ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

# DOCÊNCIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES EPISTEMOLÓGICAS

**Fernando Becker**[1]

## Resumo

O texto apresenta a quinta parte da pesquisa *Epistemologia do Professor de Matemática; fase internacional*, cujos dados foram coletados no Peru, no Chile e no Uruguai, mediante entrevistas a 17 professores de todos os níveis de ensino. O objetivo é o de identificar as concepções epistemológicas docentes que fundamentam o ensino de Matemática e verificar se tais concepções assemelham-se às encontradas no Brasil. O objetivo específico desta análise é saber como os docentes concebem os processos históricos de formação dos conhecimentos matemáticos. Analisam-se, para isso, as respostas às questões 15 a 19 – dentre as 24 da pesquisa – que tratam de história da Matemática. As concepções epistemológicas mostram que quase não há lugar para a compreensão de que os conhecimentos matemáticos resultam de processos construtivos humanos, que obedecem a uma evolução temporal do mais simples ao mais complexo. Ao contrário, sintonizam (com o que foi constatado por análises anteriores desta pesquisa, já publicadas em outros artigos) com a concepção de que eles resultam da pressão do meio, exercida pelo ensino (empirismo), e que a aprendizagem dela decorrente é possibilitada por estruturas lógicas inatas (apriorismo). Confirma-se, portanto, a presença predominante de concepções epistemológicas empiristas, sustentadas por concepções epistemológicas aprioristas, sem que os docentes tenham consciência da contradição que vivem. As respostas obtidas assemelham-se às de docentes brasileiros quanto à ausência de concepção de história como processo formador, reduzindo-a, com raras exceções, à sucessão de fatos sem a necessária conexão entre eles; ausência do sentido de gênese e desenvolvimento histórico – sentido encontrado em poucas respostas de alguns docentes. A referência teórica básica é a Epistemologia Genética piagetiana.

**Palavras Chave:** Epistemologia do professor de Matemática. História da Matemática. Historicidade ou gênese histórica. Concepção epistemológica. Construção das matemáticas.

[1] Graduado em Filosofia, Mestre em Educação: Ensino (UFRGS), Doutor em Psicologia Escolar e do Desenvolvimento Humano (USP). Professor Titular, aposentado, atuando como Docente Convidado no PPGIE (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Comendador Rodolfo Gomes, 403/104, Bairro Menino Deus, Porto Alegre, RS, Brasil, CEP: 90.150-101. E-mail: fbeckerufrgs@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4215-9805

ISSN: 1984-1655

Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

# TEACHING AND THE HISTORY OF MATHEMATICS: EPISTEMOLOGICAL CONCEPTIONS

**Abstract**

The text presents the fifth part of the research project Epistemology of the Mathematics Teacher - international phase, in which data were collected in Peru, Chile and Uruguay, during interviews with 17 teachers working at all educational levels. The objective is to identify the underlying epistemological conceptions of the mathematics teachers and assess to what extent they are similar to those found in Brazil. The specific objective of this analysis is to reveal how teachers conceive the historical processes related to the formation of mathematical knowledge. For this purpose, the answers to items 15 to 19 (from the full 24-item survey questionnaire), which deal with the history of mathematics, are analysed. The epistemological conceptions show there is very little understanding that mathematical knowledge results from human constructive processes, which follow a temporal evolution from the simplest to the most complex. On the contrary, as found in the previously published stages of this research, they are in tune with the conception that they result from environmental pressure, exerted by teaching (empiricism), and that the resulting learning is made possible by innate logical structures (apriorism). Therefore, the predominance of empiricist epistemological conceptions, supported by apriorist epistemological conceptions, is confirmed, while teachers remain unaware of the contradiction they live. The answers obtained are similar to those seen in Brazilian teachers in terms of the absence of the conception of history as a formative process, reducing it, with rare exceptions, to a succession of largely unconnected facts and the absence of a sense of genesis and historical development – an understanding found in a few responses from some teachers. The basic theoretical reference is Piagetian Genetic Epistemology.

**Keywords:** Epistemology of the mathematics teacher. History of Mathematics. Historicity or historical genesis. Epistemological conception. Construction of mathematics.

ISSN: 1984-1655

**Introdução**

Este texto apresenta a quinta parte da pesquisa "Epistemologia Subjacente ao Trabalho Docente; docência de Matemática; fase internacional" ou, de forma mais simples, Epistemologia do Professor de Matemática, com dados coletados no Chile, no Uruguai e no Peru. As duas primeiras foram publicadas pelo BOLEMA – Boletim de Educação Matemática; a terceira e a quarta submetidas a outras revistas. A presente análise, como as anteriores, dá continuidade a duas pesquisas anteriores publicadas em livros. A intenção desta pesquisa é saber se os problemas epistemológicos que comprometem o ensino brasileiro de Matemática, como indicam essas análises, aparecem também fora do Brasil: domínio amplo da concepção empirista, sustentação desta pelo apriorismo, sem consciência da contradição; raras e apenas intuitivas afirmações interacionistas ou construtivistas.

O texto analisa as respostas dos entrevistados às questões de 15-19, dentre as 24 da pesquisa, feitas aos entrevistados:

15) Quando surgiu na História a matemática que você ensina?
16) Quando surgiu o zero na história da matemática?
17) Quando surgiram a aritmética, a álgebra e a geometria?
18) Que diferença(s) existe(m) entre a matemática da antiga Grécia e a atual?
19) Em que época ocorreram as grandes revoluções matemáticas?

A coleta de dados foi feita por entrevistas semiestruturadas, presenciais, a 17 docentes de todos os níveis de ensino. Ordenados por ordem alfabética, eles serão referidos pelo número, que coube a cada um nessa ordem, precedido de P (Professor): dez universitários (U), cinco de ensino médio (M), três de ensino fundamental (F), um deles leciona nos dois níveis da educação básica; cinco uruguaios, cinco chilenos e sete peruanos; nove professoras e oito professores. (Dois docentes não responderam a essas perguntas ou suas respostas em nada contribuem para esta análise). A análise, visando as concepções epistemológicas, foi realizada à base da Epistemologia Genética piagetiana, em especial a crítica às epistemologias (PIAGET, 1978) e a abstração reflexionante (PIAGET, 1995). Inicia-se a análise agrupando as respostas dos docentes a cada pergunta, de acordo com categorias extraídas de suas falas e de forma a mais resumida possível. Em seguida, faz-se um breve apanhado dos achados. No final do texto, faz-se uma interpretação epistemológica dos achados num todo interpretativo e crítico. As entrevistas, gravadas em espanhol, foram transcritas para o português. Neste texto, elas aparecem "purificadas" de repetições, cacoetes linguísticos, faltas de concordâncias gramaticais ou sintáticas etc., comuns na fala, mas incômodas na escrita; sempre com extremo cuidado para não modificar o significado. Utilizaremos colchetes, contendo três pontos para cortes de passagens de falas que não contribuem para a pesquisa ou para acréscimo de palavra ou expressão para completar o significado, como também para sinalizar fragmentos de fala inaudíveis ou incompreensíveis. No limite, excluem-se respostas de docentes que fabulam sobre o tema da pergunta.

Podemos iniciar este texto com a pergunta: Por que a docência de Matemática ignora tanto a história da ciência que ensina? "Ignora" pode ser substituído por "não vê sentido" ou "não atribui importância"; salvo raras exceções. Se tomarmos, como exemplos, a Física e a Filosofia, a todo momento volta-se para Kant, Hegel, Hume, Descartes, Einstein, Newton, Galileu, Platão, Aristóteles, Demócrito, Pitágoras, Tales e tantos outros distribuídos nestes 2.500 anos de evolução cognitiva. Vigora ali a compreensão de que não é possível tratar de um conhecimento qualquer sem retomar sua origem, saber o motivo pelo qual foi construído e qual sua relação com o conhecimento atual; e compreender como, através de milhares de anos, ele chegou ao que é hoje. Por que seria diferente no ensino de Matemática? Por que grandes matemáticos comparecem apenas para dar nomes a conteúdos matemáticos e não para revisitar sua origem, ampliando potencialmente sua compreensão? Qual o significado de "Geometria de Euclides", "Geometria analítica de Descartes" ou "Transformadas de Fourier"? Esses nomes servem para compreender sua origem ou apenas para diferenciar um conteúdo curricular de outro, alheios a sua histórica?

Nossa convicção é a de que, ao compreender o processo histórico de formação de uma cognição humana, ampliamos significativamente sua compreensão e, ao mesmo tempo, desmistificamos mitos de origem, especialmente aqueles que não são benéficos à formação humana, como: a) a matemática está em tudo; b) a matemática sempre existiu; c) as capacidades matemáticas são inatas; d) a matemática é (apenas) uma linguagem. Esses mitos, amplamente presentes no ensino de Matemática, têm em comum a crença de que a Matemática é a-histórica.

