ISSN: 1984-1655

Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

O Modelo "Grupo Prático de Deslocamentos" em Psicologia e Epistemologia Genéticas e sua Formalização

Vicente Eduardo Ribeiro MARÇAL[1]

Ricardo Pereira TASSINARI[2]

Resumo

Neste artigo, temos como objetivo descrever e explicar o que é o modelo Grupo Prático de Deslocamentos, introduzido por Piaget em 1937 na obra La construction du réel chez l'enfant (Neuchâtel, Paris: Delachaux et Niestlé), essencial à compreensão da construção da noção de espaço. Para tanto, introduzimos a notação matemática para descrevê-lo, damos o significado dessa notação em termos dos comportamentos da criança e explicitamos a estrutura matemática de grupo subjacente ao modelo.

Palavras-Chave: Grupo, Grupo Prático de Deslocamentos, Construção do Espaço.

The Model "Practical Group of Displacements" in Genetics Psychology and Epistemology and its Formalization

Abstract

In this article, we aim to describe and explain what is the model "practical group of displacements", introduced in 1937 by Piaget's work La construction du reel chez l'enfant (Neuchâtel, Paris: Delachaux et Niestlé), essential to comprehension of the construction of space. To this end, we introduce the mathematical notation to describe it, we give the meaning of this notation in the child's behavior and explains the mathematical structure of group underlying the model.

Keywords: Group, Practical Group of Displacements, Construction of space.

[1] Professor Assistente no Departamento de Filosofia da Fundação Universidade Federal de Rondônia, coordenador do GEPEGRA – Grupo de Estudos e Pesquisa em Epistemologia Genética da Região Amazônica. E-mail: vicente.marcal@gmail.com.

[2] Professor Assistente Doutor do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da UNESP/Marília-SP, vice-coordenador do GEPEGE – Grupo de Estudos e Pesquisa em Epistemologia Genética e Educação. E-mail: logos-philosophia@gmail.com.

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Introdução

Vamos, nesse artigo, buscar explicitar o que é o modelo do Grupo Prático de Deslocamentos (GPD) introduzido por Piaget (2003) e citado por Piaget (1977) e por Piaget e Inhelder (2003).

Antes de explicarmos o que vem a ser a noção de grupo (que é uma estrutura matemática) vamos explicar a notação que usaremos e o que vem a ser o GPD, para depois mostrar que o GPD tem uma estrutura de grupo e, assim, justifica o nome a ele dado.

Pontos do Espaço e Deslocamentos

Introduzimos, nesta parte, a notação matemática relativa aos pontos do espaço e deslocamentos, que usaremos para descrever o GPD e estabelecermos o seu significado.

Vamos usar letras latinas maiúsculas A, B, C etc para denotar pontos no espaço; assim, podemos dizer que a criança se desloca de um ponto A a um ponto B, ou que desloca um objeto do ponto A para o ponto B.

Usaremos, então, a notação vetorial $\overrightarrow{AB}$ para denotar um deslocamento do ponto A ao ponto B, ou da própria criança, ou de um objeto que a criança desloca.

Na Figura 1 representamos o ponto A, o ponto B e o vetor deslocamento o qual denotamos por $\overrightarrow{AB}$, indicando o deslocamento de A para B.

Figura 1 - Vetor Deslocamento

ISSN: 1984-1655

A seguinte observação de Piaget exemplifica deslocamentos relativos a pontos A, B e O no espaço.

> Obs. 54 – Laurent, aos 0; 11 (22), está sentado entre duas almofadas A e B. Escondo, alternadamente, meu relógio sob cada uma delas: Laurent procura constantemente o objetivo no lugar onde ele veio a desaparecer, ou seja, tanto em A como em B, sem ficar preso a uma posição privilegiada como no decorrer da fase precedente (PIAGET, 2003, p. 61).

A Figura 2 representa a situação descrita na observação acima, em que se considera pelo menos os deslocamentos: i) $\overrightarrow{OA}$, ou seja, do ponto O (origem) ao ponto A (primeira das almofadas), ii) $\overrightarrow{OB}$ do ponto O (origem) ao ponto B (segunda das almofadas) e seus deslocamentos inversos $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{BO}$.

