Não é conta de dividir, em cada 116 eu ia tirar 12, e 12 até terminar."** (percebe a transformação em dois sentidos

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

como partes complementares) "*E como que faz isso?*" **"Eu pego 116 tiro 12."** Começou a fazer a conta nos dedos, mas teve dificuldade. "*Tem outro jeito de fazer?*" **"Tem, mas eu não sei fazer".** "J" considera a possibilidade da adição, subtração, multiplicação e divisão, o que denota que ela criou uma novidade a partir de conhecimentos anteriores.

Mesmo com procedimentos empíricos já é possível identificar o início de tomada de consciência de outras possibilidades de compensação. Começa a estabelecer relação entre dividir e subtrair por abstração reflexionante. Chega a mencionar a divisão, mas não tem consciência do que fazer para chegar a esse procedimento. Em nenhum momento, pensou na possibilidade de dividir 116 por 12, contudo percebeu que se colocasse 116 e fosse retirando por subtração poderia chegar ao 12. "J" tem consciência da existência da divisão e da subtração, mas ainda não sabe operar, utiliza a adição como referência para todos os cálculos e mesmo mencionando a subtração, apresentou muita dificuldade de subtrair 12 a partir de 116. "J" tem a atenção voltada tanto para as transformações quanto para os estados e com a coordenação das ações reversíveis. O tipo de abstração que "J" fez é reflexionante, porque mesmo sob suas formas bem elementares, este tipo de abstração não é resultado de apenas ouvir falar. O estudante tornou-se capaz de perceber uma transformação no caso 116-12 como parte de um sistema de transformações possíveis, relacionada com uma transformação potencial que a anula. A reversibilidade permitiu o estudante compreender as conservações de quantidades contínuas e descontínuas. Investiu o raciocínio de lógica, possibilitando a reversibilidade por negação (classificação) e a reversibilidade por reciprocidade (seriação).

O estudante "J" abstraiu a partir da totalização de pontos, mas ainda não houve tomada de consciência completa do processo. As situações do jogo *SEMPRE 12* poderá levá-lo a tomar consciência do que faz e assim passar da

ISSN: 1984-1655

fase do fazer para o compreender, da ação para a representação. O estudante "J" reorganizou num patamar superior o que já sabia das operações. Nas respostas de "J" verificamos os dois aspectos da abstração reflexionante conforme descrita por Piaget (1995) e Becker (2014) a reflexão e o reflexionamento. Da ação de contar nos dedos ou nos palitos "J" evoluiu para a representação mental das operações.

A reversibilidade conforme descrita pela Psicologia Genética aparece como uma propriedade das ações do sujeito, que agora podem ser exercidas em pensamento, confere à inteligência a possibilidade de raciocinar, não somente sobre os estados, mas sobre as transformações sucessivas que conduzem de uma configuração a outra. O estudante torna-se capaz de estabelecer relações mais objetivas entre os fenômenos.

É graças à reversibilidade completa que o sujeito poderá antecipar as perturbações e compensá-las mentalmente sem que seja necessário executar a ação materialmente para verificar os resultados, e é este aspecto de autocorreção mental que constitui a lógica das operações. Contudo o estudante "J" ainda não tem essa reversibilidade completa, característica do pensamento formal, mas já pode ser identificada como a possibilidade de considerar uma ação ou transformação em seus dois sentidos como partes complementares, já visualiza a possibilidade da adição e subtração e da divisão e multiplicação. Ao final das intervenções “J” já operava fluentemente com essas quatro operações por cálculo mental. Teve uma significativa evolução.

Considerações finais

Quando joga, o estudante é impelido a considerar não apenas as jogadas efetivamente realizadas, mas também aquelas que poderia fazer e que também são válidas. É comum a partir das primeiras jogadas o estudante compreender as relações em jogo. Ocorrem ainda situações que requerem regulação, o estudante é compelido a modificar ou manter a conduta em função dos resultados obtidos. Todo esse processo vai paulatinamente consolidando o conhecimento lógico-matemático, que não pode ser transmitido e requer um processo de construção individual e ao mesmo tempo em interação com o outro e com o meio circundante.

Kamii (2002, 2008, 2010, 2013), Brenelli (2001), Macedo, Petty e Passos (2000, 2001, 2009), Smole et.al. (2008) Strapason e Bisognin (2013), Mantovani de Assis (2010, 2013, 2015), Zaia (2010, 2014), Carvalho e Oliveira (2014), Piaget (2013), Macedo (2005), são unânimes em afirmar que os jogos favorecem as percepções, a inteligência, criatividade, espontaneidade, as relações sociais, entre outros.

O registro e a observação das condutas dos estudantes durante as intervenções com o jogo *SEMPRE 12* tornaram possível identificar a presença de técnicas baseadas na memorização, dificuldades de antecipação, ausência do cálculo mental e os mecanismos de compensação dos estudantes. Métodos de ensino, baseados na memorização e na reprodução mecânica, não permitem um processo de aprendizagem considerando os processos de construção do conhecimento e nem a coordenação das ações mentais por meio da abstração reflexionante.

O jogo *SEMPRE 12* proposto nessa investigação/intervenção possibilitou o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e a construção das estruturas da inteligência. Permitiu às crianças confrontarem o próprio pensamento, a tomada de consciência e a passagem da ação à operação num processo de abstração reflexionante.

ISSN: 1984-1655

A utilização do jogo *SEMPRE 12* como meio de intervenção permitiu aos estudantes criar formas próprias de registro, descobrindo possibilidades e estabelecendo novas relações. Nas muitas formas de calcular e registrar os pontos ganhos no jogo os estudantes tiveram a atenção voltada tanto para as transformações, quanto para os estados e com a coordenação das ações reversíveis. As situações de jogo permitiram ainda aos estudantes articular as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão de forma agradável e prazerosa.