Há dois caminhos, entre si complementares, para apreender os processos de formação das noções e cognições matemáticas: o processo evolutivo, histórico dos conhecimentos matemáticos, e a psicogênese dos conhecimentos de cada indivíduo humano; melhor dito, do sujeito epistêmico – processos filo e ontogenéticos. Esta análise debruça-se sobre o primeiro; mas, o segundo, que as pesquisas de Piaget (1975a; 1975b) nos revelam, nos ajudam a compreender o primeiro, e vice-versa. Se o homo sapiens surge há 200 mil anos e, há 70 mil anos, com o surgimento da linguagem ficcional, realiza a revolução cognitiva (HARARI, 2018) e, portanto, a capacidade de abstração, e leva dezenas de milhares de anos para criar um sistema de contagem e as primeiras operações aritméticas, a história da Matemática impõe-se como instância fundamental para compreender essa magnífica realização humana. Ainda mais que, em poucos milhares de anos, ele inventa esse complexo sistema de operações, que conhecemos como Matemática, e que se faz presente em todas as instituições humanas e nenhum humano, sem sérios prejuízos à sua vida, pode, nas sociedades atuais, ignorar suas operações elementares. Mais, se a criança leva tanto tempo, em média cinco anos, para transitar da aquisição da função simbólica (linguagem ficcional) para a noção de número, que possibilita as operações aritméticas elementares e tudo o que sobrevém a elas, esse longo período, análogo ao longo período histórico, precisa fazer parte das preocupações de quem ensina.

Piaget (1995) explica a formação dos conhecimentos, ou capacidades cognitivas, pelo processo de abstração reflexionante. Para ele, os conhecimentos não se originam de abstrações empíricas, por mais importantes e indispensáveis que elas sejam, mas das ações do sujeito epistêmico que age e se apropria das coordenações de suas ações, criando e inventando novidades; construindo novas capacidades, como as capacidades matemáticas. Ele nomeia esse processo de construção como abstração reflexionante.

Por abstração *empírica* (*empirique*), o sujeito, ao agir sobre os objetos, retira deles qualidades como cor, peso, textura; e das ações, em suas características materiais, qualidades que lhe são próprias. Por essa abstração, o sujeito retira qualidade do que é observável. A abstração empírica não modifica as capacidades do sujeito; essa função é exercida pela abstração reflexionante. Vejamos as categorias e, depois, o processo dessa forma de abstração.

Abstração *reflexionante* (*réfléchissante*) propriamente dita. Por ela, o sujeito retira qualidades das coordenações de suas ações com as quais pode, não só melhorar as capacidades cognitivas que já construiu, mas construir novas capacidades, melhorando suas possibilidades de compreensão. Se uma criança está aprendendo aritmética e, depois de realizar muitas somas, ela se atém, não mais às quantidades que está somando, mas à própria soma, e retirar qualidades de suas operações de soma e, então, construir com elas a operação multiplicativa, ela realizou abstrações reflexionantes. Se um estudioso de Matemática analisar as operações aritméticas, que já domina, extrair qualidades delas e, com elas, armar equações algébricas, com as propriedades comutativa, distributiva e associativa da multiplicação, terá realizado abstrações reflexionantes. A abstração reflexionante desdobra-se em duas modalidades: a pseudo-empírica e a refletida.

Abstração *pseudo-empírica* (*pseudo-empirique*). Se a criança enfileirar dez pedrinhas e contá-las; depois formar um círculo com elas, e contá-las; em seguida, formar uma linha sinuosa, e contá-las; ao tomar consciência de que não importa a forma de organização das pedrinhas, nem por onde começou a contagem, sempre resultará em dez, ela procedeu a abstrações pseudo-empíricas.

> Esse novo conhecimento é tirado por abstração [reflexionante], não das propriedades das pedrinhas, mas da organização que o sujeito ali introduziu. Trata-se, portanto, de uma experiência "lógico-matemática" que dá lugar a um novo saber por abstração reflexionante. Entretanto, e isso é próprio da abstração pseudo-empírica, os objetos da realidade constituíram um suporte necessário às atividades do sujeito (MONTANGERO & MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 92).

Esse conceito leva-nos a compreender que os conhecimentos matemáticos não são tirados da realidade observável por abstração empírica, como entendem aqueles que pensam que "a matemática está em toda parte", mas são construções do sujeito que, agindo sobre os objetos os utiliza para abstrair qualidades das coordenações mais gerais de suas ações, com as quais constrói novidades. Portanto, a abstração pseudo-empírica é uma modalidade da abstração reflexionante e não da abstração empírica.

Por *abstração* refletida (*réfléchie*). Quando o sujeito toma consciência de abstrações reflexionantes, ele realiza abstrações refletidas. É por ela que o sujeito finaliza construções conceituais: totalidades operatórias, que implicam generalizações, não provenientes dos objetos, mas de sua ação organizadora. Popularmente, designamos, equivocadamente, esse momento em que ocorre abstração refletida, como *insight* – experiência interna como iluminação que, de acordo com a teoria da *Gestalt*, aconteceria por uma organização súbita da percepção. Piaget (1978, p. 352-367) critica essa noção e afirma que ela é o ponto de chegada de longo processo de abstração reflexionante, que pode incluir abstrações pseudo-empíricas.

Qualquer abstração reflexionante realiza-se por dois processos, entre si complementares: o reflexionamento e a reflexão.

Reflexionamento (*réfléchissement*). Consiste em retirar características de um patamar e jogá-las ao patamar superior. Piaget utiliza a metáfora "patamar" para designar níveis de organização de progressiva complexidade – um patamar superior é mais complexo que um inferior. No cérebro humano não há patamares, mas um emaranhado de 86 bilhões de neurônios, além de outras células, composto de 86 trilhões de conexões possíveis. Hipoteticamente, um patamar superior conta com conexões neuronais mais numerosas e complexas que um patamar inferior.

*Reflexão* (*réflexion*). Consiste em reorganizar esse patamar superior em função das novidades trazidas do patamar inferior. "A reflexão ou reorganização no novo plano equivale a uma reconstrução. [...]. Em resumo, a reflexão enriquece notavelmente o conhecimento extraído." (MONTANGERO & MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 93). Essa reorganização implica reconstruções pois novas sínteses ocorrem ali, como quando a criança toma consciência de que somas podem ser traduzidas, com vantagem, por multiplicação; por outro lado, as novidades vindas do patamar inferior são relacionadas com o que já existia neste novo patamar.

Em outras palavras, a reflexão consiste num enriquecimento da estrutura cognitiva existente ou na construção de nova estrutura; é por ela que se formam novos esquemas ou conceitos que possibilitam a criação de teorias.

> Todo o segredo dessas novidades deve, então, ser procurado na equilibração das diferenciações e das integrações. A abstração [reflexionante] consiste, por si mesma, com efeito, numa diferenciação, porquanto separa uma característica para transferi-la, e uma nova diferenciação acarreta a necessidade de integração em novas totalidades, sem as quais a assimilação deixa de funcionar, daí o princípio comum da formação das novidades: a abstração reflexionante conduz a generalizações, por isso mesmo construtivas, e não simplesmente indutivas ou extensivas como a abstração empírica.

As *epistemologias* clássicas – empirismo e apriorismo – têm em comum a desvalorização dos processos históricos na medida em que propõem funcionamento sem estruturas (empirismo) ou estrutura sem funcionamento (apriorismo). Piaget propõe a teoria da epigênese das funções cognitivas (PIAGET, 1973) como síntese de estrutura e funcionamento. Para ele, a estrutura é, ao mesmo tempo, estruturada e estruturante (PIAGET, 1978).

É próprio da epistemologia empirista supervalorizar a experiência, compreendida como abstração empírica, e não a valorizar como experiência lógico-matemática.

> [...] o empirismo é, antes de tudo, certa concepção de experiência e da sua ação. [...] Essa dupla crença na existência de uma experiência autônoma e na sua pressão direta sobre o espírito do sujeito explica [...] por que o empirismo é necessariamente associacionista... (PIAGET, 1978, p. 339-340).

