

A Teoria dos Campos Conceituais no Ensino de Números Irracionais: Implicações da Teoria Piagetiana no Ensino de Matemática

Clélia Maria Ignatius NOGUEIRA¹
Veridiana REZENDE²

Resumo

Os estudos de Piaget e colaboradores não tinham como objeto a construção do conhecimento escolar, nem a aprendizagem em seu sentido estrito, mas o processo de desenvolvimento cognitivo, buscando uma abordagem da inteligência em termos lógicos. No entanto, pressupostos piagetianos foram cruciais para a elaboração da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, que favorecem práticas de intervenção para a sala de aula. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar alguns desses pressupostos piagetianos que influenciaram a elaboração da teoria de Vergnaud, bem como as contribuições dessa teoria, particularmente no caso do conceito de número irracional, ao se elaborar atividades que proporcionem avanços na compreensão conceitual dos alunos, por meio de tentativas de desestabilização de invariantes operatórios, oportunizando momentos de aprendizagens aos sujeitos.

Palavras Chave: Ensino de Matemática, Epistemologia Genética, Teoria dos Campos Conceituais.

The theory of conceptual fields in teaching irrational numbers: implications of Piaget's theory in mathematics teaching

Abstract

Piaget's studies and his partners aimed neither the school knowledge nor the learning process in a strict sense. Their goal was the cognitive development process, aiming an intelligence approach in logical terms. Nevertheless, Piagetian assumptions were crucial for establishing the theory of conceptual fields of Gérard Vergnaud, which favors practices of intervention for the classroom. Thus, the aim of this work is to present some of these Piagetian assumptions which have influenced the creation of the Vergnaud's theory, as well as the contributions of this theory, mainly in relation to the concept of irrational numbers, when developing activities that provide improvement on the students performance, through attempts of destabilization of the invariant operational, giving opportunity to learning moments to the learners.

Key-words: Teaching of Mathematics, Genetic Epistemology, Theory of Conceptual Fields.

¹ Professora convidada do PCM – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM) e professora do CESUMAR – Centro Universitário de Maringá. Doutora em Educação pela Unesp – Campus de Marília. Membro do GEPEGE. E-mail: voclelia@gmail.com.

² Professora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Unespar – Campus de Campo Mourão. Doutora em Educação Matemática pelo PCM - UEM. E-mail: rezendeveridiana@gmail.com.

Introdução

Diante das várias formas de diversidades das escolas brasileiras, cultural, étnica, gênero, política, entre outras, são muitos os desafios a serem enfrentados por nós, professores, relacionados às salas de aula. Concomitante a essa diversidade, ao nos referirmos ao ensino de matemática, nos deparamos com o desafio de como é possível favorecer a aprendizagem dos alunos.

De acordo com Becker (2013), um dos fatores que interferem na sala de aula é a concepção de conhecimento e a de aprendizagem que orientam as práticas pedagógicas de cada professor. Por consequência, não podemos negar que essas concepções exercem influência sobre a aprendizagem dos alunos.

Becker (2013) menciona duas concepções de conhecimento e de aprendizagem que, de acordo com Piaget (1978)³, dificilmente poderão favorecer a aprendizagem matemática dos alunos. A primeira delas diz respeito à concepção behaviorista, na qual os alunos aprendem pela estimulação, como se bastasse “[...] uma série de estímulos ou de contingências de reforço para que determinadas aprendizagens se realizassem, então ele estará limitando ou até impedindo uma série de transformações no processo de aprendizagem” (BECKER, 2013, p.67).

A segunda concepção aparece como a teoria do talento, do dom. Segundo esta concepção,

[...] nasce-se com estruturas, capacidades ou competências cognitivas definidas e definitivas. Quem nasceu assim, será sempre assim. Quem nasceu com talento para a matemática, sempre será talentoso; quem nasceu sem talento ou sem o dom para esse conhecimento, fará bem em não envidar esforços para aprendê-lo; será inútil (BECKER, 2013, p.68).

No entanto, Becker (2013) nos alerta que as aulas dos professores serão diferentes das inspiradas nas modalidades antes citadas, se o professor considerar que seus alunos aprendem porque “[...] como sujeitos ativos agem sobre os conteúdos matemáticos” (BECKER, 2013, p.79).

³ PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

Constantemente, psicólogos e pedagogos fazem críticas relacionadas à teoria de Piaget para a sala de aula. Contudo, a respeito dessas críticas, Bellini, Nogueira, Pavanello e Andrade (2011) alertam que:

[...] As tentativas de aplicações da teoria piagetiana na escola têm se mostrado muito limitadas possivelmente porque, em sua maioria, levam em conta apenas os estádios de desenvolvimento; e embora apontem a importância da ação nem sempre demonstram compreender o seu significado na teoria. Consequentemente caem no espontaneísmo (BELLINI, NOGUEIRA, PAVANELLO, ANDRADE, 2011, p.1-2).

Para Castorina (2011, p.188-189), a maioria das “aplicações” da psicogenética à educação são, em sua maior parte, *aplicacionismos*, isto é, “[...] a utilização de uma teoria psicológica em um campo de conhecimento diferente do que lhe deu origem, de tal modo que suas hipóteses e métodos de investigação são utilizados exatamente da mesma forma como eram”. Segundo essa posição, a aprendizagem escolar seria entendida tal como a psicologia genética explica a aprendizagem fora do contexto escolar.

Ainda no que se refere à construção dos conhecimentos matemáticos escolares, é preciso considerar que desde o início do Movimento da Matemática Moderna, na década de 1950, se busca fundamentar o ensino de matemática na teoria piagetiana, particularmente mediante aplicações dos resultados da psicogenética. No entanto, de acordo com Nogueira (2013),

[...] o interesse maior de Piaget não foi o desenvolvimento da psicologia nem suas aplicações à pedagogia. Seu foco principal foi o mecanismo de produção de conhecimentos ou, como o sujeito passa de um nível de menor conhecimento para um nível de maior conhecimento. Mas, é exatamente esta a principal função do professor: *conduzir o aluno que possui um determinado grau de conhecimento a outro grau de conhecimento, mais amplo ou mais bem estruturado* (NOGUEIRA, 2013, p.285-286).

