ISSN: 1984-1655

Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Operaciones combinatorias en estudiantes universitarios de ciclo inicial

Juan Augusto MORALES[1]

Susana FRISANCHO[2]

Resumen

En la teoría de Piaget, las operaciones combinatorias emergen al inicio del pensamiento formal y hacen referencia a la capacidad de concebir y organizar sistemáticamente posibilidades y dimensiones que pueden interactuar como elementos y causas de un problema. Debido a que este desarrollo es esencial en la universidad, el objetivo de esta investigación fue evaluar la capacidad combinatoria matemática de un grupo de estudiantes universitarios. Participaron 12 estudiantes de entre 16 y 20 años, seis mujeres y seis varones. Teniendo como referencia el método clínico-crítico de Piaget, se utilizaron cuatro tareas con estructura combinatoria. Los resultados muestran gran variación en la forma de resolver las tareas. Se discuten estos resultados desde la teoría de Piaget, considerando la importancia de la capacidad combinatoria para el desarrollo cognitivo y el pensamiento matemático.

Palabras clave: desarrollo cognoscitivo, operación combinatoria, educación superior, Jean Piaget.

Abstract

In Jean Piaget's theory of cognitive development, combinatorial operations emerge at the onset of formal operational thought and refer to a logical capacity for systematically conceiving and organizing possibilities and dimensions that can interact as elements or causes of a problem. Since this development is essential in higher education, the objective of this study was to evaluate mathematical combinatorial capacities in a group of students from a private university. Assuming Piaget's clinical-critical method, 12 university freshmen aged between 16 and 20 years, 6 female and 6 male, participated in solving four tasks with a combinatorial structure. The results show several variations in the task-solving. These results are discussed within the framework of Piaget's theory and with attention to the importance of combinatorial capacity in cognitive development and matehmatical thinking.

Keywords: cognitive development, combinatorial operation, higher education, Jean Piaget.

[1] Departamento de Psicología. Pontificia Universidad Católica del Perú. Grupo de Investigación en Cognición, Aprendizaje y Desarrollo. E-mail: amoralesg@pucp.edu.pe.

[2] Departamento de Psicología. Pontificia Universidad Católica del Perú. Coordinadora del Grupo de Investigación en Cognición, Aprendizaje y Desarrollo. E-mail: sfrisan@pucp.edu.pe.

Introducción

Nuestra actividad cotidiana necesita de los conceptos lógico-matemáticos para organizar apropiadamente los intercambios con la realidad física y social (Piaget, 1950/1975; Inhelder & Piaget, 1955). Reconociendo esto, todos los sistemas educativos conceden enorme importancia a la educación matemática, y organismos de cooperación internacional como la OECD[3] y la UNESCO[4] invierten gran cantidad de recursos en programas de apoyo y de evaluación del conocimiento matemático en la educación básica. Sin embargo, evaluaciones internacionales (PISA 2009, 2012) y nacionales (Unidad de Medición de la Calidad Educativa 2004; Ministerio de Educación 2012) muestran que el conocimiento lógico-matemático de los adolescentes no se desarrolla como se espera, pues a lo largo de la educación básica y especialmente al término de la secundaria, muchos estudiantes tienen un manejo insuficiente de nociones lógicas y matemáticas fundamentales, las que se requieren para comprender progresivamente problemas de diversa índole y para potenciar posteriores aprendizajes en contextos académicos y/o profesionales. Investigaciones indican también que lo mismo ocurre en la universidad, tanto en el Perú como en el resto del mundo (Kavousian, 2005; Cherian, Kibria, Kariuki & Mwamwenda, 2001; Frisancho, 1996; Pitt, 1983).

Como sabemos, dadas ciertas condiciones de intercambio físico y social, nociones elementales como la clasificación, la seriación, el número, la cuantificación y las operaciones aditivas y multiplicativas, se van constituyendo y consolidando a lo largo del desarrollo infantil. Otras, como la noción de probabilidad por ejemplo, necesitan una mayor intervención de los sistemas de educación formal debido a su naturaleza más abstracta y porque las condicio-

[3] http://www.oecd.org/pisa/
[4] http://www.unesco.org/new/es/natural-sciences/science-technology/basic-sciences/mathematics/

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

nes de intercambio que posibilitan su construcción no son tan frecuentes en la mayoría de sistemas sociales (Piaget, 1972/2008; Piaget & Inhelder, 1951/1975).

Esquema operatorio formal de la operación combinatoria

El pensamiento formal implica la construcción de un sistema que coordina dos estructuras lógico-matemáticas: el sistema combinatorio y el grupo INRC. El primero permite la construcción de un universo de posibilidades operatorias diferenciadas y articuladas como un *conjunto de partes*, que el segundo relaciona al compensar las transformaciones posibles dentro un mismo sistema. La operación combinatoria es parte del pensamiento formal y aparece como una complejización de los esquemas aditivos y multiplicativos. Para entender apropiadamente la operación combinatoria es importante distinguir sus dos aspectos, el lógico y el matemático. La combinatoria lógica tiene un carácter más próximo a las propiedades cualitativas de los objetos y a la actividad experimental del sujeto (Inhelder y Piaget; 1955/1985; Barratt, 1975; Allaire-Dagenais, 1984). Está caracterizada por las mismas propiedades del sistema de conjunto del pensamiento formal: construcción de casos posibles por disociación de factores y neutralizaciones-variaciones sistemáticas para controlar los efectos de combinaciones que se relacionan en una totalidad, donde los cambios están compensados por diversas operaciones. Por ejemplo, se utiliza para descubrir cuáles son los compuestos que causan una determinada reacción química, cuáles son los factores que hacen que un objeto pueda flotar, o qué partes de un circuito electrónico complejo hacen que este no funcione apropiadamente. En cambio, la combinatoria matemática, si bien tiene las mismas propiedades generales de la combinatoria lógica, abstrae las propiedades cualitativas de los objetos generando diversas modalidades de cuantificación por la coordinación de diferentes operaciones, las que son generalizables a distintos dominios del pensamiento. Las axiomatizaciones que permite esta generalización de la operación combinatoria han sido desarrolladas por las matemáticas discretas. En

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

sus versiones más simples, que son el objeto de este estudio, la operación se despliega para enumerar todos los grupos posibles que pueden formarse dados ciertos elementos y condiciones en un problema (Inhelder y Piaget; 1955/1985; Vilenkin, 1972; Grimaldi, 1997). Por ejemplo, aparece cuando una persona desea saber de cuántas maneras distintas se pueden mezclar ciertos ingredientes para hacer una preparación, de cuántas formas diferentes puede ordenarse un grupo de personas para tomar una foto o de cuántas maneras pueden repartirse cierto número de objetos en distintos contenedores.