> Portanto, a experiência não é recepção, mas ação e construção progressivas. Eis o fato fundamental. (Id., p. 342)

> Toda e qualquer hipótese ultrapassa o empirismo e atribui ao sujeito um poder de adaptação com tudo o que comporta tal noção. (Id., p. 345)

É pela experiência lógico-matemática, ou abstração reflexionante, que os humanos construíram o edifício das matemáticas. A capacidade perceptiva,

ISSN: 1984-1655

realizada pela captação sensorial, tão valorizada pelo empirismo, teve importante função nessa jornada humana. Mas, na construção dos conhecimentos matemáticos, ela aparece viabilizando a abstração pseudo-empírica – modalidade da reflexionante – segundo a qual os observáveis constituem apenas "suporte necessário às atividades do sujeito". "Ação e construção progressivas" ocorrem por abstração reflexionante e não por abstração empírica, por mais importante que seja esta, em relação àquela; na medida em que acontecem, delineiam, onto e filogeneticamente, um processo histórico.

O apriorismo também menospreza, mas por outros motivos, os processos históricos. Piaget (1978) analisa a teoria da *Gestalt* como apriorista. Ele afirma que uma *Gestalt* (totalidade perceptiva),

> [...] não tem história porque não leva em conta a experiência anterior, ao passo que um esquema [totalidade cognitiva] resume em si o passado e consiste sempre, portanto, numa organização ativa da experiência vivida. [...] a análise contínua de três crianças [...] convenceu-nos, efetivamente, da impossibilidade de divorciar qualquer conduta [...] do contexto histórico de que ela fez parte, ao passo que a hipótese da forma torna a história inútil e os gestaltistas negam a influência da experiência adquirida sobre a solução dos novos problemas. (PIAGET, 1978, p. 356)
>
> Pode-se acompanhar a história particular de cada esquema através das sucessivas fases do desenvolvimento, não podendo a constituição das estruturas [cognitivas] ser dissociada do desenrolar histórico da experiência.
>
> O esquema ["aquilo que é generalizável numa determinada ação"] é, portanto, uma Gestalt que tem uma história. (Id., p. 356)

Algo parecido com que afirma sobre a ontogênese das capacidades lógico-matemáticas, Piaget afirma da história da Matemática. Diz ele (1973, p. 391):

> [...] é essencial marcar muito nitidamente, [...] que nenhum sistema biológico sincrônico, por mais dependente que seja de condições atuais de equilíbrio, é independente da história, porque ele próprio é produto da evolução.

Note-se ainda que utilizaremos, neste texto, o termo "apriorismo" no sentido que Piaget utiliza em sua crítica à Gestalttheorie ao afirmar que as "formas" (ou estruturas, como as matemáticas) "são concebidas como algo que mergulha suas raízes no sistema nervoso ou, de modo geral, na estrutura pré-formada do organismo. É sob esse aspecto que podemos considerar tal solução como 'apriorista'." (PIAGET, 1978a, p. 352-3). Para ele, diferentemente do apriorismo kantiano, "tal interpretação consiste, efetivamente, num apriorismo biológico ou numa variedade do pré-formismo" (p. 353). Incluiremos, pois, na concepção apriorista as afirmações docentes, aludidas neste texto, de que as estruturas lógico-matemáticas são inatas, já que no sentido kantiano, ela se refere à razão pura, sem referência ao organismo.

Embora as estruturas matemáticas, quando finalizadas sua formulação, se caracterizem como conhecimento atemporal – universal e necessário – sua origem remonta a processos históricos. Conhecer esses processos, não apenas a sucessão de fatos históricos, amplia consideravelmente a compreensão de seu produto: a Matemática. O que mostram os professores a respeito, entrevistados para esta pesquisa?

**1.0 Origem histórica da Matemática que se ensina**

Perguntamos aos docentes: "Quando surgiu, na história da Matemática, a matemática que ensinas?" Classificamos suas respostas a essa pergunta em três tipos: a) não faz ideia, b) faz vaga ideia, c) apresenta informações verossímeis.

**1.1 Não faz ideia**

P10M diz que leciona potência. A Matemática que leciona surgiu "*Sei que faz tempo! Não sei precisamente quantos anos*". À pergunta: "*Qual é o nome sempre associado à Geometria?*", ele responde: "*Que pergunta!*". Apesar da insistência das perguntas, ele não situa historicamente nenhum desses e de outros eventos matemáticos. Já P16F mostra total estranheza às perguntas. À pergunta sobre a época em que teria surgido a geometria, responde com uma pergunta: "*Grécia?*" À pergunta sobre o nome ligado ao surgimento da geometria, sorri em lugar de responder. Ao perguntar-se sobre o nome da geometria que ensina, responde: "*euclidiana*". Mesmo assim, não pronuncia o nome de seu criador. Quando o entrevistador diz: "Euclides", ela responde: "*Ai, Deus meu!*". Já P12U fabula sobre o modo pelo qual ensina atualmente.

Para esses três docentes, a história da Matemática é desprovida de significado.

**1.2 Vagas ideias**

Há respostas que trazem vagas ideias sobre a história da Matemática. P05U responde: "*A (matemática) que ensino [...] surgiu desde a época dos antigos. A geometria está muito vinculada às escolas pitagóricas, aos gregos, mas igual remonta a tempos mais antigos. Aos inícios, na realidade*". P17M diz que a matemática que ensina é de "*1.000 anos antes de Cristo, na Grécia*". Cita nomes de matemáticos: "*Pitágoras, Descartes*[2] *que é francês*". Pergunta-se sobre a época de Descartes, ela responde: "*Não sei se de antes, ou depois de Cristo. Mas Pitágoras [570-495 a.C.] é de antes de Cristo. Ano 500 a.C*". P01U diz que a matemática que ensina surgiu na época dos gregos. "*Não é como a atual, é muito antiga*". P09FM reage dizendo: "*A matemática que eu ensino é parte da aritmética e parte da álgebra*". Quando faço isso, "*explico ao aluno qual é a história, de onde se originou e porque se originou. Qual foi a necessidade do ser humano de criar isso [...]*". Ele se pergunta: "*Por que eles queriam saber contar?*" E responde: se "*eu tenho 5 vacas e o outro tem 8, como sei quem tem mais?*

[2] René Descartes (1596-1650), matemático e filósofo francês, criou a geometria analítica.

*Tem que quantificar, tenho que contar! A necessidade do ser humano de entender, aprender, de ir ao mundo matemático*". Insiste-se: "Isso seria pensado a 100, 500, 1000 ou 2000 anos?" Ele responde: "*Tenho que pensar. Faz mais de 2000 anos*". "Em que parte do mundo? "*Foi mais ou menos na zona da Grécia*". "E as matemáticas que tu ensinas, surgiram quando na história?" A aritmética, "*desde os inícios, desde que o homem era primitivo e precisava contar*". Há quantos anos? "*Me falha a memória. Digamos 10 mil anos, não? Não sei. As formais, que ensinamos atualmente, desde o século XVI, mais ou menos*".

Embora a importante decisão de P09M, de explicar aos alunos sobre a necessidade, local e motivo do surgimento de determinado conhecimento matemático, a impressão, confirmada pelos outros três professores, é a de que essa história não faz parte de suas preocupações. Ter dúvidas sobre a época de Descartes e o significado de suas contribuições – "*Não sei se de antes, ou depois de Cristo*" – confirma essa compreensão.

**1.3 Informações verossímeis**

Há um terceiro tipo de respostas que trazem informações verossímeis. P13U diz que, "*em Cálculo 1, estão trabalhando com o Teorema de Bayes*[3]*, que diz que toda função contínua, definida em um intervalo fechado, admite máximos e mínimos. Isso nos leva a maximizar e minimizar áreas, distância e tudo o mais; isto deve estar dado por Bayes, por volta de 1600. Por isso, digo que as pessoas antes se perguntavam por que isso funciona. E qual é a resposta? O que não funciona são conjeturas*". P03U afirma: "*Ensino álgebra [...], mais geometria diferencial. A geometria diferencial é de 1800, 1850. [...] O que ensino de álgebra é de 1800 e pouco, mas as coisas mais avançadas, tipo teoria gradual, acho que é de 1830, mais ou menos. Eu não creio que eu ensine nada mais moderno que 150 anos!*" P04U diz que ensina geometria que "*surgiu com Euclides. [...]*

[3] O matemático Thomas Bayes (1701-1761) notabilizou-se, sobretudo na estatística com o teorema de Bayes, referente à probabilidade condicional, publicação póstuma em 1763.

*Surgiu antes (de Euclides), mas se pode colocar que houve uma formalização importante, [realizada por Euclides], 250 anos antes de Cristo*". Ensina também cálculo diferencial. "*E cálculo diferencial foi essencialmente criado por Newton*[4] *e Leibniz*[5]*. São mais recentes*". Do século XVII/XVIII. P06U pensa que o que ensina é do século XVIII, mais ou menos. "*Pelos menos a terminologia, a forma de linguagem, de escrita*"; e cita, como nome de referência, o matemático Gauss[6]. P14, professor universitário, diz que a matemática que ensina é de 1800; e acrescenta: "*É uma parte importante da Matemática*", "*é o resultado da revolução matemática, da primeira metade do século XIX, que continuou até a década de 30 do século XX*". "*Alguns problemas são clássicos como a intersecção de ângulos, que mostra [...] que os ângulos se podem dissecar. É um problema que se passou com os gregos e se deu no século XIX, em 1830; mas eu diria que as ferramentas que se utiliza agora são de 1790 a 1930. Começa assim a tecer a forma moderna de 1930*".