A intervenção realizada com o jogo *SEMPRE 12* aponta para o fato de que o jogo é uma boa alternativa à compreensão das operações aritméticas, ao permitir a construção da reversibilidade de pensamento e os processos de abstração e abre uma discussão para o papel dos jogos usados no processo interventivo para a aprendizagem matemática nas escolas de Ensino Fundamental.

Os jogos, desafios e situações-problemas contribuem para o aprendizado dos estudantes, porém é fundamental salientar que o desenvolvimento e a aprendizagem não estão no jogo em si, mas no que é desencadeado a partir das intervenções e dos desafios propostos aos estudantes. O jogo, por si só, não garante o desenvolvimento, embora seja um importante instrumento que convida a pensar. É necessário que o educador sempre apresente novos obstáculos a serem superados a partir do que o estudante já sabe, as suas reais dificuldades, sem abandonar o aluno à sua própria sorte e à sua aprendizagem espontânea.

Referências

BECKER, Fernando. A epistemologia do professor de matemática. Rio de Janeiro: vozes 2012.

BECKER, Fernando. Educação e construção do conhecimento. Porto Alegre: Editora ArtMed. 2001.

BECKER, Fernando. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. Revista scheme. Volume 6 Número Especial – Novembro/2014.

BRENELLI, Rosely Palermo. Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem. Tese de Doutorado. UNICAMP, Faculdade de Educação, Campinas SP, 1993.

BRENELLI, Rosely Palermo. Espaço lúdico e diagnóstico em dificuldades de aprendizagem: contribuição do jogo de regras. In: SISTO, F.F. (org.). Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico. Rio de Janeiro: Vozes, 2001. p.167-189.

CARVALHO, Luciana. R. R.; OLIVEIRA, Francismara Neves. Quando o jogo na escola é bem mais que jogo: possibilidades de intervenção pedagógica no jogo de regras. Set Game. Brasília. Revista brasileira Estudos Pedagógicos. Volume 95- n. 240- p. 431-455- Brasília, maio/ago. 2014.

GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4a. edição. São Paulo. Editora Atlas. 2008.

KAMII, Constance. Crianças pequenas reinventam a aritmética. 2ª edição. Porto Alegre, Editora ArtMed. 2002.

KAMII, Constance. JOSEPH, Linda Leslie. Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética: Editora Artmed. 2008.

KAMII, Constance. Os efeitos nocivos do ensino precoce dos algoritmos. In: MANTOVANI DE ASSIS (org.) Jogar e aprender matemática. 3ª edição. Editora da Unicamp. 2013.

MACEDO, Lino. Aprender com jogos e situações problemas. Editora ArtMed. 2000.

MACEDO, Lino; P, Ana L.P; p, Nerimar C.. Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar. Porto Alegre – RS: Artmed. 2005.

MACEDO, Lino. Jogos, psicologia e educação. Editora Casa do psicólogo. 2009.

MANTOVANI DE ASSIS, Orly. Zucatto. Proepre fundamentos teóricos. Editora da FE/Unicamp. 2010

MANTOVANI DE ASSIS, Orly Zucatto. Proepre fundamentos teóricos. São Paulo, Book Editora. 2013.

MANTOVANI DE ASSIS, Orly Zucatto. O papel da solicitação do meio no desenvolvimento da inteligência. in: (ORG) MOLINARI, Adriana et.al. Novos caminhos para ensinar e aprender matemática. São Paulo. Book Editora. 2015.

NUNES, Teresinha; CARRAHER, David, SCHLIEMANN. Ana Lucia. Na vida dez, na escola zero. 16a edição. São Paulo, Editora Cortez 2011.

PIAGET, Jean. A Gênese do número na criança. 3ª edição. Zahar Editores 1981.

PIAGET, Jean. Abstração reflexionante. Tradução Fernando Becker. Editora ArtMed. 1995.

PIAGET, Jean. Observações sobre a educação matemática. Tradução Carmen C. Scriptori. In (Org) MANTOVANI DE ASSIS, et. al. Educação Matemática: Uma contribuição para a formação continuada de professores. Book Editora. 2013.

SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. Dificuldades de aprendizagem e intervenção psicopedagógica. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SARAVALI, Eliane. GUIMARAES, Karina Perez. Dificuldades de aprendizagem e conhecimento: um olhar à luz da teoria piagetiana. Revista Olhar de professor, Ponta Grossa, 10(2): 117-139, 2007.

SMOLE, Katia. et al. Jogos de matemática: de 1º e 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008.

STRAPASON, Lisie. P. R. BISOGNIN, Eleni. Jogos pedagógicos para o ensino de funções no primeiro ano do ensino médio. Revista Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 579-595, ago. 2013.

SARAVALI, Eliane. GUIMARAES, Karina Perez. Dificuldades de aprendizagem e conhecimento: um olhar à luz da teoria piagetiana. Revista Olhar de professor, Ponta Grossa, 10(2): 117-139, 2007.

ZAIA, Lia, Leme. A solicitação do meio e a construção das estruturas operatórias em crianças com dificuldades de aprendizagem. Tese de doutorado. UNICAMP / FE, Campinas, 1996.

ZAIA. Lia, Leme. Jogar para desenvolver e construir conhecimento. In Jogar e aprender matemática. São Paulo, Book Editora. 2010.

ZAIA, Lia, Leme. A construção das relações espaciais: do jogo de exercício ao jogo de regras. In: (ORG) MOLINARI, Adriana. et. al. Aprender matemática e conquistar autonomia. Book Editora, 2014.