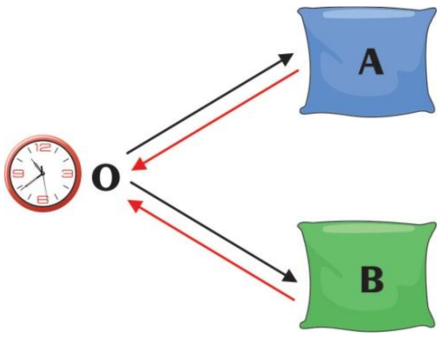

Figura 2 – Deslocamentos relativos aos pontos A e B

A Composição dos Deslocamentos

A seguir, introduzimos a notação matemática do GPD relativa à composição dos deslocamentos, bem como estabelecemos o seu significado.

A composição de dois deslocamentos contíguos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, que resulta no deslocamento $\overrightarrow{AC}$, é representada pela equação $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Notemos que, nela, usamos um asterisco $*$ para denotar a composição entre os dois deslocamentos contíguos. A equação $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ indica, então, que essa composição $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}$ é igual ao deslocamento $\overrightarrow{AC}$, o que é representado na Figura 3.

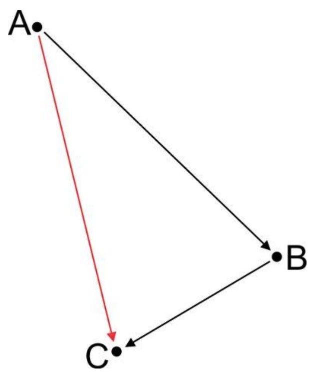

Figura 3 - Composição de Deslocamentos

Em termos do comportamento da criança, a coordenação dos deslocamentos, representada pela equação na notação vetorial exposta, significa que ela é capaz de compor e coordenar suas ações para efetuar deslocamentos tanto dos objetos que a cercam como de si mesma.

A Figura 3 pode representar a situação descrita na observação abaixo (no caso, o ponto C representa a Porta P). Assim, Laurent compõem os deslocamentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, coordenando-os no deslocamento final $\overrightarrow{AC}$ (composição A-B-P na observação abaixo).

> Obs. 117 – Laurent soube, a partir de 1; 2 (15), construir, ao caminhar, verdadeiros grupos de deslocamentos. [... Um] é relativo a uma porta que o atraía diariamente no decorrer de seu passeio no jardim. Para alcançar a porta P, ele era obrigado a seguir dois caminhos A–B e B –P, descrevendo um ângulo reto no ponto B, ou então a percorrer a trajetória retilínea A–P, passando diretamente pela grama. Ora, no início de suas saídas diárias, Laurent, tendo chegado em A, olhava de longe a porta P, mas acreditava que era obrigado, para alcança-la, a seguir a trajetória A–B–P(PIAGET, 2003, p. 206-207).

O Deslocamento Inverso e a Conduta do Retorno

Com a notação estabelecida, introduzimos as noções de deslocamento inverso e conduta do retorno que são, como veremos adiante, duas noções essenciais à definição do GPD.

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

A partir de um deslocamento $\overrightarrow{AB}$ a criança pode vir a realizar um deslocamento $\overrightarrow{BA}$, como nos mostra a Figura 4.

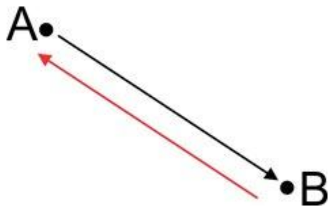

Figura 4 - O Deslocamento Inverso

Caso a criança possa coordenar um deslocamento $\overrightarrow{AB}$ com um deslocamento $\overrightarrow{BA}$ temos que o resultado da composição $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA}$ é o retorno ao ponto A.

O deslocamento $\overrightarrow{BA}$ é chamado, por definição, de *deslocamento inverso* do deslocamento $\overrightarrow{AB}$. A possibilidade de a criança poder realizar um deslocamento inverso que venha a anular um deslocamento feito por ela, como representado na Figura 4, é chamado, por Piaget, de *conduta do retorno*. Assim, se uma criança sabe (na prática de suas ações) anular, retornar ao ponto inicial, sejam seus deslocamentos, seja de objetos que ela move, dizemos que ela tem a conduta do retorno.