Operaciones de la combinatoria matemática

Entre los aspectos más básicos de la combinatoria matemática simple se encuentran la formación de grupos ordenados o no ordenados, la selección de algunos (*m*) o todos (*n*) los elementos de una población y la posibilidad de que los elementos puedan o no repetirse al interior de los grupos. Estos y otros aspectos dan lugar a una variedad de operaciones combinatorias adecuadas para distintos problemas (Piaget y Inhelder, 1951/1975; Vilenkin, 1972; Grimaldi, 1997). Por ejemplo, si se trata de formar grupos ordenados tomando todos los elementos dados, la operación correspondiente es la de *permutaciones*, que son posibles cambios de posición de todos (*n*) los elementos en un problema. Estos agrupamientos posibles pueden calcularse mediante el factorial del número total de elementos [$P_n = n! = (n)\ (n-1)\ (n-2)\ldots\ 2.1$]. Ahora, si se trata de formar o calcular agrupaciones no ordenadas de algunos (*m*) o todos los elementos (*n*), la operación a efectuar es la de *combinaciones* propiamente dichas. En su versión simple, esta se calcula abstrayendo a la cantidad de permutaciones posibles de todos los elementos, la cantidad de permutaciones de los que se han seleccionado (*m*) en conjunción con la de los elementos no seleccionados (*n – m*) [$C_n^m = n!\ /\ m!(n-m)!$]. Esto, porque una permutación es un cambio en el orden y en el caso de las combinaciones, el orden no se considera. Una síntesis de ambas operaciones es la de *arreglos* posibles de *n* elementos tomados de *m* en *m*. Se calculan abstrayendo a las permutaciones posibles de todos los elementos, solo las permutaciones de los que no se han escogido [A_n^m = n! / (n-m)!]. En este caso el orden a abstraer es el de los elementos no seleccionados, ya que en los que se han elegido el orden sí se considera. Estos ejemplos no agotan todas las variantes de la combinatoria matemática, ya que pueden incluirse diversos tipos de elementos y parámetros en la formación de los grupos (Vilenkin, 1972; Grimaldi, 1997). Además, los problemas pueden complejizarse debido al modelo implícito que los organiza. Por ejemplo, estos modelos pueden ser de *selección* (muestreo), *distribución* (mapeo, asignación) o *partición* (divisiones de un conjunto en subconjuntos) (Dubois, 1984; en Batanero, Navarro-Pelayo y Godino, 1997).

Importancia y desarrollo del esquema operatorio formal de combinatoria

El desarrollo de la capacidad combinatoria es vital para la evolución del pensamiento, pues las posibilidades que abre no se limitan al aprendizaje de la matemática sino que se prolongan a muchos campos de interacción cotidiana y académica. En efecto, la capacidad combinatoria posibilita y promueve el pensamiento sistemático, la consideración explícita de las posibilidades, la generalización reflexiva de procedimientos (heurísticos, algorítmicos), la optimización de métodos de registro o listado, la búsqueda de verificaciones exhaustivas, el razonamiento proposicional e hipotético-deductivo, entre otras capacidades fundamentales. Además, el desarrollo apropiado de esta herramienta condiciona positivamente un mejor entendimiento, planteamiento y resolución de los problemas que se generan en la actividad de las diversas disciplinas científicas (Piaget & Inhelder, 1951/1975; Inhelder & Piaget, 1955/1985; Kapur, 1970; Vilenkin, 1972; Piaget & García, 1982/2008).

Lamentablemente, la investigación ha demostrado que muchas personas tienen dificultades en el despliegue de esta operación. En general, estas dificultades están relacionadas a consideraciones incompletas o inapropiadas sobre la estructura, los elementos y las condiciones que definen los problemas, al manejo de estrategias insuficientes para resolverlos y a las limitaciones de la intuición inmediata que reduce los esquemas formales necesarios para su solución a sus versiones más primitivas o constreñidas (Fischbein & Grossman, 1997; Hadar & Haddas, 1981; Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997; Roa, Batanero & Godino, 2001; Kavousian, 2005). En este marco, el presente estudio tiene como objetivo evaluar el esquema operatorio formal de combinatoria matemática en estudiantes universitarios que se encuentran en los primeros años de formación. La pregunta que guía esta investigación es si estos estudiantes, ante problemas de combinatoria matemática, exhiben o no las principales características del sistema combinatorio: la creación de un conjunto de partes y la disociación de factores por medio de abstracciones y neutralizaciones-variaciones sistemáticas de elementos al interior de estos factores.

Método

Este estudio sigue el método clínico-crítico de Jean Piaget, que consiste en plantear tareas que tengan a la base la estructura de pensamiento que se busca evaluar. Lo característico es que no sólo se recopila lo observado antes de la respuesta al problema, sino que a partir de esta se generan hipótesis y nuevas situaciones o problemas, expresados en nuevos cuestionamientos que varían los elementos y condiciones de la tarea. Además, siempre se piden y recogen las explicaciones y justificaciones de los participantes, con el objetivo de reconstruir el proceso de razonamiento que los llevó a sus respuestas particulares (Smith, 1993; García, 2000; Delval, 2001; Ducret, 2004; Morgado & Parrat, 2006).

Participantes

Participaron 12 estudiantes de una universidad privada de la ciudad de Lima, de entre 16 y 20 años, 6 hombres y 6 mujeres, que cursan el primer o segundo año de formación. La mitad (3 hombres y 3 mujeres) eran de la facultad de Letras y la otra mitad de la de Ciencias. La selección se hizo por contacto directo con los participantes, quienes firmaron un consentimiento informado aceptando las condiciones del estudio y autorizando la grabación de la entrevista. La evaluación se llevó a cabo de manera individual en el campus universitario, en una sesión previamente acordada.