Desse modo, a pesquisadora infere que “[...] como a teoria piagetiana não trata especificamente de questões pedagógicas, não é possível pensar em aplicações, mas sim em *implicações pedagógicas* dessa teoria” (NOGUEIRA, 2013, p.289). E, nesse sentido, Becker (2013) aponta um desafio para o ensino de matemática que diz respeito à constituição de práticas pedagógicas e didáticas que favoreçam o ambiente escolar

como um “[...] lugar de criação e invenção e não apenas de cópia e reprodução” (BECKER, 2013, p.84).

Considerando esses elementos, Nogueira (2013) menciona a importância das didáticas disciplinares. A pesquisadora ressalta que apesar do forte vínculo entre a psicologia e a didática, e suas contribuições recíprocas, os problemas pertinentes a essas duas áreas de conhecimento são distintos.

No que se refere à didática da matemática em particular, existe um grupo de pesquisadores franceses que se apoiam na teoria piagetiana para formular implicações diretamente ligadas à sala de aula. Dentre eles, destacamos Gérard Vergnaud.

Este texto busca evidenciar implicações da teoria piagetiana para a Educação Matemática, mediante a teoria dos campos conceituais, focalizando, particularmente, o ensino dos números irracionais.

Para isto, realizamos uma metanálise das informações coletadas em uma pesquisa mais ampla, fundamentada na teoria dos campos conceituais, desenvolvida com vistas a analisar os conhecimentos sobre números irracionais, mobilizados por alunos brasileiros, concluintes do Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e alunos franceses, concluintes de níveis de ensino correspondentes (*Collège*, *Lycée* e Licenciatura em Matemática), relacionados aos números irracionais. Destacamos neste trabalho fragmentos de diálogos de uma entrevista entre uma das pesquisadoras desse estudo e uma aluna brasileira de curso de Licenciatura em Matemática.

A influência piagetiana na teoria dos campos conceituais

A teoria dos campos conceituais é uma teoria psicológica que se refere ao desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, sobretudo, quando ligado à aprendizagem de competências complexas, na escola e no trabalho (conteúdos e suas particularidades). Esta teoria nasceu na década de 1980 com o psicólogo e pesquisador francês Gérard Vergnaud, orientando de doutorado de Jean Piaget.

De acordo com Vergnaud (1981), Piaget não indicava em suas obras interesse pela didática. Como exemplo, ele menciona que apesar de Piaget ter realizado

amplo estudo sobre a noção de espaço, tempo e velocidade, ele não apresentou propostas didáticas para estes conceitos. No entanto, Vergnaud (1981) considera que determinadas ideias teóricas e científicas presentes nas obras de Piaget são essenciais para a pesquisa em didática. Dentre essas ideias, Vergnaud (1981) destaca: o conceito de invariante operatório, a função simbólica, o interacionismo e a noção de equilíbrio. Essas ideias estão contempladas na presente investigação, a saber, a de invariante operatório, que é centro de nossas investigações; a função simbólica, em seus diferentes aspectos, quando buscamos diversificar as representações para os conceitos matemáticos envolvidos; o interacionismo, ao proporcionar a interação entre sujeito e pesquisadora e entre sujeito e a diversidade de situações apresentadas, situações estas visando provocar desequilíbrios.

Assim, inspirado nas ideias de Piaget, nos anos de 1970 e 1980 Vergnaud inicia suas pesquisas voltadas para o contexto escolar, indicando a necessidade de aproximação cognitivista e genética com métodos complementares tais como entrevistas, experiências planejadas, experiências didáticas, estudos de livros didáticos, entre outros.

Um exemplo destas pesquisas foi publicado em um número temático⁴ da *Recherche en Didactiques des Mathématiques* sobre o conceito de volume, que consiste de três artigos resultantes de pesquisas de Vergnaud e colaboradores. O primeiro artigo, de Ricco, Vergnaud e Rouchier (1983), refere-se a entrevistas clínicas com alunos de 11 a 15 anos, com a intenção de obter uma imagem significativa dos conhecimentos dos alunos de diferentes níveis do *Collège*⁵ (da *sixième* à *troisième*) e, assim, obter objetivos e hipóteses precisas para a construção de uma sequência didática sobre volume. No segundo artigo, considerando os resultados das entrevistas clínicas realizadas, Vergnaud *et al* (1983) apresentam uma sequência de atividades e análise dos resultados da implementação em sala de aula com alunos da *cinquième* (12 - 13 anos). A terceira pesquisa, Rogalski, Samurçay e Ricco (1983) apresentam as análises do progresso dos alunos em relação à sequência didática, por meio das análises de um pré-teste aplicado com os

⁴ Número especial da *Recherches en Didactique des Mathématiques*, intitulado *Didactique et Acquisition du Concept de Volume*, publicado em 1983.

⁵ *Collège* é o nível do sistema de ensino francês correspondente ao Ensino Fundamental brasileiro. *Sixième* corresponde ao sexto ano e *troisième* corresponde ao nono ano do Ensino Fundamental.

alunos antes da implementação das atividades e de um pós-teste aplicado entre uma e três semanas após o desenvolvimento da sequência.

A ligação das pesquisas de Gérard Vergnaud com o contexto escolar aliado à influência piagetiana também é explicitado por Vergnaud (1981) ao comentar que dentre os vários outros métodos importantes de se considerar pesquisas didáticas tais como entrevistas com professores, alunos, pais, experimentação em sala de aula, análise de livros didáticos:

[...] a experimentação didática em sala é a vizinha da abordagem clínica e crítica de Piaget. Pois, as situações didáticas são frequentemente pensadas como Piaget pensava suas provas, com a intenção de colocar em evidência um conflito, ou pelo menos uma diferença, entre a situação abordada e os meios cognitivos que dispõem o sujeito (VERGNAUD, 1982, p. 14, tradução nossa).