A seguinte observação de Piaget exemplifica a conduta do retorno:

> Obs. 86 - Lucienne, com 0; 10 (7) e nos dias seguintes, [de um ponto A] aproxima lentamente seu rosto de objetos que está segurando (chocalhos, bonecas, etc.) [ponto B] até grudar o nariz neles [realizando o deslocamento $\overrightarrow{AB}$]. Depois se afasta [retornado ao ponto B, realizando o deslocamento $\overrightarrow{BA}$], olhando-os com muita atenção, e recomeça outra vez (PIAGET, 2003, p. 167).

O Deslocamento Nulo

Introduzimos a seguir noção de deslocamento nulo, essencial a definição do GPD como veremos adiante.

Como vimos, o resultado da composição $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA}$ é o retorno ao ponto A. Ora, pela equação da composição dos deslocamentos temos que $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Assim, $\overrightarrow{AA}$ significa, literalmente, sair de A e retornar para A, ou ainda, representa, em termos dos pontos de partida e chegada, que o deslocamento foi nulo. Logo, por definição, neste caso, falaremos de *deslocamento nulo*. Vamos considerar ainda que exista apenas um único deslocamento nulo e que ele pode ser representado de várias formas: $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}$ etc.

Temos então que a conduta do retorno, descrita logo acima, possibilita o deslocamento nulo. Podemos melhor compreender a noção de deslocamento nulo, quando ele é composto com outros deslocamentos (neste caso ele não acrescenta nada à composição dos deslocamentos) como é representado na Figura 5.

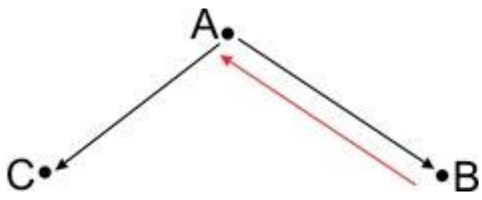

Figura 5 - Composição com um deslocamento nulo

Com efeito, a composição mostrada na Figura 5 se expressa como $(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA}) * \overrightarrow{AC}$; se realizarmos as operações temos $\left(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA}\right) * \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA} * \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$; assim, a parte $\overrightarrow{AA} * \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ indica que $\overrightarrow{AA}$ nada acrescenta ao deslocamento $\overrightarrow{AC}$.

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Conduta do Desvio e Associatividade da Composição de Deslocamentos

Introduzimos agora a noção de conduta do desvio que, junto com as noções estabelecidas anteriormente, permitem definir o GPD. Mostramos também como ela equivale a associatividade na composição de deslocamentos, o que nos permitirá mostrar que a estrutura matemática subjacente ao GPD é um grupo, como veremos adiante.

Como vimos, o sujeito pode compor diversos deslocamentos que poderão ser formalizados como composições vetoriais, conforme nossa análise anterior. Isso se torna particularmente importante quando o sujeito realiza deslocamentos mais complexos do que o simples deslocamento de um ponto a outro, ou mesmo na conduta do retorno. Analisemos então, em especial, a composição de deslocamento $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, ou seja, dos deslocamentos $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ que resulta no deslocamento final $\overrightarrow{AD}$, como nos mostra a Figura 6.

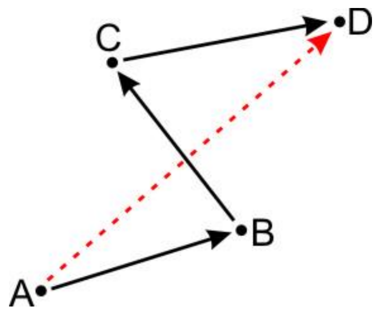

Figura 6 - Composição de Deslocamento mais Complexo

Notemos que a possibilidade da criança realizar diversos deslocamentos e as diversas coordenações desses deslocamentos a leva a compreender a equivalência entre diferentes composições de deslocamentos. Um exemplo interessante dessa equivalência é a chamada conduta do desvio. Por definição, dizemos que a criança é capaz da *conduta do desvio* se, diante de um obstáculo que se encontra em seu caminho ou no caminho do objeto que movimenta, ela compreende que pode realizar deslocamentos por caminhos alternativos para chegar ao ponto final, tendo-os por isso como equivalentes. Usando a notação introduzida aqui, podemos representar a conduta do desvio por $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ como nos mostra a Figura 7.