Dos 17 docentes, apenas quatro demonstram algum conhecimento histórico mais consistente das épocas em que surgiram os conhecimentos matemáticos mais básicos e os que ensinam. Tratam-se, entretanto, de conhecimentos quase inteiramente factuais, relativamente longe de uma genealogia dos conhecimentos matemáticos: o que precedeu, como isso serviu de base para o que veio depois, em função de que foram construídos tais conhecimentos, quase não aparece. No máximo, um frágil sentido de historicidade.

---

[4] Isaac Newton (1642-1727), matemático, físico e astrônomo inglês, conhecido como um dos cientistas mais influentes de todos os tempos, desempenhou papel fundamental na Revolução Científica. Autor de *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Compartilha com Leibniz o desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

[5] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), matemático e filósofo alemão, notabilizou-se por conceber as ideias de cálculo diferencial e integral, independentemente dos trabalhos equivalentes de Isaac Newton.

[6] Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855), matemático alemão, deu contribuições decisivas à análise matemática, teoria dos números, cálculo numérico, geometria diferencial. Afirmava que "a Matemática é a rainha das ciências".

**2.0 O zero**

O uso do zero é tão natural que estranhamos a pergunta sobre sua origem. No entanto, o zero tem história distinta da história dos demais numerais, pois surgiu tardiamente.

Piaget (1977) afirma que a negação é sempre tardia com relação à afirmação.

> Parece que nos encontramos, assim, em presença de uma lei muito geral da primazia inicial dos elementos positivos sobre os negativos, e esta lei interessa particularmente aos mecanismos da tomada de consciência. Com efeito, está claro que as afirmações, sem as negações complementares que lhes estão logicamente ligadas, situam-se na periferia das atividades do indivíduo, visto que todas os observáveis aparecem perceptivelmente sob seus aspectos positivos, antes de dar lugar a negações; percebe-se que um objeto é vermelho, ou quadrado, ou colocado sobre um outro, etc., bem antes de constatar que ele não é azul, nem redondo, nem colocado na mesma mesa, etc., as qualidades negativas só tendo sentido em relação a outros objetos aos quais ele é comparado, a previsões não confirmadas ou a necessidades momentâneas não satisfeitas. (p.185)

Não é diferente quando se trata do zero na história da Matemática; seu surgimento é tardio com relação aos demais numerais. Guedj (1999, p. 214-215) defende que os numerais, inclusive o zero, foi invenção dos indianos.

> A numeração indiana consumou um verdadeiro prodígio, mais admirável ainda que o do alfabeto. Com um punhado de signos – exatamente tantos quantos os dedos de nossas duas mãos –, ela permite representar todos os números do mundo! [...] Se há uma invenção que teve um destino universal, é esta!

Por que, então, se chamam de "algarismos arábicos"? Responde o mesmo autor (p. 215) dizendo que essa criação dos hindus chegou a Bagdad, onde:

> Um matemático, membro da Casa da Sabedoria, redigiu um tratado para divulgá-los e descrever a maneira de utilizá-los. Foi por ele que os

> árabes conheceram os algarismos indianos. Vários séculos depois, o livro foi traduzido em latim. Foi um dos maiores best sellers do fim da Idade Média.

Foi por essa tradução que essa obra chegou à França, Itália, Alemanha e de lá se difundiu para todo o Ocidente. Os cristãos conheceram os algarismos pelos árabes, por isso chamaram-nos de "algarismos arábicos" e divulgaram a informação de que o zero era invenção dos árabes.

A dificuldade residia em compreender que se precisava de um símbolo para indicar a ausência de quantidade. Se os números naturais começaram a surgir há 30.000 anos, sua sistematização ocorreu há pouco mais de 2.000 anos; e o surgimento do zero como o conhecemos hoje é ainda bem mais recente, possivelmente do século VI de nossa era. Um pouco diferente é a posição de outro autor: Carl B. Boyer (1999). Segundo ele, o zero teve origem entre os babilônios, hindus e maias. "É possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez de Alexandria, e que tivesse sido transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido lá" (BOYER, 1999, p. 145). Apenas na Idade Média, o símbolo zero foi introduzido na Europa. Isso aconteceu após a aceitação dos algarismos arábicos (ou indianos), divulgados por Fibonacci[7].

O zero, "este nada que tudo pode" (apud GUEDJ, 1999, p. 213), precisava de um sinal que o representasse, que preenchesse o vazio. Por exemplo, mil e um: 1-vazio-vazio-1. Alguém teve a ideia de ocupar esse vazio com um pequeno círculo: 1oo1.

> Não parece nada, mas foi um salto enorme. Uma ausência marcada por uma presença! Um vazio tratado como um cheio! Esse sinal [...] recebeu o estatuto comum, tornou-se um algarismo. Um algarismo como outro qualquer, como os outros nove! (p. 267)

[7] Leonardo Fibonacci (1170-1250), italiano, considerado por muitos o maior matemático da Idade Média. Criou a sequência de Fibonacci.

Demorou séculos para que isso acontecesse. “Com a introdução, na notação hindu, do décimo numeral, um ovo de ganso para o zero, o moderno sistema de numeração para os inteiros estava completo” (BOYER, 1999, p. 146). Também para a notação atual: 1.001. O zero é considerado por alguns como uma das maiores invenções da humanidade, na medida em que abriu espaço para todas as operações matemáticas atualmente conhecidas. “Foi a invenção do *número nulo*, a grande invenção dos indianos! *Sunya*, definido como o resultado da subtração de um inteiro por si mesmo: 0 = n – n; [...]. 0 se torna uma quantidade, uma quantidade como outra qualquer” (GUEDJ, p. 268).

Vejamos as respostas dos docentes à pergunta: “Quando surgiu, na história da Matemática, o valor zero?”

**2.1 Informações vagas**

P10M responde: “*Não sei em que época*”. P05U exclama: “*O zero, uf!*”. E continua: “*O zero surgiu com os egípcios, não estou muito segura. Mas surgiu antes dos romanos. Mas eles não usavam. Claro, os babilônicos*”. E acrescenta: “*Sempre foram mais os arábicos. [...]*”. P03U responde “*Não sei*”. Penso que “*o zero vem dos árabes, da matemática dos árabes*”. Não sabe em que época; diz que nunca estudou e nunca se propôs a estudar história da matemática. P04U responde: “*Esta é difícil. Não sei*”. Acho que “*com o sistema decimal, suponho; mas se tiver que datar, não sei. Claro, o zero é muito importante, mas é algo estranho*”. “Por que surgiu tão tardiamente?”, pergunta-se: “*Não sei. Penso que foi um passo importante no pensamento formal*”. “Poder-se-ia fazer álgebra sem o zero?”, pergunta-se: “*Não. A álgebra é muito difícil de imaginar, [assim como] boa parte da matemática, sem o zero; [...] eu creio que sem o zero*” não seria possível. O zero e a álgebra podem ter surgido com os gregos e romanos, “*pode ser, mas não estou seguro*”. P06U diz: “*Não me lembro disto*”. O zero é muito antigo. Deve ter surgido “*[...] quando o conhecimento sobre a matemática era muito primitivo. Eu creio que o zero deva ter sido uma das primeiras coisas que começou*