Conne, Pastré e Bruno, num texto publicado na página da *Association pour la Recherche en Didactiques des Mathématiques*, também comentam sobre a aproximação das pesquisas de Vergnaud com o contexto escolar e ideias piagetianas:

Gérard Vergnaud permanece fiel ao espírito piagetiano, e sempre faz um paralelo entre a estrutura dos conhecimentos matemáticos e os progressos de aprendizagens e de desenvolvimento dos conhecimentos dos alunos. Mas, ao contrário do pesquisador de Genebra, junto de Bärbel Inhelder, ele não vincula seu trabalho em relação a detalhes e pesquisas ligadas a fenômenos microgenéticos. Ele permanece em categorias de conhecimentos ligadas a práticas escolares. E é assim que ele marca seu engajamento com a Didática da Matemática. Nesse sentido, Vergnaud tem defendido com insistência que o progresso da aprendizagem escolar ocorre sobre um longo período de tempo (CONNÉ, PASTRÉ, BRUNO, s. d., tradução nossa).

No entanto, embora inspirado em Piaget, Vergnaud foi além da teoria piagetiana buscando respostas a questões didáticas. Ele elaborou uma ampla teoria relacionada a questões didáticas e profissionais, possível de interessar tanto às escolas quanto às empresas⁶. Desse modo, sua teoria se refere tanto à psicologia quanto à didá-

⁶ Ver livro organizado pelos autores Ginsbourger, Merle e Vergnaud intitulado **Formation et apprentissage des adultes peu qualifiés**, publicado pela editora La documentation Française, Paris, 1992.

tica, tanto sobre formação escolar quanto à formação profissional⁷, tanto sobre o desenvolvimento de adultos quanto ao desenvolvimento de crianças.

Para Vergnaud (2009), Piaget abordava o conhecimento como um processo muito geral, biológico e social, e seu ponto de vista científico sobre a formação de certos conceitos, como, por exemplo, espaço, tempo, ordem, número, classe lógica, surgiu com o estudo do processo de desenvolvimento com bebês, crianças e adolescentes, não se dedicando ao desenvolvimento cognitivo dos adultos.

Desse modo, e considerando as contribuições que a psicologia oferece à didática, de modo especial à didática da matemática, nasce a teoria dos campos conceituais - teoria sobre a cognição que busca compreender o desenvolvimento dos conceitos, suas filiações e rupturas, no decorrer da aprendizagem escolar.

Em seus textos e palestras, o pesquisador ressalta que sua teoria não é uma teoria didática, mas que interessa à didática por oferecer subsídios para a compreensão do desenvolvimento cognitivo dos alunos em situações de aprendizagem.

Piaget estudou exaustivamente a intensa atividade da criança que, desde muito cedo, é capaz de explorar e de experimentar espontaneamente o seu meio, adaptando-se a ele. A atividade espontânea e organizada do sujeito caracteriza-se, essencialmente, pela repetição (do que já conhece) e variação (quando confrontado a novas situações). Piaget denomina *esquema* essa atividade organizada que o sujeito desenvolve em face de determinada classe de situações.

O conceito de esquema é fundamental para a compreensão da atividade do sujeito que aprende. Aprender é construir conhecimentos e o conhecimento, segundo a teoria piagetiana, é um processo de adaptação. Mas, adaptação a quê? Como isso ocorre?

Adaptamos-nos às situações, mediante a evolução da organização de nossas atividades (VERGNAUD, 2009). Para Vergnaud (2003a), o conceito de esquema é

⁷ Ao nosso olhar, essa questão do desenvolvimento profissional abordada por Vergnaud não tem sido muito explorada no Brasil. Notamos que são as questões relacionadas à psicologia e à didática as que mais têm influenciado e interessado pesquisadores brasileiros.

tão decisivo na teoria piagetiana que a proposição essencial desta teoria, de que o conhecimento é basicamente uma adaptação, deveria ser substituída por: “[...] uma interação entre esquema e situação” (VERGNAUD, 2003a, p.38).

Considerando então a afirmação de Vergnaud (2003a) de que o conhecimento se origina da interação entre esquema e situação, o fundamental na ação didática é a oferta de situações. E assim, a ação didática, ou mais do que ação, para Vergnaud (2003a, p.38), a *revolução didática* consiste em propor situações que possibilitem o desenvolvimento de esquemas.

Essa é uma das ideias que Gérard Vergnaud herda de Piaget e faz frutificar ao comprovar a possibilidade de se propor situações suscetíveis de provocar a evolução adaptativa da atividade e dos conhecimentos dos alunos, quaisquer que sejam suas idades.

Vergnaud (2003a) comenta que o conceito de esquema, restrito à percepção e à linguagem, foi desenvolvido pelo pesquisador francês Revault d’Allonnes. Entretanto, foi Piaget quem enriqueceu esse conceito, analisando os gestos de bebês em relação a seu desenvolvimento cognitivo. Mais precisamente, Piaget observou os gestos de seus próprios filhos de: levar a mão à boca, a coordenar a mão esquerda com a direita, usar um instrumento para bater em outro objeto, procurar um objeto desaparecido debaixo de um móvel. Analisando essas observações, propôs a ideia de esquema como uma forma de organização da atividade.

Vergnaud (2003a) também considera importante o papel do corpo e dos gestos ao desenvolvimento da conceitualização e chama a atenção, por exemplo, para o quanto é importante para a construção do conceito de número os gestos da contagem: um, dois, três, quatro. Segundo o pesquisador, existe uma correspondência entre os objetos contados e os gestos dos dedos, do olhar, da voz. Por isso, ele defende que “[...] o número não é uma propriedade somente do cérebro, mas um problema do conjunto da atividade corporal” (VERGNAUD, 2003a, p. 29).