Tareas y Materiales

Tareas 1 y 2: Se tomaron dos ejercicios de la investigación de Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997), para evaluar el estado del esquema operatorio formal de combinatoria a un nivel abstracto. El primer problema es sobre arreglos con repetición (AR_n^m) y el segundo sobre combinaciones simples (C_n^m). Según la investigación original ambos tienen un nivel de dificultad medio. Los materiales usados fueron dos fichas plastificadas, cada una con uno de los problemas, hojas de papel, lápiz y borrador para el participante.

Tarea 1: *En una caja hay cuatro bolas numeradas (con 2, 4, 7 y 9, respectivamente). Debes sacar una de ellas y anotar el número que tiene, para luego devolverla a la caja. Tienes que repetir este proceso hasta que tengas anotado un número de tres dígitos. ¿Cuántos números posibles de tres dígitos puedes formar con estas cuatro bolas? Por ejemplo, podrías obtener el número 222.*

Tarea 2: *Cinco alumnos, Elisa, Fernando, Jorge, Lucía y María, se ofrecieron como voluntarios para ayudar al profesor borrando la pizarra. ¿De cuántas formas distintas puede el profesor escoger a tres de sus estudiantes para que borren la pizarra? Por ejemplo, podría escoger a Elisa, María y Jorge.*

Tarea 3: Tarjetas con letras y números. Se tomó esta tarea del estudio de Roberge y Flexer (1979) sobre el pensamiento formal. La estructura matemática de esta tarea es la de variaciones con repetición. Los materiales usados fueron cuatro tarjetas con letras (A, B, C, D) por una de sus caras y números (3, 5, 7, 9) por la otra cara. Además se proporcionó una hoja de respuestas, lápiz y borrador.

Cara superior	A	B	C	D
Cara inferior	3	5	7	9

Figura 1. Tarjetas con letras y números

Tarea 4: Tarjetas para combinar. Se extrajo esta tarea de la investigación de Scardamalia (1977) sobre el pensamiento combinatorio, para evaluar el esquema operatorio de combinatoria a nivel de la acción. La estructura matemática de la tarea es también la de variaciones con repeticiones. A diferencia de la investigación de Scardamalia, no se hizo una fase de entrenamiento, sino que se buscó la solución espontánea utilizando 3 grupos de tarjetas y 3 valores para cada grupo. Los materiales utilizados fueron 20 tarjetas (5 de colores, 5 con líneas bancas, 5 translúcidas y con símbolos y 5 con formas geométricas caladas; 2 de cada grupo fueron tarjetas de ejemplo o apoyo), hojas en blanco, lápiz y borrador.

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

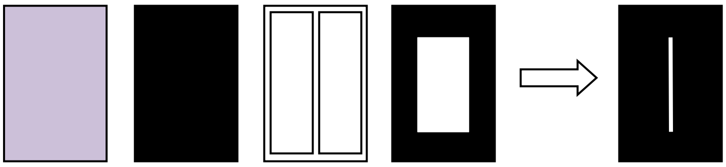


Figura 2. Tarjetas para combinar. Se muestra, luego de la flecha, el resultado de la superposición de las cuatro primeras: un paralelogramo morado con puntos, marco negro, y una línea vertical que lo atraviesa

Procedimiento

El procedimiento para la administración de estas tareas fue el siguiente:

1. Se empezó en cada caso entregando el material (la ficha con el problema o las tarjetas, una hoja en blanco, lápiz y borrador, y hoja de respuesta cuando correspondía).
2. Se explicó la tarea. Por ejemplo, para la primera tarea se indicó que debía resolverse usando la hoja en blanco para hacer apuntes. Para la tarea tres se dijo: "*Lo que voy a pedirte es que en esta hoja, en los casilleros, escribas todos los distintos grupos de 4 elementos que puedes armar manipulando estas tarjetas. Para hacer esto, sólo puedes voltear las tarjetas (en su mismo lugar) sin alterar el orden en que están dispuestas*".
3. De ser necesario, se pidió que leyeran el problema detenidamente y se constató que lo hubieran entendido.
4. Se observó lo que hacía el participante hasta que terminaba y daba una respuesta. De ahí en adelante las preguntas que orientaban la discusión fueron: "¿A qué respuesta has llegado?" "¿Qué método has utilizado para resolver el problema? ¿Por qué?" y "¿Cómo podrías verificar que la solución y la forma de hacerlo fueron las correctas?". Algunas preguntas podían ser innecesarias si el participante daba respuestas que espontáneamente respondían a varias preguntas al mismo tiempo. Si estas res-

puestas no eran satisfactorias se repreguntaba o se contra-sugestionaba, con el objetivo de que explique y justifique lo que había hecho.

5. Se registraron las acciones u operaciones realizadas, las respuestas a los problemas y las explicaciones/justificaciones. Para esto, se elaboró una ficha que permitió consignar las respuestas, el procedimiento usado y el grado de sistematización, a la par que permitía también llevar un registro anecdótico. Todas las evaluaciones se grabaron en audio y también se recogieron y analizaron las hojas usadas para hacer anotaciones.

Resultados

Un panorama general del desempeño de los participantes se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Aciertos y errores según participante, sexo, facultad, grupo* y tarea

Participante	Sexo/Facultad	Grupo*	Tarea 1	2	3	4	Total
(6) CAM	Fem/Letras	I	✓	✓	✓	✓	4/4
(9) DIE	Mas/Ciencias		✓	✓	✓	✓	4/4
(2) EMI	Mas/Letras	II	✓	×	✓	✓	3/4
(5) ALO	Mas/Letras		×	✓	✓	✓	3/4
(10) LIL	Fem/Ciencias		✓	✓	×	✓	3/4
(12) MAR	Fem/Ciencias		✓	×	✓	✓	3/4
(4) FRE	Mas/Ciencias	III	✓	×	✓	×	2/4
(11) ANG	Fem/Ciencias		×	✓	×	✓	2/4
(3) CAR	Mas/Letras		×	✓	×	✓	2/4
(7) XIO	Fem/Letras		×	✓	×	✓	2/4
(1) ADRI	Fem/Letras	IV	×	×	×	✓	1/4
(8) KEV	Mas/Ciencias		×	×	×	×	0/4
Total			6/12	7/12	6/12	10/12	29/48

* Organiza los casos según el porcentaje de aciertos

La tabla muestra que no hubo diferencias marcadas según sexo y facultad. Esto es consistente con los aspectos generales del pensamiento formal mostrados en las investigaciones de Piaget e Inhelder (1955). Se observó un mayor número de aciertos en la tarea 4, lo que podría deberse a que siendo también las tareas 1 y 2 problemas de *arreglos con repeticiones*, se generó un efecto de práctica y ajuste que mejoró el desempeño de los participantes, tal y como han mostrado, entre otras, las investigaciones de Scardamalia (1977), Rosenthal (1979) e English (1993).