ISSN: 1984-1655

*a gerar na matemática o conceito de abstração*". Deve ter surgido com "*[...] os primitivos habitantes, quando eram nômades e passaram a ser sedentários, [quando] eles começaram [...] a contar, então o que surge primeiro são os números naturais a partir do 1. Então, o conceito de zero já é uma abstração, que serviu mais para as operações. Para gerar operações aritméticas, e já tem mais a ver com as frações, não sei exatamente. Eu li uma vez, mas não me recordo agora*". "Não é surpreendente que a humanidade começou com os números naturais e a criança também começa com eles?" "*Não. Parece que é natural. Não sei. [...] não me surpreende [...]*". P02U afirma que o zero surgiu nos anos "*1700, 1800 e poucos*". P14 responde: "*Não sei a data que surgiu [o zero], mas sei que é bastante antigo. Os índios Hindus tinham o zero, não?*" E os gregos e romanos? "*Os Gregos eu acredito que não, mas os índios Hindus sim*". P17M, professora de ensino médio, diz: "*Demorou milhares de anos para ser inventado ou descoberto pelos indo-arábicos*". E continua: "*Não me lembro exatamente em qual época, mas sei que demorou muitos anos a dar uma solução; [para] o nosso sistema que é de base decimal veio a ser uma grande solução, para os números que antes eram de forma infinita. Exatamente quando, não sei. Mas [isso] veio a dar uma tremenda solução*". E continua: "*Acho que o zero foi inventado por todos*", que a matemática da Grécia e Roma antigas também o tinham; mas não no início. "*No princípio, tinha a noção de conjunto vazio, mas não se tinha o número, a álgebra*". P01U não hesita e diz "*Não*" para a pergunta sobre a existência do zero na matemática grega e romana. Mas acrescenta: "*não tenho claro*". P12U diz: "*Veio dos hindus, não?*" "É possível fazer matemática com números romanos?" "*Hmmm... com números romanos não. São utilizados [apenas] para contar*". P06U diz: "*Não lembro do momento histórico em que existia o zero. Nas matemáticas antigas, não existia. [...]. Em geral, escreviam frases. [...]. Então, na história da Matemática foi assim. A simbologia é muito atual, dos últimos séculos*". P16F, professora de ensino fundamental, diz que o uso do zero começou "*Quando começou o sistema de numeração decimal que utilizamos aqui, que é onde utilizamos o zero*". E acrescenta: "*Mas, antes, no [sistema] binário; [...] agora, utilizamos o zero porque estamos em outro* *sistema*". P11M afirma que a matemática que ensina surgiu "*Assim, formalmente, quando se queria realizar as contas. Queria se ter registro em uma empresa, quanto entrou*". "*Formalmente, não é tão antiga*".

Esses 11 docentes apresentam fragmentos de informações históricas desconectados entre si, vazios de verdadeira historicidade[8]. É impossível compreender, com tão precária visão histórica, o surgimento e a evolução dos diferentes conhecimentos matemáticos.

**2.2 Ideias mais consistentes**

P12U diz: "*O zero, em diferentes culturas, era conhecido como o nada, o vazio. Aí chegaram os árabes, os hindus e atribuíram um símbolo. Mas desde os egípcios, os chineses, já há um espaço para a área [em] que não havia nada*". P13U afirma: "*O zero dá muita dificuldade; até hoje, alguns dizem [que] é um natural, [outros que] não é um natural. Se fosse um natural, existiria a divisão do zero, coisa que não há.* $\frac{1}{0}$ *ou* $\frac{2}{0}$ *é um quociente que te dá uma forma infinita. Ou seja, não está determinado. Então, como fariam para contar [...], não sei*". À pergunta, se é possível Matemática sem zero, ela responde: "*Uma transformação linear, se não tem zero não é uma transformação linear*". P09FM responde: "*No meu entender [...], o valor zero é um valor referencial. Na física, zero é a posição do observador. Eu estou sentado aqui; então, tudo o que estou vendo, à direita e à esquerda, posso dizer em que lugar está. Eu estou no lugar zero, no lugar do observador, no ponto de referência. Se nós usamos o conceito matemático, pode-se explicar este número. Por que os números naturais foram criados? Porque se começou na natureza [...]. Por exemplo, uma árvore, ou 100 formigas, ou cinco mulheres. Por acaso eles caminhavam e diziam 'zero homens' ou 'zero formigas'? O zero não aparecia. O valor zero*

[8] Definimos historicidade como o sentido de gênese dos eventos históricos na medida em que são possibilitados pelo que antecedeu e possibilitam o que sucederá; análogo ao que acontece com a evolução do sujeito epistêmico: uma construção é possibilitada pelo que antecedeu e, ao mesmo tempo, abre possibilidades para construções novas que serão, ou não, realizadas pelo sujeito.

*aparece no mundo quando se subtraem dois valores. 5 menos 5. O que resulta? Resulta nada. Esse nada é um número. Como represento esta quantidade?"* Ele acredita que o zero "*[...] surgiu com os Hindus, quando começaram a criar os números. Inclusive, [pel]a necessidade de poder chegar até 10 [...]*". Pensa que isso teve início há, aproximadamente, 1000 anos.

Dos 17 docentes, apenas três demonstram algum conhecimento histórico mais consistente, embora sem precisão das épocas: concordância com o significado do zero na história da Matemática; sua importância na construção do sistema decimal; concordância com Guedj (1999) a respeito de sua origem hindu. Três docentes, ou não responderam ou suas respostas não contribuíram para esta análise.

**3.0 Origem histórica da aritmética, da álgebra e da geometria**

O papiro de Rhind, ou de Ahmes (BOYER, 1999, p. 8), data de 1650 a.C. Ele traz informações sobre o domínio da aritmética no Egito Antigo. Encontram-se também nele rudimentos de álgebra e de geometria. Em 600 a.C, os babilônios já mostravam grande domínio de operações aritméticas fundamentais, o uso de lugar vazio para o que será futuramente o zero e, por volta de 400 a.C, exibem um algoritmo para raiz quadrada. Na verdade, houve avanços na aritmética e na geometria de 4000 a 2000 anos a.C. Mas, a criatividade maior parece ter acontecido entre 2000 e 400 ou 300 a.C. As contribuições matemáticas de China e Índia antigas são mais ou menos contemporâneas das dos egípcios e babilônios. Que conhecimentos dessa rica e complexa história aparecem nas respostas dos docentes ao responderem à pergunta: "Quando surgiram a aritmética, a álgebra e a geometria?"

**3.1 Sentido histórico frágil ou inexistente**

Responderam a essa pergunta: P17M, P02U, P03U, P16F, P12U, P17M, P10M, P01U. As respostas mais frequentes foram do tipo: "Não sei"; "Também não sei"; "Realmente, não sei"; "Sou ignorante". Seguem-se as respostas: a geometria surgiu "[...] *acho que com Euclides, ao fazer seus gráficos*"; ou "[...] *surgiu com os gregos. Pitágoras, gente assim. Estimo que isto tenha, pelo menos, dois mil anos. Mas não sei de que época era Pitágoras. [...]*". E a álgebra? Surgiu num país longe daqui e, talvez, seja mais antiga que os gregos. "*[...] para mim [ela] está associada aos árabes. [...]. Mas também não sei quando começou*". Ou, ela começou com os gregos e a aritmética veio antes. A álgebra, "*Não saberia dizer*". "Onde foi, na América, na África?" "*Não, na América, não*?". "Na Ásia, na Europa?" "*Na Europa?*" A geometria "*nasce por necessidade. Por exemplo, a roda. A mesma roda começa a gerar a circunferência e a buscar as propriedades desta figura. [...], [então] começamos a falar de uma figura geométrica*". Com respeito à Aritmética, diz que "*ela nasce em função do somar etc. E começam a se dar conta, a respeito da semeadura; [...] se eu semeio tal quantidade [...]; mas o lugar eu não sei*".

Esses oito docentes demonstram desconhecimento quase total da interessante e importante história da Aritmética, Geometria e Álgebra; gênese e o desenvolvimento nos primórdios dessas matemáticas.

**3.2 Um pouco de sentido histórico**

Responderam a essa pergunta os docentes P05U, P12U, P09FM, P04U, P06U, P14U e P12U.

A aritmética surgiu "*com os cálculos [...]. Isto é o mais antigo possível*"; ela "*começou com os gregos, formalmente com teoremas e números primos*"; "*[...]se desenvolveu no Egito [e, também,] em outras culturas, como na hindu; [...] os árabes [...]; é tão*

ISSN: 1984-1655

*antiga quanto a geometria [...]*"; também pode ter sido "*[n]o princípio da Antiguidade*". Mas nem tudo, como "*Diferencial e Integral*" que "*surgem com Leibniz, com as 'Notações', com os matemáticos da época seguinte...*". "De que época é Leibniz?" "*Moderna. [...] em matemática há conceitos, teoremas e noções que não mudam. São os que se descobriram em algum momento e o que fazemos é usá-los. Em alguns casos, aparecem novos corolários. [...] a matemática que se trabalha segue estando embasada na matemática que se descobriu em um primeiro momento*"; "*[...] creio que [ela surgiu] quando formalizaram a escrita*". "*No Peru, os Incas utilizavam os Quípus*[9]*, com os nós; eles podiam contar quantos animais tinham; [saber] quanto as pessoas estavam entregando em produtos. [...]. Os nós eram distintos, para dizer outras quantidades*". Para somar, "*[...] amarrava e, quando queria descontar, desamarrava*". "Então, tinha uma forma de equação?" "*Claro*". Já "*A geometria surge com a necessidade de buscar medições [...]; quem [a] trabalha muito são os gregos. [...]*". Há "*Mais de dois mil anos*". "*A geometria [surgiu] na época dos Gregos, com Tales e, logo, com Euclides, com que se consegue reunir a informação que havia [de] outras culturas também. O livro d'Os Elementos [de Euclides], do que é Geometria*". Um desses docentes está convicto de que a geometria surgiu primeiro "*porque o ser humano precisou construir coisas; quando começou a formar objetos, precisou da geometria. Quando a geometria começou, em forma de construção, encontraram propriedades básica da mesma geometria. Estas propriedades têm que [se] representar por expressões numéricas, como agora as operações: como eu encontro o ângulo, as medidas, o perímetro. [...]. Para isso é necessário aritmética e se começa a ter necessidade de somar, subtrair. Por exemplo, como encontro a área de uma região*". A geometria apareceu há "*pouco mais de 1000 anos*". "*[...] desde Euclides; o que ele fez foi recombinar as coisas que se conheciam nessa época, que vieram de muito tempo atrás,*