Para Vergnaud (2009), a atividade gestual contém muitas operações de pensamento em termos de representação dos objetos materiais, de suas propriedades, relações e transformações, tanto para o bebê quanto para o sujeito adulto.

É evidente que existem muitas diferenças entre os gestos do bebê que aprende a pegar pequenos objetos e os gestos de um atleta adulto, ou de um pedreiro, por exemplo. Entretanto, a organização dos gestos, seja de um bebê, de uma criança ou de um adulto, contém os mesmos componentes: um objetivo, o sequenciamento e coordenação dos movimentos das diferentes partes do corpo, a identificação dos objetos materiais e de suas propriedades (volume, peso, características geométricas, distância, temperatura, por exemplo), cálculo das ações a serem efetuadas, das informações a serem obtidas, dos controles a serem realizados (VERGNAUD, 2009). Segundo este pesquisador, esses são os elementos que compõem a definição de esquema.

Ao transpor para a educação a concepção da epistemologia genética piagetiana de que o conhecimento é uma construção contínua, Vergnaud (2009) considera que um sujeito aprende e se desenvolve em qualquer idade, inclusive na fase adulta. Nesse sentido, o pesquisador comenta que “[...] o mundo, as tecnologias e os instrumentos mudam rapidamente. É, portanto, pertinente pensar que os adultos se desenvolvem ao longo de toda sua vida” (VERGNAUD, 2009, p.19). Por esse motivo, escolhemos apresentar neste texto um exemplo de aprendizagem por desestabilização de invariantes operatórios com um sujeito adulto.

Considerando a importância dos signos para a construção de um conceito, fato explorado por Piaget em *Formação do Símbolo na Criança*, Vergnaud acolhe em sua teoria o papel da linguagem, dos símbolos e da representação para a formação de um conceito. Além disso, Vergnaud (1990) defende que para o estudo de um conceito são necessários diversos outros conceitos, situações, símbolos, representações, propriedades, teoremas interligados. Assim, para o autor, um conceito não pode ser examinado, apreendido isoladamente; são necessárias diversas situações para compreendê-lo. E, igualmente, uma única situação pode estar ligada a diversos outros conceitos. Daí justifica-se a ideia de campo conceitual.

Vergnaud (2003a) classifica sua teoria como uma teoria do desenvolvimento cognitivo por adotar o pressuposto piagetiano de que o conhecimento se adapta⁸ e se desenvolve com o tempo e em função das situações que o sujeito vivencia, sendo reelaborado a cada a cada nova situação enfrentada. Ao se deparar com situações novas, os sujeitos mobilizam seus conhecimentos prévios, os reformulam e tentam adaptá-los à nova situação, ou seja, são estabelecidas composições novas e generalizadoras. Com as devidas adaptações, se está assumindo aqui, a explicação piagetiana do processo de “passagem de um estado de ‘menor conhecimento a um estado de maior conhecimento’”, objetivo central da epistemologia genética⁹.

Este processo fica evidente em Piaget e Garcia (2011, p.15-16), na qual os autores especificam que os sucessivos estádios de construção do saber são “[...] ao mesmo tempo, o resultado das possibilidades abertas pelo precedente e condição necessária do subsequente”, ou seja, cada estádio de construção do saber começa por uma “[...] reorganização, num novo nível, das principais aquisições em virtude dos precedentes”.

Vergnaud (2003a) atribui muita importância à reflexão nas aprendizagens matemáticas, e tenta compreender, nas ações dos sujeitos, as que estão relacionadas a conhecimentos implícitos falsos ou verdadeiros, por ele denominados de invariantes operatórios, classificados em duas categorias - *teoremas em ação* e *conceitos em ação*, que estão definidos a seguir. Segundo o pesquisador, não é apenas a resolução de um problema pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo pelo qual eles resolvem e, principalmente, os invariantes operatórios que os alunos mobilizam ao resolver um problema.

De acordo com Vergnaud (2009), é difícil para uma criança explicar e justificar seus conhecimentos, utilizados na ação, em palavras. E, apesar de certa experiência em determinadas situações, muitos adultos também não conseguem explicitar verbalmente parte dos conhecimentos que utilizam na ação. Partindo destas diferenças

⁸ Piaget, no livro **O nascimento da inteligência na criança**, publicado no Brasil em 1987, pela editora Guanabara, vai além e afirma que a própria inteligência é adaptação e, portanto, também se desenvolve.

⁹ Ver prólogo de autoria de Emília Ferrero e Rolando Garcia, do livro de Jean Piaget, *Introducción a La epistemologia genética: El pensamiento matemático*. Bueno Aires: PAIDOS, 1975.

entre a forma operatória do conhecimento e sua forma predicativa é que o pesquisador introduz, no sentido psicológico, o conceito de *invariante operatório*. Vergnaud toma de Piaget essa ideia de invariante operatório como sustentáculo da ação incorporando-a como um dos pontos do tripé que compõe um campo conceitual.

Os invariantes operatórios é um dos elementos da composição dos esquemas. Concernem às propriedades estruturais de qualquer esquema, generalizáveis ou não a diversas situações, aos mais diversos objetos a conhecer. Estes conhecimentos, chamados de conhecimentos em ação, podem ser explicitáveis ou não, conscientes ou não. Os conhecimentos tornam-se explicitáveis quando há tomada de consciência do sujeito.

A ênfase que Vergnaud (1993) atribui às situações para a compreensão de um dado conceito é tão significativa, que ele afirma que a primeira entrada de um campo conceitual é um conjunto de situações. Entretanto, juntamente com as situações estão os conceitos, pois “[...] a teoria dos campos conceituais surge, sobretudo, como uma psicologia dos conceitos” (Ibid, p. 9). Desse modo, o pesquisador esclarece que, do ponto de vista psicológico, um conceito, portanto, um campo conceitual é necessariamente definido por três conjuntos, representado por $C = (S, I, s)$:

- O conjunto *S* é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito.
- *I* é o conjunto dos invariantes operatórios em que se baseia a operacionalidade dos esquemas. Cada conjunto de situação evoca operações de pensamentos precisas que se referem aos invariantes operatórios, não necessariamente explícitos, que tentam modelizar uma situação e tratam de extrair propriedades, relações ou aplicar um teorema.
- *s* é o conjunto das formas de linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações, os processos de tratamento. Segundo Vergnaud (1985), não é possível falar de conceito sem considerar os termos emprestados da linguagem natural ou de sistemas simbólicos, pois, caso contrário, não seria possível sua definição. Este conjunto é denominado de *significantes*.