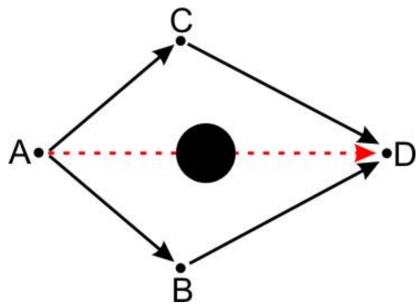

Figura 7 - Conduta do Desvio

Assim, podemos ver que o deslocamento $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD}$ é equivalente ao deslocamento $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CD}$, pois ambos resultam no deslocamento final $\overrightarrow{AD}$ (representado pelo vetor tracejado em vermelho na Figura 7). A conduta do desvio significa então que a criança entende, de forma prática e não conceitual, que pode chegar ao ponto final D desviando do obstáculo interposto entre o ponto inicial A e o final D.

Podemos agora mostrar que a conduta do retorno está relacionada à propriedade da associatividade da operação $*$. Vimos que $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Ora, mas a composição representada por $*$ é a coordenação de dois deslocamentos, assim existem duas formas de fazer a composição $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD}$: (i) compondo primeiro os dois termos iniciais $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}$, ficamos assim com a equação $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ e, a partir daí, com as equações $(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$; e (ii) compondo primeiro os dois termos finais $\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD}$, ficamos assim com a equação $\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$ e, a partir daí, com as equações $\overrightarrow{AB} * (\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

ISSN: 1984-1655

Ora, das equações finais nos Itens (i) e (ii) acima, temos que tanto $(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{CD}$ quanto $\overrightarrow{AB} * (\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD})$ são iguais a $\overrightarrow{AD}$. Logo, temos que $(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} * (\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD})$. E, por existir esta igualdade, dizemos que a operação $*$ tem a propriedade da associatividade[3].

Mas, essa associatividade da operação $*$, ou seja, $(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} * (\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD})$, implica que $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD}$. Ora, esta é a equação que justamente representa a conduta do desvio! Assim, a conduta do desvio indica que a operação de composição de deslocamento realizada pela criança tem a propriedade da associatividade.

Vejamos uma observação que exemplifica a Conduta do Desvio:

> Obs. 104 – [Jaqueline] a 1; 3 (6) repete uma experiência, agora, com uma boneca: [a partir de um ponto A a sua frente, passando por um ponto B, à sua esquerda,] ela a coloca atrás de si [ponto D] com a mão esquerda, em seguida, ela se vira à direita [passando pelo ponto B, à sua esquerda, pelo ponto A a sua frente e pelo ponto C à sua direita; para reavê-la [no ponto D]. O mesmo acontece pelo outro lado. (PIAGET, 2003, p. 161).

A observação abaixo exemplifica um caso mais complexo de conduta do retorno.

> Obs. 123 – Aos 1; 6 (8), Jacqueline joga uma bola sob um sofá [de um ponto A, passando por um ponto B debaixo do sofá, chegando a um ponto D]. Mas, em vez de se abaixar, imediatamente, e de procurá-la no chão [ponto B], ela olha o local, compreende que a bola atravessou o espaço situado sob o sofá [ponto B] e se coloca em marcha para ir atrás desse [ponto D]. Entretanto, há uma mesa a sua direita e o sofá está encostado em uma cama à sua esquerda, ela começa [do ponto A] por virar as costas ao local onde a bola desapareceu [ponto B], em seguida ela contorna a mesa [ponto C] e, por fim, chega atrás do sofá [ponto D], diretamente no lugar certo. Ela, portanto, contornou o círculo por um itinerário diferente daquele do objetivo e elaborou, assim, um «grupo» por representação do deslocamento

[3] Como, por exemplo, o caso da associatividade da operação de adição de números naturais, para a qual $(x + y) + z = x + (y + z)$ ou, utilizando números: $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 6$.

ISSN: 1984-1655

> invisível da bola e do «desvio» a cumprir para reencontrá-la (PIAGET, 2003, p. 178).