En la tabla 2 se muestra una categorización más detallada de las respuestas de los participantes. Se cruzan dos niveles de organización:

Nivel de logro

Categoría 1: *Resuelve la tarea sin ayuda*. El participante usa un método adecuado, por ejemplo, registros o pruebas de combinaciones sistemáticas o una fórmula matemática apropiada que le permite resolver la tarea sin la intervención del evaluador.

Categoría 2: *Resuelve la tarea con ayuda*. En este caso el participante logra usar un método adecuado para resolver la tarea gracias al apoyo u orientación del evaluador por medio de preguntas, contra sugestiones o sugerencias.

Categoría 3: *No resuelve la tarea*. El participante no usa un método adecuado para resolver la tarea y falla en resolverla, aún cuando el evaluador hubiera intervenido con alguna pregunta, apoyo o contra sugestión.

Nivel de razonamiento

Categoría A: *Razonamiento apropiado*. La explicación vinculada a la resolución de la tarea evidencia que el participante ha conceptualizado, en diferentes grados, las estructuras de pensamiento necesarias para comprender y

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

resolver el problema. Logra verbalizar sus estrategias de sistematización y verificación, así como las razones de su uso, y comprende la lógica subyacente a la tarea.

Categoría B: *Razonamiento en desequilibrio*. La explicación que da el participante es demasiado general, parcial o incompleta. La verbalización es simple, poco reflexiva y no da cuenta completamente de las acciones desplegadas y el proceso lógico que implican, especialmente si este ha sido adecuado.

Categoría C: *Razonamiento mecánico*. El participante explica su acción verbalizando aspectos de un cálculo aditivo o multiplicativo de posibilidades. Por ejemplo, ofrece expresiones simbólicas como la fórmula de arreglos con posibilidad de repetición ($n^m = n \times n\ldots$ [m veces]). Sin embargo, no ahonda en la lógica de la fórmula o el porqué de su uso.

Categoría D: *Razonamiento inapropiado o ausente*. En este caso el participante no da una explicación o la que da es claramente errónea. La explicación no va de la mano con los requerimientos lógicos de la tarea, es decir, ofrece una verbalización de un procedimiento que no es el que la tarea demanda.

Tabla 2. Frecuencia de respuestas según nivel de logro y nivel de razonamiento

	Nivel de Razonamiento				
Nivel de Logro	(A) Razonamiento apropiado	(B) Razonamiento desequilibrio	(C) Razonamiento mecánico	(D) Razonamiento inapropiado	Total
(1) Resuelve la tarea sin ayuda	14	10	3	-	27
(2) Resuelve la tarea con ayuda	1	1	-	-	2
(3) No resuelve la tarea	-	10	1	8	19
Total	15	21	4	8	48

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Con este conteo se muestra que las tendencias generales siguen siendo congruentes con un desarrollo formal de la operación combinatoria matemática: la mayoría de casos son aciertos con razonamientos apropiados. Sin embargo, un análisis más detallado de cada participante a través de las cuatro tareas, o entre participantes en la misma tarea, revela que los desempeños evidencian variaciones e indican diversos niveles de desarrollo de la combinatoria matemática. A modo de ejemplo, a continuación se presentan algunos casos detallados que muestran estas variaciones y ejemplifican los grupos I, II, III y IV de la tabla 1. Se presentan los procedimientos utilizados por los participantes, sus respuestas y las explicaciones ofrecidas.

Caso 1. Grupo I. DIE, 17 años, Ciencias.

Tarea 1. Da la respuesta correcta, resuelve la tarea sin ayuda y razona apropiadamente. Respuesta: *"Sesenta y cuatro. Cada vez que saco un número, puedo hacerlo dentro de 4 números diferentes. Luego me dice que lo regrese, que la siguiente sacada voy a volver a sacar entre 4. Si en la primera me da cuatro posibilidades, 2, 4, 7, 9, en la siguiente tengo cuatro posibilidades multiplicadas por las cuatro posibilidades que pueden ser y con el siguiente es igual, sería cuatro al cubo. Porque tienes para la primera, el 2, el 4, el 7, y el 9. En la siguiente te puede salir nuevamente 2-4-7-9, 2-4-7-9… para cada número de la primera y así en cada una de las revisiones. En cada caso hay cuatro y por cada uno de esos casos va a ser cuatro. Cuatro por cuatro por cuatro".*

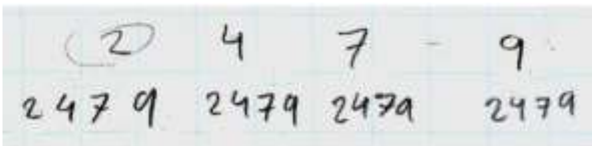


Figura 3. Explicación dada por DIE de la multiplicación de posibilidades

Tarea 2. Da la respuesta correcta pero confunde un dato del problema y hace parejas en lugar de tríos. Resuelve eso sin ayuda y razona apropiadamente. Respuesta: *"Ya. Supongamos que se escoge a Elisa… puede ser con Fernando, con Jorge, con Lucía, con María. Luego escojo a Fernando pero ya cogí las posibilidades con Elisa, así que Fernando con Jorge, con Lucía y con María y así con cada uno. En la primera puedes sacar cuatro, luego tres, luego dos y uno en la última pareja".*

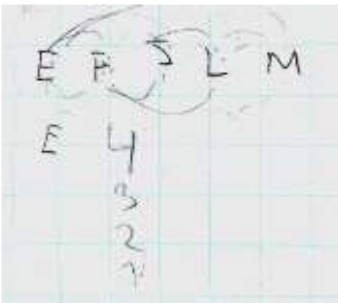
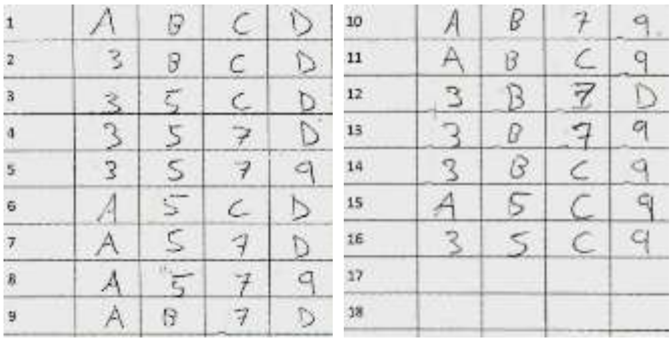