De acordo com Vergnaud (2009), os invariantes operatórios são modelos preciosos para se descrever a conduta do sujeito, e os diferencia em duas categorias: conceitos em ação e teoremas em ação: “Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação” (VERGNAUD, 2009, p.23). Os conceitos em ação e os teoremas em ação são de naturezas distintas. Os primeiros não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos, eles apenas são pertinentes ou não para a situação. Já os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos.

Para Vergnaud, a desestabilização de invariantes operatórios falsos proporciona momentos de aprendizagens aos alunos. Guardadas as diferenças de termos, essa também é uma ideia eminentemente piagetiana, recorrentemente discutida pelo mestre genebrino quando ele aborda conceitos como equilíbrio majorante ou abstração reflexionante, por exemplo. Ou seja, ao desestabilizar seus conhecimentos falsos, vivenciando momentos de desequilíbrios, hesitações e conflitos, entendemos que os alunos passam de um nível de conhecimento para outro mais elaborado, podendo realizar, portanto, em linguagem piagetiana, uma abstração reflexionante.

Com base nas considerações acima, apresentamos a seguir uma situação destacada de pesquisa mais ampla, com o objetivo de exemplificar que a desestabilização, pelo menos local, de invariantes operatórios falsos pode proporcionar a passagem de um nível de conhecimento mais simples para outro mais elaborado. Dito de outra forma, sendo os invariantes operatórios um dos componentes do esquema, a sua desestabilização e posterior reorganização proporciona a ampliação dos esquemas do sujeito.

O esquema é uma totalidade dinâmica funcional, uma organização invariante de conduta, quanto a uma certa classe de situações. Essa organização comporta objetivos e esperas, regras de ação, tomada de informação e de controle e é *estruturada por invariantes operatórios*, isto é, conhecimentos adequados para selecionar a informação e processá-la (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) (VERGNAUD, 2003b, p.66, grifos nossos).

De acordo com Nogueira, Bellini e Pavanello (2013, p. 65), “[...]o conceito de esquema é fundamental para a compreensão da atividade do sujeito que aprende.

Vergnaud (2003a, p.38) vai além, estabelece que a proposição piagetiana de que o conhecimento é basicamente uma adaptação, deveria ser substituída por “[...] uma interação entre esquema e situação”, do que se conclui que o fundamental na ação didática é a oferta de situações.

Momentos de aprendizagens de alunos em situações matemáticas à luz da teoria dos campos conceituais

Para exemplificar como a teoria dos campos conceituais pode colaborar para compreendermos o processo de conceitualização de alunos em situações matemáticas, apresentamos parte das análises dos fragmentos de diálogo de uma aluna, dentre os quarenta e dois (42) participantes investigados em uma pesquisa que realizamos com estudantes que finalizavam Ensino Fundamental, Ensino Médio e Licenciatura em Matemática.

A coleta de dados ocorreu por meio de entrevistas individuais, contendo oito atividades matemáticas previamente elaboradas para os alunos resolverem. As entrevistas foram filmadas e os alunos ficavam livres para escrever ou expressar suas respostas oralmente. As atividades foram elaboradas fundamentadas em Vergnaud (1990), considerando algumas das diversas situações presentes no campo conceitual dos números irracionais, diferentes conceitos, símbolos e representações desses números. Além disso, algumas atividades foram inseridas com o propósito de desestabilizar conhecimentos falsos, possíveis de serem mobilizados pelos alunos no decorrer da entrevista, proporcionando, portanto, momentos de aprendizagens, conforme mostramos a seguir.

Para o presente artigo, optamos por apresentar a análise das respostas da aluna Kar do último semestre do Curso de Licenciatura em Matemática, a partir da atividade 5(a) de nosso instrumento de pesquisa, que tratava da existência de um quadrado de medida de área 13 cm^2 .

A escolha pela análise das respostas da aluna Kar decorre do fato de desejarmos apresentar análises de um sujeito adulto, com a intenção de mostrar, conforme prevê Vergnaud, a desestabilização de invariantes operatórios falsos e, portanto, indi-

car momentos de aprendizagens de sujeitos adultos mediante atividades matemáticas elaboradas previamente. Além disso, informamos que foram sete (07) os sujeitos brasileiros¹⁰ adultos entrevistados, dentre os quais consideramos que as respostas de Kar representariam as respostas da maioria dos sujeitos adultos entrevistados.

Ao ser questionada sobre a existência de um quadrado de medida de área 13 cm^2 , a aluna Kar hesitou, refletiu e concluiu pela não existência da referida figura geométrica. A justificativa da aluna se sustentava no fato de $\sqrt{13}$, suposta medida do lado do quadrado, se tratar de um número irracional, conforme indica o fragmento da entrevista:

A aluna Kar balançou a cabeça para os lados, indicando sinal negativo, pensou alguns segundos e disse:

Kar: *Não! Raiz quadrada de treze é irracional.*

Silêncio. A aluna demonstra-se inquieta.

Kar: *Que difícil isso!*

A aluna faz um esboço de um quadrado na ficha e diz:

Kar: *Eu acho que não.*

Silêncio.