As Coordenações de Deslocamentos como Grupo Matemático

Agora, a partir dos resultados anteriores, introduzimos o Grupo Prático de Deslocamentos, bem como mostramos que a estrutura matemática subjacente a ele é uma estrutura de grupo.

Retomando, então, o que expusemos temos os seguintes elementos:

1. Os Deslocamentos, representados, por exemplo, por $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ etc.;
2. A Composição dos deslocamentos, representada, por exemplo, por $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
3. O Deslocamento Inverso ou Conduta do Retorno, no qual para todo deslocamento, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$, temos que existe o seu inverso $\overrightarrow{BA}$;
4. O Deslocamento Nulo, representado, por exemplo, por $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}$ etc.;
5. A Conduta do Desvio, representada, por exemplo, por $\overrightarrow{AB} * \left(\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD}$.

Por definição — cf. Piaget (2003, cap. 2) e Piaget e Inhelder (2003, p. 22) — dizemos que a criança construiu o Grupo Prático de Deslocamentos se o conjunto dos deslocamentos que ela é capaz de realizar (de si mesma e dos objetos) tem todos os elementos acima.

Estas relações nos remetem, na sua formalização, à noção de Grupo Matemático. Ora, do ponto de vista matemático (cf. HOWSON (1972, p. 25), THOPSON (2010, p. 71), AYRES JR. (AYRES, p. 122)), um grupo é um par ordenado $(G,*)$ em que G é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária definida sobre os elementos de G. Vale lembrar que uma operação binária $*$ em G deve satisfazer a propriedade do *fechamento*, i. e., para todo a e b pertencentes a G temos que o resultado da operação $(a * b)$ também pertence a G, em simbologia matemática: $\forall\ a, b\ \in G, (a * b) \in G$.

ISSN: 1984-1655

Além da operação binária $*$ satisfazer a propriedade do fechamento, temos que para o par ordenado $(G,*)$ ser um grupo matemático, ele deve satisfazer aos seguintes axiomas.

1. Elemento Identidade ou Elemento Neutro: existe um elemento i em G tal que para todo elemento a em G temos que $\mathrm{i} * \mathrm{a} = \mathrm{a}$ e $\mathrm{a} * \mathrm{i} = \mathrm{a}$. Em simbologia matemática: $\exists\, \mathrm{i} \in \mathrm{G}, \forall\, \mathrm{a} \in \mathrm{G}, \mathrm{i} * \mathrm{a} = \mathrm{a} = \mathrm{a} * \mathrm{i}$.
2. Elemento Inverso: para todo a em G existe um elemento b em G tal que $a * b = i$ e $b * a = i$, no qual i é o *Elemento Identidade* ou *Elemento Neutro* definido acima. Em simbologia matemática: $\forall\, a \in G, \exists\, b \in G, a * b = b * a = i$.
3. Associatividade: para todos $\mathrm{a,b,c}$ em G temos que $(\mathrm{a} * \mathrm{b}) * \mathrm{c} = \mathrm{a} * (\mathrm{b} * \mathrm{c})$. Em simbologia matemática: $\forall\, \mathrm{a,b,c} \in \mathrm{G}, (\mathrm{a} * \mathrm{b}) * \mathrm{c} = \mathrm{a} * (\mathrm{b} * \mathrm{c})$.

Ao compararmos as possíveis coordenações de deslocamentos, podemos perceber que o conjunto D de deslocamentos e a composição $*$ possuem uma estrutura de grupo matemático, pois satisfazem aos axiomas apresentados[4].

Elemento Inverso: vimos na seção “O Deslocamento Inverso e a Conduta do Retorno” (cf. pg. 9 e Item 3 da pg. 15) que existe a possibilidade da criança realizar uma combinação dos deslocamentos que lhe permite retornar ao ponto inicial, ao qual denominamos de Conduta do Retorno. Temos que a realização dessa composição de deslocamentos permite dizer que o par ordenado $(D,*)$ satisfaz ao Axioma do Elemento Inverso, pois para todo deslocamento[5] $\overrightarrow{XY}$ em D, existe um elemento $\overrightarrow{YX}$ em D, tal que $\overrightarrow{XY} * \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX}$ e $\overrightarrow{YX} * \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YY}$ sendo que $\overrightarrow{XX}$ e $\overrightarrow{YY}$ representam o Elemento Identidade ou Elemento Neutro $(\overrightarrow{XX} = \overrightarrow{YY})$.