Figura 4. Conteo sistemático de DIE para formación de parejas posibles

Tarea 3. Antes de dar la respuesta correcta, va explicando su razonamiento y ajusta su respuesta final sin ayuda. Respuesta: *"Primero puse todos en letras, luego cambié solo el primer elemento; el primero, el segundo y letras; del primero al tercero y letra; luego todos números. Con el segundo repetí lo que había hecho acá. Bajé uno más al tercero, hasta que llegué a la última letra. No, todavía faltan, me salté uno, dos… creo que así debe ser. No puedo estar seguro pero en el momento no se me ocurren más".*

ISSN: 1984-1655



1	A	B	C	D	10	A	B	7	9
2	3	B	C	D	11	A	B	C	9
3	3	5	C	D	12	3	B	7	D
4	3	5	7	D	13	3	B	7	9
5	3	5	7	9	14	3	B	C	9
6	A	5	C	D	15	A	5	C	9
7	A	5	7	D	16	3	5	C	9
8	A	5	7	9	17				
9	A	B	7	D	18				

Figura 5. Listado de posibilidades de la tarea 3, elaborado por DIE

Tarea 4. Da la respuesta correcta sin ayuda y razona igualando el problema a uno anterior. Respuesta: *"Ochenta y uno. Para cada uno de estos colores puedes usar tres de estas de acá (fondos), para cada una de estas combinaciones puedo escoger tres de estos (marcos), y para cada una de estas combinaciones, otros tres más de estos (figuras). Igual que con las bolitas, tres por tres por tres por tres posibilidades"*.

DIE organiza adecuadamente los problemas aunque puede equivocarse en el registro de los datos. Es capaz de explicar las combinaciones mediante multiplicaciones progresivas, hacer conteos sistemáticos fijando y variando elementos, construir listados medianamente sistemáticos, recurrir a la verificación cuando la sistematización no es suficiente, monitorear verbalmente su actividad y generalizar procedimientos a algunos problemas de similar estructura para resolverlos razonando.

Caso 2. Grupo II. EMI, 20 años, Letras.

Tarea 1. Da la respuesta correcta sin ayuda. Organización correcta del problema, explicación limitada. Respuesta: *"Es sesenta y cuatro. En el primero si hay 4 bolas, hay cuatro números posibles para que salgan. En el segundo y en el tercero también es lo mismo. Como siempre hay 4 posibilidades, multiplico las posibilidades de cada una de las columnas y sale 64. Me lo enseñaron en razonamiento mate-*

ISSN: 1984-1655

mático. No recuerdo el por qué verdaderamente pero se ha quedado mecanizado en mi matemática".

Tarea 2. Da una respuesta incorrecta. Procedimiento mecánico y razonamiento inapropiado. Respuesta: *"Sesenta. El mismo sistema, pero como acá no se puede repetir, el primero tiene 5 posibilidades. Como acá ya se escoge uno, el siguiente tiene una posibilidad menos. En algo estoy fallando, déjame ver. Creo que no es. Me puedes dar un momentito porque estoy dudando. No, sí es 60".*

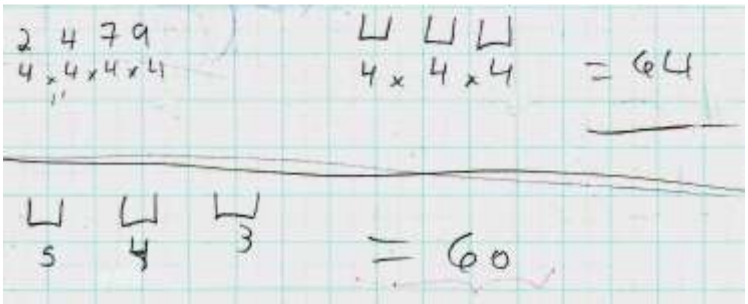


Figura 6. Multiplicación de posibilidades por EMI en las tareas 1 (arriba) y 2 (abajo)

Tarea 3. Da una respuesta correcta sin ayuda. Rehace el listado con bastante orden y simetría. Razona apropiadamente sobre la multiplicación de posibilidades. Respuesta: *"¿Puedo borrar para hacerlo más ordenado? Es dieciséis. Si acá hay dos posibilidades, conjugándolo con esto hay dos posibilidades más, dos por dos son cuatro posibilidades en total. Porque A puede ser A-B o A-5 y 3-B o 3-5. Con estas dos, son ocho posibilidades y más estas dos, son dieciséis posibilidades en total."*

1	A	B	C	D	9	3	B	C	D
2	A	B	C	9	10	3	B	C	9
3	A	B	7	D	11	3	B	7	D
4	A	B	7	9	12	3	B	7	9
5	A	5	C	D	13	3	5	C	D
6	A	5	C	9	14	3	5	C	9
7	A	5	7	D	15	3	5	7	D
8	A	5	7	9	16	3	5	7	9

Figura 7. Listado de posibilidades de la tarea 3, elaborado por EMI

Tarea 4. Da la respuesta correcta sin ayuda. Razona igualando el problema a los anteriores. Respuesta: *"A ver. Tres por tres, nueve; por tres, veintisiete; y por tres, ochenta y uno en total. El mismo sistema".*

Al principio su organización de los problemas depende del despliegue de procedimientos aprendidos y automatizados, que ajusta de forma imprecisa y sin verificar. Esto lo lleva en un caso al éxito y en otro al error. Sin embargo, manifiesta dudas, corrige y ajusta sus procedimientos al punto de construir listados muy ordenados articulando neutralizaciones y variaciones progresivas, que justifica con operaciones multiplicativas. En general, manifiesta estrategias guiadas por una economía de procedimientos mediante el algoritmo, el orden y el razonamiento explícito.

Caso 3. Grupo III. ANG, 16 años, Letras.