Kar: *Não, não existe.*

Inspirados em Vergnaud (1990), entendemos que esta atividade revelou uma situação nova para a aluna: ela não tinha conhecimentos prévios acomodados e assimilados para apresentar uma solução para a atividade, fato que é evidenciado em sua frase: *Que difícil isso!* Ademais, é possível inferir na fala de Kar conhecimentos implícitos, ou seja, invariantes operatórios modelados no que Vergnaud (1990) denomina por teorema em ação falso TAF1: *Se $b \in \mathbb{R}_+$ não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado cuja medida de área é $A = b \text{ cm}^2$.* Esclarecemos que os teoremas em ação identificados neste texto são frutos da análise de dados da pesquisa ampla já mencionada e,

¹⁰ Os alunos adultos brasileiros responderam uma atividade a mais que os alunos franceses, a atividade 5(c) do instrumento de pesquisa. Por isso a opção nesse texto pela análise de respostas de alunos brasileiros.

também, foram identificados da análise de respostas de outros sujeitos da mesma pesquisa.

Aos alunos que, assim como Kar, negavam a existência do quadrado de medida de área 13 cm^2 , nós apresentávamos a atividade 5(b) com a tentativa de desestabilizar ou, pelo menos, perturbar localmente os invariantes operatórios falsos mobilizados por eles. A atividade consistia em apresentar um quadrado ABCD cuja medida do lado coincidia com a medida do lado de um triângulo retângulo de catetos com medidas 2 cm e 3 cm , conforme a figura a seguir, e tinha por enunciado: *A área do quadrado ABCD é 13 cm^2 . Você concorda com esta afirmação ou não?* Nossa intenção era que os alunos utilizassem o teorema de Pitágoras para encontrar $\sqrt{13} \text{ cm}$ como medida do lado do quadrado, favorecendo-os a concluir que a área do quadrado é 13 cm^2 .

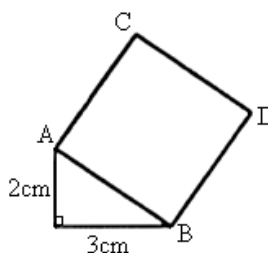


Figura 1: Quadrado de medida de área 13 cm^2
Fonte: Autoras desta pesquisa

Nesta atividade, a aluna Kar realizou os cálculos por meio do teorema de Pitágoras, conforme esperávamos, encontrando $\sqrt{13} \text{ cm}$ como medida do lado. No entanto, o conteúdo de sua fala permitiu-nos inferir que ela entrou em conflito com seus esquemas anteriores já acomodados, conforme verificamos no fragmento de seu diálogo:

Kar: *Ai que chato! Não sei!* (Silêncio).

Pesquisadora: *No que você está pensando?*

Kar: *Que eu acabei de falar que não existe um quadrado com este lado.*

Pesquisadora: *Mas e agora, sua opinião mudou?*

Kar: *Não, então, eu tô pensando se... (Silêncio) Se eu pegar dois centímetros aqui e três aqui e ligar, então quer dizer que este aqui é raiz de treze. E se eu pegar esta medida e passar pra cá (aponta para os lados do quadrado ABCD) então vai existir. Mas não vai ser exatamente igual a raiz de treze... não sei.... Como este número é... tem infinitos dígitos, eu acho estranho ele ser uma medida. (Silêncio. A aluna respira fundo, e fala bem baixinho) Se o lado do quadrado é raiz de treze a área vai ser treze.*

Kar: *Não tem como eu discordar, porque a conta tá falando que é verdade.*

Pesquisadora: *O lado é $\sqrt{13}$?*

Kar: *Sim. E $\sqrt{13} \times \sqrt{13}$, a área é 13.*

Pesquisadora: *Mas você concorda ou não com esta afirmação?*

O aluno respira fundo, e diz:

Kar: *Pelas contas eu concordo, mas eu não sei.*

Pesquisadora: *Você está achando esta situação complicada?*

Kar: *Sim, está confuso... no exercício anterior... Concordo.*

Pesquisadora: *Concorda?*

Kar: *humhum (fazendo sinal de positivo com a cabeça)... Fazer o quê?*

Nota-se que a aluna vivenciou conflitos relacionados ao resultado de seu cálculo por meio do teorema em Pitágoras cujo resultado é $\sqrt{13}$, que ela entende que não pode ser negado, e a possibilidade de se considerar um número irracional – com infinitas casas decimais – como medida de um segmento.

Percebemos que os esquemas de Kar – futura professora de Matemática – não estavam acomodados para afirmar sobre a existência de um quadrado de área 13cm^2 , e que esta atividade favoreceu momentos de desequilíbrios e, portanto, de aprendizagens, em relação aos conhecimentos de Kar. Ressaltamos o fato que os invariantes operatórios e, portanto, os esquemas, que existiam em seu repertório eram tão resistentes, que mesmo após dizer que concorda com a existência do quadrado, afinal ela sabe que não pode contrariar seus cálculos, Kar não se apresenta convencida com a situação, como ela mesma diz: *Fazer o quê?*

Para confirmar se esta atividade colaborou para desestabilizar o teorema em ação falso, TAF1: *Se $b \in \mathbb{R}_+$ não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado de área*

$A = b \text{ cm}^2$ que a aluna havia mobilizado na atividade 5(a), a pesquisadora a questionou: *Você acha que é possível construir um quadrado de área 5 cm^2 ?*

A resposta da aluna foi: *“Ah, eu acho que sim... porque se eu posso construir com raiz de treze eu posso construir com raiz de cinco. [...] Ah, eu vou ter que construir um triângulo retângulo de hipotenusa raiz de cinco”*. A aluna questiona se pode representar mais ou menos o quadrado, e o representa indicando o processo de construção.

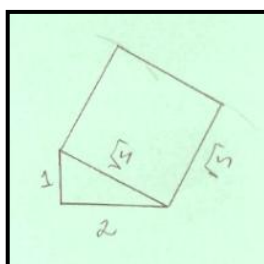


Figura 2: Representação de um quadrado de área 5 cm^2 - aluna Kar
Fonte: Autoras desta pesquisa

Desse modo, inferimos que a atividade 5(b) favoreceu a desestabilização, pelo menos local, do teorema em ação falso *Se $b \in \mathbb{R}_+$ não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado de área $A = b \text{ cm}^2$* .