[9] Eram feitos da união de cordões, cada cordão significava uma mensagem distinta; a posição e a quantidade dos nós indicava valores numéricos segundo um sistema decimal. Para cada atividade (agricultura, exército, engenharia etc.) existia uma simbologia própria de cores. Tratava-se de um sistema bastante complexo que representava, entre outras, potências de dez e o zero representado pela ausência de nós.

ISSN: 1984-1655

*ou seja, [do EGITO] antigo*". "Era possível Geometria sem Aritmética?" "*Não estou muito preparado! [...] Eu não acreditava que existisse aritmética e que Os Elementos, de Euclides, estariam construídos deixando de lado os números. Como que toda a geometria se faria sem usar os números? Isso é o que me gera um pouco de confusão, porque deveria haver um pouco de aritmética. Nessa construção geométrica... a aritmética teria, até onde entendo, pouco lugar*". Ela veio "*Dos gregos e, também, dos egípcios*". "Dos egípcios?" "*Sim, a geometria Euclidiana, as paralelas, o teorema de Pitágoras, de Thales. Retas que se cruzam e, também, a circunferência*". "É de lá a origem da matemática que ensinas?" "*Sim, sim, claro*". *A geometria [...], de maneira formal, sistematizou-se com os gregos. [...]. Como teoria sistemática foi Euclides. [...]. Não sei a resposta agora, mas é fácil de descobrir*". A geometria, como ideia formal, é de Euclides. Mas, de forma empírica, surgiu muito antes. Porém, "*A álgebra surge com os babilônios, os persas. [...]*". "[...] *com os hindus, os árabes*". Em "*500, 400 a.C. Não lembro bem*". Ou em 1500. "*A álgebra [...] moderna se pensa com o estudo das equações, 1300, 1400. Não sei, mas é certo que havia álgebra antes. Mas, [...], a concepção, mais ou menos moderna, [é] um estudo mais sistemático das equações*". "*O primeiro que fez a álgebra foi junto com a Aritmética, também porque no sentido de que a Aritmética [tem] propriedades: a soma (1+2) = (2+1) não deixa de ser, no fundo, propriedade algébrica. [...]*". Mas, "*a álgebra sim, se sabe os Al-Khowarizmi*[10]*; são os persas, na Idade Média. [...]. Pode ter sido no século XII a XV, mas eu não sei o ano*".

Esses sete docentes mostram mais informações históricas que os docentes de 3.1, mas pouca preocupação com a gênese[11] histórica, isto é, com o aparecimento primevo e com a posterior evolução histórica das construções. Situar em épocas, ou datar novidades matemáticas, configura uma história factual que

---

10 Mohammed ibu-Musa Al-Khowarizmi (780-850), matemático árabe. (BOYER, 1999)

11 "[...] uma gênese constitui, sempre, a passagem de uma estrutura mais simples a uma estrutura mais complexa, e isto segundo uma regressão sem fim" (PIAGET, apud MONTAGERO e MAURICE-NAVILLE, 1998, p 177).

tem sua importância, mas está longe de esclarecer por que surgiram tais construções matemáticas ou o que os matemáticos buscaram responder, quais problemas tentaram resolver naquele momento histórico; se buscaram resolver problemas surgidos no interior da própria Matemática ou se procuraram responder a problemas colocados pela realidade contemporânea a eles. E como tais construções abrem possibilidades para novas conquistas matemáticas.

**4.0 Relações da matemática antiga com a atual**

Este item quer mostrar a compreensão dos docentes a respeito das relações entre a Matemática antiga e a atual; se eles veem relação de gênese, de origem, entre elas. Eles respondem à pergunta: "Que diferenças existe entre a Matemática da Grécia Antiga e a atual?"

**4.1 Desconhecimento histórico**

"*O sistema de numeração que utilizavam [na Grécia Antiga] era diferente do que utilizamos com números, com dígitos*" (P16F). "*A matemática com o tempo não se modificou. Tempos atrás, praticamente são as bases de hoje em dia*". "Mas, descobriram coisas novas!?" Sim, "*porque matemática dá para isso: descobrir coisas novas*" (P10M). Diz ela: "*[...] antes eles faziam os cálculos com régua e com compasso. Então, tinham que ter medidas precisas. [...]. Agora, contamos com tecnologia*" (P12U). "*Não sei, pois estamos estudando os mesmos matemáticos de sempre; os antigos: Euclides, Pitágoras, Copérnico, Descartes [...]. Não sei qual a diferença*" (P17M). Esta docente mostra dificuldade de entender a pergunta. Sabendo que ela ensina cálculo, o entrevistador pergunta: "Quando surgiu?" "*Não sei*" (P01U).

O conhecimento histórico desses cinco docentes é, praticamente, nulo.

ISSN: 1984-1655

**4.2 Informações interessantes**

*"Quando se ensina na escola a geometria, a plana e a espacial, é quase o mesmo. Varia quanto ao rigor. No livro dos Elementos*[12] *se faziam demonstrações e, atualmente, a maioria das coisas se reduziu a simples fórmulas*". "Diz-se que houve grandes mudanças dos Gregos para Descartes e deste para hoje", objeta-se. Ela responde: "C*om Descartes, sim, se introduziu a Geometria Analítica [...] que também se ensina, atualmente, na escola e na Universidade. Mas é quase o mesmo. Não variou muito*" (P12U). Ela hesita ao afirmar perguntando: "*Seguimos fazendo matemática antiga; [...]. Agora, podemos ver imagens [com o uso de aplicativos], [...] mas a matemática, os teoremas que usamos, são de antes. Toda a parte matemática formal, seguimos usando a de antes. [...]. Há um teorema, que eu estou usando agora, [que] é do ano 1983. E isso nasceu de Hironaka*[13]*; são matemáticos puros Hironaka [...] e outros matemáticos. E toda a matemática [que eu trabalho] é do ano 1500 e tanto, 1700. Então, a matemática antiga segue sempre, são os pilares para poder continuar fazendo coisas*" (P13U). Diz ele: "*A única diferença é que, hoje, contamos com mais ferramentas para poder explicar [...]. Porque os conceitos que nós temos, hoje, são originados por eles. Existe uma classe de geometria [que permite] definir e encontrar a área de uma circunferência. Então, tinha uma demonstração de que se pegou uma forma de triângulo, [cuja base] era a menor possível. Se fizermos isso, vamos encontrar a circunferência; essa definição deve ter ocorrido há 2 ou 3 mil anos atrás*" (P09FM). Ele responde: "*[...] é possível que as diferenças não sejam tão cruciais, entre os Elementos de Euclides e algumas formulações atuais. Nos Elementos, de Euclides [323-283 a.C.], já há um embrião do sistema axiomático; então, a organização lógica já está presente como algo importante. [...]. Exigências mais precisas [surgem] quanto ao rigor [...]. Ou seja, [há] uma parte da geometria que diz que isso está*

[12] *Elementos*, de Euclides, livro mais editado depois da Bíblia, é de 300 a. C, aproximadamente. Reúne conhecimentos de geometria, álgebra e aritmética.

[13] Heisuke Hironaka, do Departamento de Matemática de Harvard, nasceu em 9 de abril de 1931. É um matemático japonês que se notabilizou por sua contribuição à geometria algébrica abstrata.