Tarea 1. Da una respuesta incorrecta. Organiza bien el problema pero usa un procedimiento de forma mecánica. Cambia de estrategia luego de las preguntas pero no verifica lo suficiente. Respuesta: *"Es combinatorias de cuatro en tres. Tengo cuatro cifras y tengo que formar un número de tres. Como no importa el orden y puedo repetir, sería combinatorio. De cuatro números que tenga, los agrupo de tres en tres y esta fórmula tiene que ser igual a algo. Bueno, la forma práctica es cuatro por tres por dos y sin el factorial de uno. Eso sería veinticuatro… ¿Probando?*

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Sí, hay más números. Acá hay once y como son cuatro cifras, once por cuatro, cuarenta y cuatro. Acá me faltaron algunas porque son 11 por cada uno."

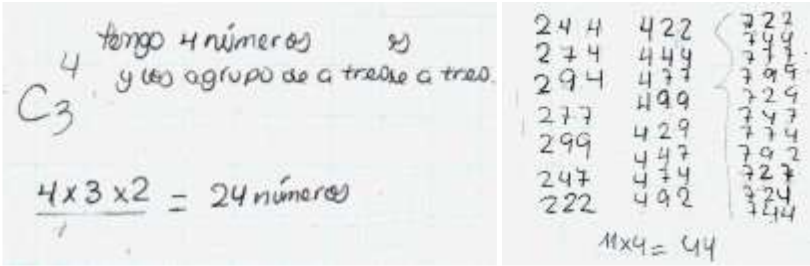


Figura 8. Cálculo de posibilidades con fórmula, hecho por ANG. Luego, listado de posibilidades con cálculo

Tarea 2. Da una respuesta inicial incorrecta, organiza medianamente un listado de posibilidades, corrige su estrategia luego de algunas preguntas y da la respuesta correcta. Verbaliza sus acciones. Respuesta: *"Son veinte, he probado con cada uno. Primero con este, formando grupos de tres. No sé si está bien porque siempre que hago así me confundo. Pero es que no me cuadra con el combinatorio porque antes me equivoqué. El otro combinatorio que es una fórmula ya me olvidé. No, acá no me importa el orden. Entonces quedan uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez".*

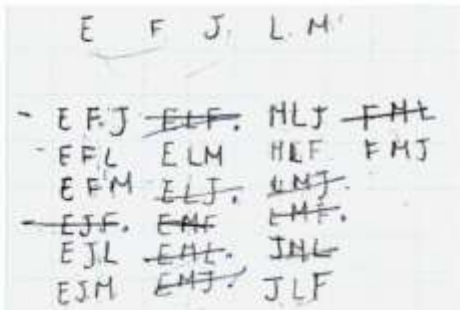


Figura 9. Listado de posibilidades y descarte de repeticiones de ANG

Tarea 3. Da una respuesta incorrecta y su explicación revela sus dificultades para organizar el listado. Respuesta: *"Ya. Veintiuno, tal vez veintidós,* *pero me mareo con tanto cambio. Primero quería seguir un orden. Comencé por todos los tres, pero de ahí me desconcentré y empecé a seriar y a fijarme si no había duplicado. Puede ser que haya una que se me ha pasado pero he estado verificando, más o menos".*

1	A	B	C	D
2	3	B	C	D
3	A	5	C	D
4	A	B	7	D
5	A	B	C	9
6	3	5	C	D
7	3	B	7	D
8	3	B	C	9
9	A	5	C	D
10	3	5	C	D.
11	3	5	7	D
12	A	5	7	D
13	3	5	7	9
14	A	5	7	9
15	3	B	7	9
16	A	B	7	9
17	A	5	7	D
18	3	5	C	9
19	3	B	C	9
20	3	B	C	D
21	A	5	C	9
22	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Figura 10. Listado de posibilidades realizado por ANG

Tarea 4. Da la respuesta correcta. Muestra manualmente cómo se harían las combinaciones usando dos grupos de tarjetas, luego calcula cuántas serían si tomara los 4 grupos. Su explicación es menos detallada que sus acciones. Respuesta: *"Creo que ochenta y uno. Por el método combinatorio. Si tengo una de estas, hay tres ¿no? Si tengo tres de estas, tres de estas, tres de estas y tres de estas, al combinar todas va ser el principio multiplicativo: tres por tres, nueve; por tres, veintisiete; por tres, ochenta y uno".*

La capacidad de ANG para organizar estos problemas varía. Como recurso inicial, intenta usar procedimientos aprendidos pero sin recordar los algoritmos correctos. Ante esto cambia de estrategia, pero en sus listados se aprecian neutralizaciones desarticuladas de variaciones progresivas. Además, sus procedimientos de verificación no dan apoyo a sus listados poco sistemáticos y solo son efectivos cuando parten de la preguntas del evaluador. Esto afecta sus cálculos con operaciones más simples. Sin embargo, es capaz de ajustar los intercambios sistemáticos al nivel de la acción o manipulación, lo que le permite hacer cálculos con datos precisos aunque sus explicaciones permanecen superficiales y solo generalizan lo realizado en los problemas anteriores.

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Caso 4. Grupo IV. ADRI, 17 años, Ciencias.

Tarea1. Da una respuesta incorrecta. No comprende el problema y hace un listado aleatorio. Su explicación es confusa. Respuesta: *"Me podrían salir otros números. No sé si la respuesta es exacta. Es un cálculo. Pueden ser más. Creo que acá [cifra 2] se van a repetir tres números que hay aquí [en 4] y acá [en 7] se van a repetir otra vez porque son los mismos números. Y cuando lleguemos aquí [a 9] solo van a poder ser tres números. Los alterno. Me salen tres números así. Creo que es porque son de tres dígitos".*

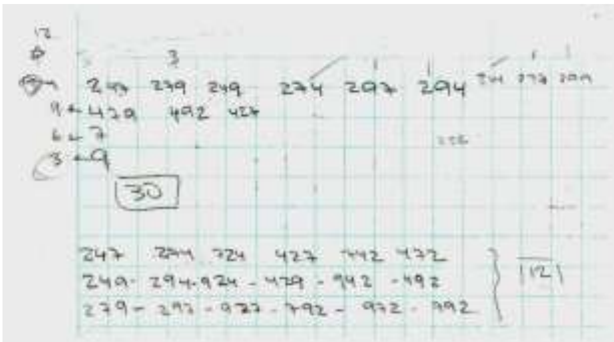


Figura 11. Listado desordenado de posibilidades realizado por ADRI

Tarea2. Da una respuesta equivocada. El listado es medianamente ordenado pero no es completo. Su explicación es superficial. Respuesta: *"Falta Jorge. Son nueve. He dejado a Elisa y he alternado los demás. Después he hecho lo mismo con Fernando. ¿No se puede repetir ninguna, cierto? O sea, no se pueden repetir en cantidad. ¿O podría repetir el orden? No. No creo que se esté pasando nada".*

Figura 12. Listado de posibilidades de nombres, de ADRI

ISSN: 1984-1655

Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Tarea3. Da una respuesta incorrecta. El listado se va desordenando y no se da cuenta que escribió mal una posibilidad. Su explicación es superficial. Respuesta: *"He alternado el orden. Voy moviendo aleatoriamente y se repiten los números. Por ejemplo, A-5-C-9 está por acá. Puedo variar otra vez este y este, por ejemplo, A-B-7-9 o A-B-C-9"*.