As atividades seguintes continuavam com a tentativa de confirmar a desestabilização de esquemas inadequados mobilizados pelos alunos. Assim, na atividade 6, numa situação gráfica, os alunos eram levados a refletir sobre a existência de infinitos retângulos, e, portanto, de um quadrado de área 24 cm^2 . Embora com os resultados positivos apontados na atividade anterior, a aluna Kar não justificou que o quadrado de medida de área 24 cm^2 existe devido ao fato do seu lado medir $\sqrt{24}$ cm. Embora Kar tenha afirmado a existência do quadrado de medida de área 24 cm^2 , ao contrário do que esperávamos, ela justificou que o referido quadrado existe devido ao fato de que a medida do seu lado está entre 4 e 5, sendo mais próximo de cinco.

Assim, notamos que alterando a forma de apresentação/representação da atividade, das representações algébrica e figural das atividades anteriores para o gráfi-

co de uma função, a aluna continuou a empregar esquemas inadequados, resistindo a considerar a existência de segmento de medida irracional $\sqrt{24}$ cm. Esta atividade indica que o teorema em ação falso percebido nas respostas da aluna na atividade 5(a) é elemento de um esquema resistente no repertório da aluna e que não foi completamente desestabilizado. Esta é uma das razões que Vergnaud (1990) defende a necessidade de diferentes situações para a compreensão de um conceito matemático, no decorrer da aprendizagem escolar.

A atividade seguinte do instrumento de pesquisa questionava sobre a possibilidade de se representar $\sqrt{5}$ na reta numérica. A aluna Kar disse acreditar que sim, porém ela representou uma aproximação decimal deste número na reta numérica. Ou seja, a decimalização dos números proporcionada pelo uso da calculadora, desenvolveu em Kar a ideia de que só existem números que podem ser expressos na forma de uma expressão decimal finita e este esquema acaba por acarretar dificuldades para ela considerar a existência de segmentos de medidas irracionais algébricas, e, consequentemente, de figuras geométricas conhecidas desde os anos iniciais como o quadrado.

Para colaborar com a desestabilização dos esquemas inadequados indicados pelos teoremas em ação falsos mobilizados pelos alunos que, assim como Kar, afirmaram que não existem ou que existem aproximadamente os segmentos de medidas irracionais algébricas, a pesquisadora apresentava a construção do Caracol Pitagórico, mostrando aos alunos uma possibilidade de se construir segmentos de medidas irracionais da forma $\sqrt{n}, n \in \mathbb{Z}_+^*$.

Após apresentar aos alunos esse método de construção de segmentos, a pesquisadora os questionava se, diante do referido método de construção de segmentos, eles representariam o número $\sqrt{5}$ de um modo diferente do que eles haviam representado na atividade precedente.

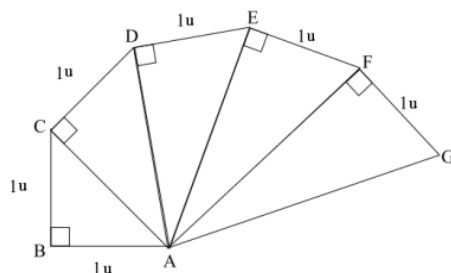


Figura 3: caracol pitagórico
Fonte: autoras desta pesquisa

Após a aluna Kar ser apresentada a esse método de construção de segmentos de medida irracional, que ela afirmou desconhecer até o momento da entrevista, Kar foi espontânea em transportar com o auxílio do compasso o segmento de medida $\sqrt{5}$ obtido na espiral pitagórica para a representação na reta numérica. Com esta atitude de Kar, percebe-se que seu esquema inicial, que não permitia compreender a existência de um quadrado com medida de lado irracional, foi alterado. Esse fato, indica, portanto, que a aluna passou para um patamar de conhecimento mais amplo, parecendo compreender segmentos de medida irracional como medida de lados de figuras geométricas.

Considerações Finais

Com o exemplo apresentado, foi possível notar momentos de aprendizagens vivenciados pela aluna Kar, futura professora de Matemática, em relação a segmentos de medidas irracionais. Tais momentos de aprendizagens são decorrentes das atividades elaboradas com vistas a desestabilizar, pelo menos localmente, teoremas em ação falsos mobilizados pelos alunos, alterando, portanto, seus esquemas inicialmente falsos, que não lhes permitiam compreender segmentos de medidas irracionais como medida do lado de um quadrado, para esquemas verdadeiros. Da análise dos fragmentos de diálogos entre aluna e pesquisadora, foi possível notar que as atividades favoreceram a vivenciar momentos de desequilíbrios, de solução de conflitos, logo de acomodação/assimilação em relação a seus conhecimentos prévios sobre os números irracionais.

Isso concorda com o estabelecido por Ferrero e Garcia (1978) no sentido de que o conhecimento comporta sempre e necessariamente um fator de assimilação que confere significado ao fato externo, e é transformadora do objeto através dessa incorporação de significações. Porém, por sua vez, o objeto provoca modificações do esquema assimilador, ilustrando a dialética da interação entre sujeito e objeto, a saber, o objeto é modificado pelo sujeito que, contudo, é modificado pelo objeto.

As análises apresentadas apontam que a interação dos esquemas de Kar com as situações didáticas apresentadas favoreceram a desestabilização de invariantes operatórios falsos mobilizados pela aluna, modelados na forma de teoremas em ação. Este fato permite inferir que os esquemas de Kar foram reelaborados a cada a cada nova situação enfrentada, exemplificando, como se passa de um patamar inferior de conhecimento para outro superior, retirando características dos conhecimentos anteriores e favorecendo a aprendizagem em sentido estrito, realizada em sala de aula.