*essencialmente correto como foi feito naquela época. Uma diferença importante, me parece, é o papel, não sei se da Aritmética, [...] mas os números, [... no] século XVII, [...] foram muitíssimo mais importantes. [...] A matemática de hoje em dia está muitíssimo mais impregnada dos números, [...]; números reais, por exemplo*" (P04U). Ele diz: "*talvez haja duas grandes diferenças*": "*Uma, que a atual está construída em uma pirâmide imensa de conhecimentos, e a da Grécia [Antiga] era como [criança] 'de fraldas'. [...]. O adulto já viveu um montão de coisas e se transformou muitas vezes até chegar a ser adulto. A matemática, eu creio, é igual. [...]. Além de agregar conhecimento, [a atual agrega] também tecnologia, que também se fez cada vez mais fácil e mais complexa, igual a um ser humano. No sentido [de] que, para expressar algo, [o faz] de maneira mais fácil; mas isto é uma oportunidade de expressar realidades mais complicadas*". Além disso, era impossível que "*Os antigos matemáticos [...] chegassem às equações, [...] às teorias que existem hoje em dia. Totalmente impossível. Foi importante simplificar a linguagem; passar os números reais, dos números romanos ao sistema decimal – que é muito mais fácil – para entender e para representar e trabalhar com grandes quantidades. Se você agrega o zero, sabe que multiplicou por dez; muito mais fácil que os romanos. Estas simplificações [...] são fundamentais, porque permitem expressar e expor [de modo mais fácil] estes problemas mais complexos que [os de] antes. [...]. Neste sentido, a linguagem é, ao mesmo tempo, mais fácil e mais complexa*" (P06U). Ele afirma que "*É difícil saber. Até certo ponto a geometria de Euclides é surpreendentemente moderna, apesar de tudo. Porque, como ideia romântica, tudo é matemática... Eu diria que a aritmética é um pouco menos pelo problema do zero, por conhecer as composições dos números primos, conhecer que os números primos são infinitos; [os antigos] sabiam que existiam números racionais, sabiam de bastantes coisas e eram bastante abstratos. Eu não acredito que [há] diferença tão substancial (entre a matemática antiga e a atual). Hoje sabemos mais, mas eu diria que Foucault*[14] *descobriu uma coisa que é surpreendentemente moderna: zero dividido por*

[14] Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868), físico e astrônomo francês, mais conhecido pela invenção do Pêndulo de Foucault – dispositivo que demonstra o efeito da rotação da Terra.

*zero. Lhes faltava a álgebra, faltava o cálculo. O cálculo é do século XVI e XVII. As coisas de Arquimedes são bastante modernas nos cálculos, já tem limites, cálculo de áreas, mas cálculo eu diria que é pré-Newton. Esta foi a outra grande revolução, outro grande salto: o cálculo. Mas os gregos e a geometria são surpreendentemente modernos. Para ter um problema a ser resolvido no século XIX, [...] faltava cálculo, álgebra, coisas que vieram depois [dos antigos gregos]. [...] A grande revolução na Matemática, o Teorema de Euclides, a álgebra com Al-Khowarizmi, a geometria analítica de Descartes, Newton, Cálculo e, mais modernamente, a superfície terrena, análise complexa, geometria de Riemann*[15] *e, atualmente, as revoluções que estão em andamento, que são mais difíceis de quantificar. A teoria dos Operadores no século XX. É mais difícil responder sobre as revoluções atuais, quanto mais contemporâneas vêm a ser. Pelo menos temos mais perspectivas para brincar...*". "E as relações recentes da Matemática com as ciências biológicas?" "*Sim [...] existe uma mini revolução que tem a ver com a vinculação que existiu com a física-matemática [...]; existem quantidades de coisas que são feitas a partir da física. A teoria dos Operadores surgiu [com] uma boa parte da mecânica quântica. [...]. A impressão é que a física é mais antiga. Que são da primeira metade do século XX, de 50 a 70; mas a biologia é muito mais recente, por volta de 80 a 90. Neste caso, sei muito menos. De Física eu sei um pouco, mas na Biologia minha ignorância é total*" (P14U).

Esses seis docentes diferenciam-se bastante dos cinco anteriores (4.1) – e de todos os demais; e os dois últimos ainda mais. Cinco, dentre esses seis, fazem transparecer com clareza a ideia de gênese histórica: os conhecimentos anteriores, como dos antigos gregos, abrem caminhos para os conhecimentos mais recentes, como os da era moderna e, mais ainda, os do Século XX; e atuais do Século XXI. Dizem eles: os "*conceitos que nós temos, hoje, são originados*" pelos gregos antigos (P09FM); "*a matemática antiga [fornece] os pilares para poder continuar*

[15] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão, deixou contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial.

*fazendo coisas*" (P13U); "*Nos Elementos, de Euclides, já há um embrião do sistema axiomático; [...] a organização lógica já está presente como algo importante*" (P04U); a Matemática atual "*está construída [no topo de] uma pirâmide imensa de conhecimentos*" (P06U); "*Para ter um problema a ser resolvido no século XIX, [...] faltava cálculo, álgebra, coisas que vieram depois*" (P14U).

Essa forma de conceber os conhecimentos matemáticos atuais como tributários de tantos conhecimentos anteriores, construídos nesses milhares de anos que nos antecederam, constitui a historicidade desses conhecimentos; denotam uma promissora noção de gênese histórica.

**5.0 Época das grandes revoluções matemáticas**

Na busca da concepção histórica dos docentes, sobre a evolução dos conhecimentos matemáticos, fez-se uma última pergunta que, de certa forma, resume as anteriores: "Em que época ocorreram as grandes revoluções matemáticas?" Classificamos suas respostas em duas categorias: frágeis informações e melhores informações. Analisemos as respostas de 13 professores; quatro, ou não responderam, ou suas respostas nada trazem para a presente análise.

**5.1 Frágeis informações**

A resposta genérica "*Na antiguidade*" é seguida da justificativa: "[...] *o que estudo é, principalmente, antigo*" (P17M). "*Geometria podia ser uma [grande revolução matemática], porque [em] tudo que nos rodeia há, praticamente, [...]*" geometria. Outra é a porcentagem que "*me permite descrever o que acontece com a população*". Exemplo: "*A delinquência subiu 3%, 5%. [...]. [Percentual] está no jornal, está na bolsa de valores*". "Pode-se chamar de revolução matemática a passagem da aritmética para a álgebra?" "*[...] sim, porque com a álgebra se pode generalizar qualquer coisa que venha da aritmética; por exemplo, generalizar os números pares, descrever sequências*

ISSN: 1984-1655

*[...]*" (P10M). "*A matemática evolui a cada ano [...]*". "A passagem da Geometria euclidiana à Álgebra, foi uma revolução?" "*Sim, eu creio que sim*". "E da álgebra para o cálculo diferencial e integral?" "*Sim, também. [...]*". "Podes datar esses eventos?" "*Cálculo diferencial e integral é de pouco [tempo]. Não posso dizer com exatidão: [se] 10, 15, 20 ou 100 anos. Não sei. Mas sei que fazer é suficiente. Geometria euclidiana faz muito tempo*" (P13U). "*Há escolas e há momentos nos quais a matemática ou concepções mudam*". Além da pitagórica, "*que é a mais antiga*", afirma que há uma na Idade Média, mas não lembra o nome do grupo responsável: "*É um grupo muito importante que faz mudanças; [...] faz alguma reforma sobre o que é o ensino de matemática...*" – confunde, pois, história da Matemática com a história do seu ensino (P05U). "*Por exemplo, em tempo de Guerra. [...] Isto de trabalhar com sistemas e equações. Na guerra queriam otimizar custos*". "*[...] os de exército tinham esta informação. Era algo secreto. E depois viram que nas empresas se podiam aplicar*". "Isso na matemática recente?" "*Sim. Porque utilizam programadores... [...]*". "Entre Euclides e Descartes aconteceu alguma revolução na Matemática?" "*Claro, porque quando trabalhamos coisas que queremos representar, usamos o que fez Descartes. Usamos o plano cartesiano*". "E de Descartes até hoje?" "*Ah, agora se conta com tecnologia para ajudar a fazer cálculos*". Antes, faziam-se cálculos no papel, hoje ingressa-se com dados no computador e se espera segundos. "*Mas aí, entrou a matemática discreta. Entrou tudo que é com computação [...] codificações, tudo isto*" (P12U). "*Acho que [...] finais de 1800, teve o cálculo. Depois, [...] teve outra muito forte. [...] no começo do século XX; começou a ter grandes estruturas teóricas, grandes teorias que fizeram a matemática disparar. A grande revolução foi ali, para mim*" (P02U). "*Para mim, um ponto importante, creio, foi o Tratado de Gauss... [...]. Pode ser que seja pouco, mas Gauss foi o que se deu conta, encontrou uma forma de modelar. Mas as grandes revoluções matemáticas, eu não sei*" (P03U). "*Hummm [...] suponho que com os gregos, primeiro...*". "E depois?" "*E, mais atualmente, no século XIX, e suponho que no XX também, tenha havido revoluções*". "Alguma em especial?" "*Não sei, não. Não tenho visão histórica suficiente para*

*tal. Certo que qualquer outro matemático te vai dar uma resposta melhor para estas coisas*" (P06U). A docente surpreende-se com a pergunta: "*Oh, oh, oh! Meu Deus!*" "Mais ou menos". "*Este passo foi importante, [o] do limite; porque tudo é limite, derivada é um limite*". "De Euclides a Leibniz, quanto tempo?" "*Ah, muito. Não tenho muita clareza no aspecto temporal*". "De que época é Leibniz?" "*Ah!*" "Sabes de alguma outra grande revolução matemática?" "*Não sei, não saberia dizer*" (P01U).