1	A	B	C	D
2	3	B	C	D
3	A	5	C	D
4	A	B	7	D
5	A	B	C	9
6	3	5	B	C
7	3	B	9	D
8	3	B	C	9
9	A	5	7	D
10	A	5	C	9
11	3	5	C	D
12	3	B	7	9
13	B	5	7	D
14	A	5	7	9
15	3	5	C	9
16	3	5	7	9
17	A	B	7	9
18				

Figura 13. Listado de posibilidades de ADRI

Tarea4. Da la respuesta correcta. Ordena el problema y manipula las tarjetas haciendo un conteo en voz baja con sólo tres grupos de tarjetas. Su explicación solo describe lo que hizo cuando manipulaba las tarjetas. *"Creo que es veintisiete. O sea 27 por cada tarjeta empezando con el círculo… entonces en total, ochenta y uno. Comencé alternando así, después se cambia esto y después este y luego se regresa a este pero ya no se cuenta el otro, solo se cuenta este"*.

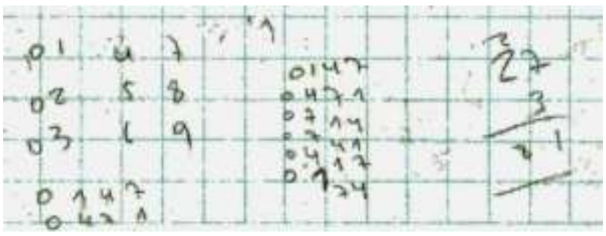


Figura 14. Conteo y cálculo de posibilidades luego de un ordenamiento manual, realizado por ADRI

ADRI muestra dificultades para organizar los problemas y condiciones para la formación de los grupos. Aunque sus primeros intentos de listado son menos ordenados, realiza ajustes que muestran, en alguna medida, neutralizaciones y variaciones articuladas. Sin embargo estas no se apoyan en estrategias de verificación sistemáticas, lo que hace que pueda obviar posibilidades o confundir datos. Finalmente es capaz de organizar mejor su acción para hacer conteos y operaciones más simples, pero sólo describe sus acciones y no explica el porqué del procedimiento.

Discusión y conclusiones

Los métodos y las explicaciones dadas por los participantes al resolver las tareas manifiestan en diferente forma disociaciones de factores, construcciones de conjuntos de partes y coordinaciones de operaciones aditivas y multiplicativas con abstracciones, la que son características básicas de la operación combinatoria. Sin embargo, también se observaron distintos niveles de organización y comprensión de los problemas, grados variados en el dominio de las estrategias de sistematización y de verificación, y dificultades y formas de ajuste distintas que condujeron en cada caso al éxito o al error. Esto muestra la alta complejidad de la actividad cognoscitiva de los seres humanos.

Los participantes que resolvieron adecuadamente todas o casi todas las tareas exhiben un mayor equilibrio en la capacidad combinatoria que aquellos que fallaron al resolverlas. En sus anotaciones se observaron procedimientos (gráficas, esquemas y operaciones) que incluyen la disociación de factores y la construcción de un conjunto de partes para enumerar todos los casos posibles. Además, fueron capaces de explicar apropiadamente su actividad, lo que evidencia procesos de conceptualización y toma de conciencia. Algunos inclusive pudieron reconocer la similitud estructural y algunas diferencias entre las tareas, mostrando una generalización constructiva de la capacidad combinatoria aplicada a diferentes problemas. En estos participantes, la coordinación de procedimientos posibles de sistematización y verificación exhaustiva permitieron el monitoreo y autorregulación de su actividad y de las operaciones dirigidas a la solución correcta del problema. Al contrario, los participantes que fallaron en las tareas muestran menores niveles de articulación y un menor equilibrio en el desarrollo de su capacidad combinatoria. Desplegaron generalizaciones simples y desarticuladas porque aplicaron algoritmos aprendidos mecánicamente y no pudieron dar cuenta de las razones de su uso. Además, se observaron bajos niveles de sistematización poco articulados con estrategias de verificación, lo cual se expresó en listados en los que el desorden aumentaba progresivamente.

En conclusión, la variedad de desempeños observados en las diferentes tareas puede explicarse por la acción, más o menos efectiva y articulada, de los procesos que tienen que ver con el uso y construcción del esquema operatorio formal de combinatoria y con los procedimientos que lo regulan. Estas variaciones se vinculan tanto al concepto general de equilibración, que explica la construcción de las esquematizaciones cognitivas y los resultados de su uso (Piaget, 1978; Martí, 1990), como a los procesos de toma de conciencia y de significación que conceptualizan la actividad interna o externa del sistema cognitivo y la acción efectuada (Piaget, 1981, 1986, 2006; Piaget & García, 1997; Piaget & García, 1982/2008; García, 2000).).