A descrição e análise das experiências de Kar evidenciam o pressuposto piagetiano de que o conhecimento é dependente da ação e a ação é produtora de conhecimento, ou seja, é por meio da ação que os objetos são assimilados aos esquemas, mesmo quando se trata de um sujeito adulto. Kar utilizou operações dedutivas, entretanto, segundo Ferrero e Garcia (1978), entre a estruturação que acontece em ações efetivadas mediante a experiência e a estruturação das construções dedutivas há, do ponto de vista do funcionamento, só uma diferença de grau: assim como a experiência consiste em atuar sobre os objetos, as operações dedutivas consistem em ações interiorizadas e coordenadas.

Outro pressuposto da epistemologia genética piagetiana que o exemplo apresentado nos permite identificar é o da continuidade da construção dos conhecimentos, aqui demonstrada pela passagem de um conhecimento pré-científico ou espontâneo (ao não aceitar a possibilidade de um quadrado cuja medida do lado é irracional) ao conhecimento científico, ao comprovar, esta possibilidade, mediante a demonstração matemática.

Dito de outra forma, exemplificamos, com as ações de Kar, o modelo explicativo da passagem de um estado de menor conhecimento a outro de maior conhecimento descrito por Piaget, isto é, a existência de mecanismos gerais de organização, desequilíbrio e reequilíbrio, ocorrida mediante a interação entre o sujeito e o objeto de conhecimento, evidenciando a interação dialética presente na construção do conhecimento.

E, ainda mais, constatamos, também, que a construção do conhecimento, proporcionada pela interação dialética entre sujeito e objeto, em um contínuo processo de desequilíbrio e reequilíbrio não é linear, mas, em uma linguagem matemática, ocorre de maneira helicoidal. Afinal, a evolução dos invariantes operatórios identificados nas respostas de Kar, não acontece nenhuma ruptura arbitrária nem uma simples adição de conhecimento, mas os esquemas se reconstróem, ampliando-se ou coordenando-se com outros para fazer o conhecimento avançar.

Destarte, com a evolução dos invariantes operatórios, modelados na forma de teoremas em ação, indicados nas respostas de Kar, é possível constatar, assim como defende Gérard Vergnaud, que as situações matemáticas elaboradas foram suscetíveis de provocar a evolução adaptativa dos conhecimentos dos alunos, inclusive com sujeitos adultos. Desse modo, pode-se inferir que atividades como estas, elaboradas com o propósito de desestabilizar invariantes operatórios falsos mobilizados pelos alunos, favorecem a aprendizagem e são importantes de serem contempladas nas aulas de Matemática.

Não se trata aqui, de “aplicacionismos”, mas de implicações da teoria piagetiana em sala de aula. Verifica-se, também, que não é uma tarefa fácil e imediata transpor os aportes da epistemologia genética para situações de aprendizagens, pois o esforço de Vergnaud nesta empreitada culminou com a criação de uma nova teoria, a teoria dos campos conceituais que, se não pode ser classificada como estritamente piagetiana, também não pode ser empregada, estudada, sem que nela se perceba a forte influência das proposições de Jean Piaget.

Referências

BECKER, F. Sujeito do conhecimento e ensino de Matemática. **Schème: Revista eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**. v. 5, pp. 65 – 86, 2013.

BELLINI, L.M.; NOGUEIRA, C.M.I.; PAVANELLO, R.M; ANDRADE, D. As palavras-chave da didática das ciências: uma análise piagetiana. In: **Anais do Colóquio Internacional de Epistemologia e Psicologia Genéticas**. Marília: Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista – UNESP, novembro de 2011.

CASTORINA, J.A. La psicología genética de los conocimientos sociales em el contexto didáctico: una mirada crítica. In: MONTOYA, A. O.D. *et al* (Org.) **Jean Piaget no século XXI: escritos de epistemologia e psicologia genéticas**. São Paulo: Cultura Acadêmica; Marília: Oficina Universitária, p. 187-207, 2011.

CONNE, F.; PASTRÉ, P.; BRUNO, S. Gérard Vergnaud. **Trois figures emblématiques de la didactique des mathématiques française**. S.d. Disponível em <http://www.ardm.eu/contenu/g%C3%A9rard-vergnaud-0>.

FERRERO, E. ; GARCIA, R.. Prólogo. In: Piaget, J. **Introdução a la epistemologia genética: el pensamiento matemático**. Buenos Aires: Paidós, 1978.

NOGUEIRA, C. M. I. A formação de professores que ensinam Matemática e os conteúdos escolares: Uma Reflexão Sustentada na Epistemologia Genética. **Schème: Revista eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**. v. 5, pp. 284 – 312, 2013.

NOGUEIRA, C. M.I.; BELLINI, M.; PAVANELLO, R.M. **O ensino de matemática e das ciências naturais nos anos iniciais na perspectiva da epistemologia genética**. Curitiba: CRV, 2013.

RICCO, G.; VERGNAUD, G.; ROUCHIER, A. Représentation du volume et arithmétisation - entretiens individuels avec les élèves de 11 à 15 ans. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 4, n. 1, pp. 27 a 69, 1983.

ROGALSKI, J. ; SAMURCAV, R. ; RICCO, G. Analyse du pré-test/post-test sur le volume. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 4, n. 1, pp. 121 a 131, 1983.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.) **A aprendizagem Matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Editora CRV, Curitiba, 2009.

_____. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. (Org.) **Por que ainda há quem não aprende?** 2ª edição. Petrópolis: Vozes, 2003a.

_____. A psicologia da educação. In: PLAISANCE, E.; VERGNAUD, G. **As ciências da educação**. São Paulo: Loyola, 2003b.

_____. Teoria dos Campos Conceituais. *In*: Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, p. 1 - 26. Rio de Janeiro, 1993.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

_____. Concepts et schème dans une théorie opératoire de la représentation. **Psychologie Française**, n. 30, pp. 245 a 252, 1985.

_____. *et all.* Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 4, n. 1, pp. 71 a 120, 1983.

Recebido em: 21/04/2014

Aceite em: 07/07/2014