[4] Quanto à propriedade de fechamento da operação $*$, notemos que estamos considerando que o GPD representa deslocamentos vetoriais, i. e., tal que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo deslocamento, se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo comprimento (magnitude), são paralelos entre si (mesma direção) e apontam para o mesmo lado (sentido) (cf. Oliveira e Silva (1970, p. 828 ss.)).

[5] Vamos a partir daqui utilizar X, Y, Z e W como variáveis para identificar qualquer ponto no espaço A, B, C etc.

Elemento Identidade ou Nulo: vimos na seção "O Deslocamento Inverso e a Conduta do Retorno" (cf. pg. 9 e Item 4 da pg. 15) que o par ordenado $(D,*)$ satisfaz a propriedade do elemento identidade ou nulo, pois existe um elemento $\overrightarrow{XX}$ ou $\overrightarrow{YY}$ em D, tal para todo elemento $\overrightarrow{XY}$ em D temos que $\overrightarrow{XX} * \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XY}$ e $\overrightarrow{XY} * \overrightarrow{YY} = \overrightarrow{XY}$. O elemento identidade, ou nulo (representado de diversas formas, $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}$ etc.), significa, aqui, a capacidade da criança de compreender em atos a reversibilidade de suas ações resultando na nulidade dos deslocamentos, ou seja, ela é capaz de agir e de reverter sua ação. Assim, a composição de um deslocamento com seu inverso resulta no elemento identidade ou elemento nulo $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}$ etc. Como vimos, o resultado da anulação de um deslocamento pode ser designado de "Deslocamento Nulo", reforçando a interpretação do elemento inverso na Conduta do Retorno. A criança também é capaz de compreender em atos que uma composição de deslocamentos que envolva o deslocamento nulo não afetará o deslocamento resultante – como vimos na Figura 5 –, pois um deslocamento que saia de X e retorne a X e termine em Y será igual a um deslocamento $\overrightarrow{XY}$, o que pode ser representado pela equação $\overrightarrow{XX} * \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XY}$.

Associatividade: como vimos na seção "Conduta do Desvio e Associatividade da Composição de Deslocamentos" (cf. pg. 12, Item 5 da pg. 15), a conduta da criança nos permite afirmar que a composição de deslocamentos que ela realiza para alcançar seus objetivos desviando de obstáculos satisfaz ao axioma da associatividade, pois para todos $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{ZW}$ em D temos que $(\overrightarrow{XY} * \overrightarrow{YZ}) * \overrightarrow{ZW} = \overrightarrow{XY} * (\overrightarrow{YZ} * \overrightarrow{ZW})$.

Considerações Finais

Vimos então, neste trabalho, como o modelo Grupo Prático de Deslocamentos permite descrever a estrutura dos deslocamentos realizados pela criança (de si mesma e dos objetos) e da composição entre eles, estrutura essa que é essencial na constituição da noção de espaço; em especial, introduzimos uma notação matemática que permite explicitá-lo e permite mostrar também que a estrutura matemática de grupo está subjacente ao Grupo Prático de Deslocamentos, justificando seu nome.

Referências

AYRES, F. J. **Álgebra moderna**. São Paulo: McGraw-Hill, s. d., edição original americana: 1965.

HOWSON, A. G. **A handbook of terms used in algebra and analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1972.

OLIVEIRA, A. M.; SILVA, A. L. **Biblioteca de matemática moderna**. São Paulo: Irradiantes, 1970.

PIAGET, J. **La naissance de l'intelligence chez l'enfant**. Paris: Delachaux et Niestlé, 1977.

PIAGET, J. **A construção do real na criança**. 3a. ed. São Paulo: Ática, 2003.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A psicologia da criança**. Rio de Janeiro: Difel, 2003.

THOMPSON, R. **A comprehensive dictionary of mathematicas**. Chandigarh: Abhishek Publications, 2010.

Recebido em: 16/04/2013
Aceite em: 30/06/2013