Es importante señalar que en todos los casos, la interacción entre participantes y evaluador, que buscaba generar reflexiones sobre los aspectos claves del problema, permitió a los primeros corregir y ajustar sus desempeños en la resolución de los problemas. Así, tal como se aprecia en este estudio, el apoyo en la resolución de problemas hace en muchos casos que estos se comprendan y resuelvan mejor; otros estudios han mostrado que es posible desarrollar la capacidad de raciocinio combinatorio mediante la intervención pedagógica y la enseñanza razonada de estrategias (Fernandes, Ferreira & Roa, 2010; English, 1991, 1993; Barrat, 1975). En este sentido, resulta necesario que los programas de educación superior fomenten en los estudiantes la toma de con-

ISSN: 1984-1655

ciencia sobre los procesos involucrados en la construcción y el uso de herramientas cognitivas de mayor nivel de complejidad lógica y que no solamente enseñen algoritmos. Los profesores, tanto los de educación básica como los de educación superior, necesitan recibir mucha mayor formación acerca de los procesos de construcción del conocimiento, específicamente de la operación combinatoria en este caso, pues de otro modo no podrán promoverlos en las aulas. Igualmente, no resulta relevante que los procesos de evaluación se enfoquen simplemente en identificar si los individuos poseen o no la capacidad combinatoria; más bien, estos deben apuntar a describir y explicar sus múltiples manifestaciones según niveles de desarrollo.

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Referencias

Allaire-Dagenais, L. Étude transversale des structures opératoires formelles de combinatoire et de double réversibilité. *Canadian Journal Of Behavioural Science/Revue Canadienne Des Sciences Du Comportement*ro, vol. 16, n. 3, p. 238-248, enero 1984.

Barratt, B. Training and transfer in combinatorial problem solving: the development of formal reasoning during early adolescence. *Developmental Psychology*, vol. 11, n. 6, p. 700-704, febrero 1975.

Batanero, C.; Navarro-Pelayo, V.; Godino, J. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies In Mathematics*, vol. 32, n.2, p. 181-199, febrero 1997.

Cherian, V.; Kibria, G. Kariuki, P.; Mwamwenda, T. Formal operational reasoning in African university students. *The Journal of Psychology*, vol. 122, n. 5, p. 487-498, enero 2001.

Delval, J. *Descubrir el pensamiento de los niños: introducción a la práctica del método clínico*. Madrid: Paidós Ibérica 2001.

Ducret, J.J. Methode clinique-critique piagetienne. *Service de la recherché en education,* Gèneve, 2004.

English, L. Young Children’s Combinatoric Strategies. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, n. 5, p. 451-474, octubre 1991.

English, L. Children's Strategies for Solving Two- and Three-Dimensional Combinatorial Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, n. 3, p. 255-273, mayo 1993.

Fernandes, J.; Ferreira Correia, P.; Roa Guzmán, R. Aquisiçaõ das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervençaõ de ensino. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 13, n. 2, p. 215.242, mayo 2010.

Fischbein, E.; Grossman, A. Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 34, n. 1, p. 27-47, octubre 1997.

Frisancho, S. *Razonamiento probabilístico en estudiantes universitarios*. Pontifica Universidad Católica del Perú/ Escuela de Graduados. Documento no publicado, 1996.

García, R. *El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos*. Barcelona: Gedisa 2000.

Grimaldi, R. *Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley 1997.

Hadar, N.; Hadass, R. The Road to Solving a Combinatorial Problem Is Strewn with Pitfalls. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 12, n. 4, p. 435-443, 1981.

Inhelder, B.; Piaget, J. *De la lógica del niño a la lógica del adolescente: ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Buenos Aires: Paidós, 1955/1985.

Kavousian, S. *The development of combinatorial thinking in undergraduate students*. En: Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., Behm, S. L. (Eds.). Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2005.

Kapur, J. N. Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 3, n. 1, p. 111-127, septiembre 1970.

Martí, E. La perspectiva piagetiana de los años 70 y 80: de las estructuras al funcionamiento. *Anuario de Psicología,* vol. 44, p. 19-45, 1990.

Ministerio de Educación del Perú. *Evaluación Censal de Estudiantes 2012* (ECE 2012), 2012. Disponible en: http://umc.minedu.gob.pe/?p=1405 Extraído el 10 de Julio de 2013.

Morgado, L.; Parrat-Dayan, S. Conversas livres com a criaça: Problemas e métodos. *Associaçaõ Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional –ABRAPEE*, vol. 10, n. 2, p. 315-321, 2006.

Piaget, J. Introducción a la Epistemología Genética. Tomo I: El Pensamiento Matemático. Buenos Aires: Paidós, 1950/1975.

Piaget, J. Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development*, vol. 51, p. 40–47, 1972/2008.

Piaget, J. *La equilibración de la estructuras cognitivas: problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI, 1978.

Piaget, J. *La toma de conciencia*. Madrid: Morata, 1981.

Piaget, J. Essay on necessity. *Human Development*, vol. 29, p. 301-14, 1986.

Piaget, J. Reason. *New Ideas in Psychology*, vol. 24, p. 1-29, 2006.

Piaget, J.; Inhelder, B. *The origin of the idea of chance in children*. New York: W.W. Norton & Company, 1951/1975.

Piaget, J.; García, R. *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI, 1982/2008.

Piaget, J.; García, R. *Hacia una lógica de las significaciones.* Barcelona: Gedisa, 1997.

PISA (Programme for International Students Assessment). Resultados 2012. Disponible en http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm. Recuperado el 2 de Diciembre de 2013

ISSN: 1984-1655

PISA (Programme for International Students Assessment). Resultados 2009. Disponible en http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46619703.pdf. Recuperado el 22 de Octubre de 2013

Pitt, R. Development of a General Problem-Solving Schema in Adolescence and Early Adulthood. *Journal of Experimental Psychology: General, vol.* 112, n. 4, p. 447-584, 1983.

Roa Guzmán, R.; Batanero, C.; Godino, J. Dificultad de los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. *Números - Revista de didáctica de las matemáticas*, vol. 47, p. 33-47, septiembre 2001.

Roberge, J.; Flexer, B. Further examination of formal operational reasoning abilities. *Child Development*, vol. 50, n. 2, p. 478-484, junio 1979.

Rosenthal, D. Acquisition of formal operations: the effects of two training procedures. *The Journal of Genetic Psychology*, vol. 183, p. 125-140, 1979.

Scardamalia, M. Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: a demonstration using combinatorial reasoning tasks. *Child Development,* vol. 48, n. 1, p. 28-37, marzo 1977.

Smith, L. *Necessary knowledge: piagetian perspectives on constructivism*. Hove: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) Evaluación Nacional 2004. Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004 Informe pedagógico de resultados. Formación matemática. Tercero y quinto de secundaria, 2004. Disponible en http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf Extraído de 23 de Noviembre de 2013.

Vilenkin, N. *De cuántas formas? Combinatoria*. Moscú: Mir, 1972.

Recebido em: 04/12/2013
Aceite em: 22/01/2014