Esses nove docentes respondem com informações imprecisas, com generalidades que quase nada informam ou, ainda, confessam ignorar a história da ciência que ensinam. Com raríssimas exceções, eles agem didaticamente como se a Matemática que ensinam não tem, ou, pior, não precisa de história. Como explicar tal atitude?

**5.2 Melhores informações**

Ocorreu revolução matemática "*Quando introduziram, no cálculo, o número decimal*". Isso ocorreu no início da era industrial. "*A física e a matemática também [se] desenvolveram no século XVI, XVII. Com o cálculo, com Newton, com Leibniz*". "E nos séculos seguintes?" "*Sim, por exemplo, a introdução da topologia. Também a estatística diferencial. Estudos das probabilidades, as teorias de grupo. Bom, as teorias de grupo, antes, com Galois*[16]*. Atualmente, se segue investigando, provando teoremas, conjeturas*" (P12U). Ocorrem revoluções "*quando existem problemas que não são resolvidos – problema matemático leva tempo para resolver; quando [...] é resolvido, se produz uma revolução, uma mudança nos paradigmas. [...] Cada vez que se resolve um problema, é feita uma revolução, uma mudança [...]; porque, como eu disse, a matemática é uma construção da mente. [...]. [Assim], passamos da matemática condutivista à construtivista, porque depende do que será criado, do que será construído*" (P15U). "*Para mim, a*

[16] Évariste Galois (1811-1832), matemático francês. Criou um domínio novo da álgebra abstrata: a teoria dos grupos, além de resolver problema antigo ao determinar a condição necessária e suficiente para que um polinômio pudesse ser resolvido por raízes.

*mudança começa quando começamos a entender que a quantidade zero é obrigatória nos números. Zero como nada e zero como lugar de posição, ou seja, zero que representa a quantidade que não existe [...]; ou quando, junto com um número – como um e zero, 10, dois e zero, 20 – [vai] dando uma ordem diferente. O zero e as operações de soma, quando [Isaac] Newton quer encontrar a área de uma figura e não pode fazer porque é uma figura geometricamente conhecida, usa o que os gregos usavam, que se chama de retangulinhos; [foi n]esse dia [que] fizeram a definição de integral, que hoje em dia é uma ferramenta muito usada [...]"* (P09FM). "*Uma [revolução] me parece que é a criação do cálculo diferencial. Outra, o descobrimento da geometria de cálculo das medianas [...] um pouco posterior [ao cálculo diferencial]. Depois, [...] em 1900, ocorria uma mudança importante na matemática, com fundamentos no [...] trabalho de Hilbert*[17]*, ou a Geometria e outras coisas, ou seja, por afinar os fundamentos da Matemática*" (P04U).

Esses quatro docentes apresentam informações interessantes que denotam, nas entrelinhas, a ideia de que as criações ou invenções matemáticas, embora algumas vezes datadas por eles com pouca precisão e até erradamente, são fundamentais para a evolução da Matemática; concebem que cada nova construção mantém vínculo com as precedentes e orienta e possibilita as futuras.

[17] David Hilbert (1862-1943), alemão, membro estrangeiro da Royal Society, é considerado um dos mais influentes matemáticos dos séculos 19 e 20. Responsável por avanços dos fundamentos de diversos ramos da matemática moderna.

ISSN: 1984-1655

**6.0 Conclusões**

Vimos a grande predominância de visões históricas precárias, ignorando com frequência dados históricos básicos e manifestando com parcimônia concepções afinadas com uma mentalidade historicista, de gênese e desenvolvimento histórico realizados por ações humanas. Quando apareciam conhecimentos históricos mais consistentes, reduziam-se, na maior parte, a dados factuais, muitas vezes imprecisos ou até errados, vazios de historicidade. Com raras exceções, foi unicamente a duas perguntas que apenas alguns professores manifestaram concepções de história pautadas pela concepção de gênese ou historicidade.

Embora a análise tenha encontrado 24 (de um total de mais de 80) respostas com algum teor histórico: quatro à pergunta 1), três à pergunta 2), sete à pergunta 3), seis à pergunta 4), quatro à pergunta 5), apenas cinco respostas à pergunta 4) e quatro respostas à pergunta 5) revelam compreensões históricas impregnadas de verdadeira historicidade; de que o conhecimento matemático resulta de um milenar processo histórico, construído pela ação humana. As quatro respostas à pergunta 5) afirmam que o surgimento do cálculo, da topologia, da estatística diferencial, das probabilidades, das teorias de grupo, da introdução do zero no sistema decimal, da definição de integral, da geometria de cálculo das medianas significou revoluções matemáticas pois "*a matemática é construção da mente*" humana e, por isso, tudo nela depende do que será construído. Já nas cinco respostas à questão 4), aparece a melhor noção de historicidade que encontramos nesta análise: as construções matemáticas de uma época são, ao mesmo tempo, "*os pilares*" e o "*embrião*" das construções posteriores. Afirmam que a Matemática atual "*está construída [no topo de] uma pirâmide imensa de conhecimentos*" precedentes. Cada conhecimento se origina dos anteriores e possibilita os seguintes – que só acontecem se a ação humana entrar em cena. Ação de Arquimedes, Euclides, Al-Khowarizmi, Descartes, Newton, Leibniz, Riemann, Hilbert e tantos

ISSN: 1984-1655

outros. Portanto, apenas nove respostas, dentre as mais de 80 (17 docentes responderam a cinco perguntas), vieram impregnadas de historicidade ou do sentido de gênese histórica.

Esse menosprezo pelas origens históricas projeta-se, na sala de aula, como ensino de conteúdos matemáticos sem a preocupação com suas origens e com as relações entre eles; parece que esse descaso faz parte da formação docente, tal a frequência com que aparece. P13U chega ao ponto de afirmar, após reconhecer que "*Não posso dizer com exatidão*" se o cálculo diferencial e integral surgiu há 10, 15, 20 ou 100 anos, "*Mas sei que fazer é suficiente*"; afirma, pois, que o conhecimento da história da Matemática é supérfluo. O sentido de historicidade como gênese histórica não prescinde do conhecimento dos fatos; como pode saber o que possibilitou a Geometria Analítica de René Descartes, e qual sua repercussão futura, se não sabe se esse filósofo e matemático viveu a.C ou d.C – "*Não sei se de antes, ou depois de Cristo*." (P17M). A Matemática é um daqueles campos do saber "onde o conhecimento do fato não tem valor senão em função dos processos de descoberta que permitiram que ele fosse estabelecido" (PIAGET, 1974, p 69).

> Não é o conhecimento do teorema de Pitágoras que irá assegurar o livre exercício da inteligência pessoal: é o fato de haver redescoberto a sua existência e a sua demonstração. O objetivo da educação intelectual não é saber repetir ou conservar verdades acabadas [...]: é aprender por si próprio a conquista do verdadeiro, correndo o risco de despender tempo nisso e de passar por todos os rodeios que uma atividade real pressupõe. (p.68-69)

Verificamos, tanto no Brasil quanto nesses três países sul-americanos, a mesma desatenção da docência a essa história. É bem conhecida a dificuldade de crianças, de se iniciar em álgebra. Uma criança, de nove anos, assim se expressou, a respeito, para sua professora: "Tudo ia muito bem até aparecerem as letrinhas". Com frequência, a docência não prepara essa, e tantas outras passagens, de um a outro conteúdo curricular, utilizando-se de informações psicogenéticas

(PIAGET & SZEMINSKA, 1975a; 1975b; 1978 ) e de gênese histórica, respondendo a perguntas como: por que a criança só consegue compreender álgebra depois de dominar a aritmética; quais os obstáculos epistemológicos que ela enfrenta ao deparar-se com problemas formulados algebricamente (KIKUCHI, 2012, p. 80); por que só consegue operar somas e subtrações, depois de adquirir a noção de número; por que a álgebra apareceu tardiamente com relação à aritmética na história da Matemática, e o cálculo diferencial e integral tardiamente com relação à álgebra? Qual a relação entre essas matemáticas ou entre esses três conteúdos matemáticos? Afinal, "Estudamos história não para conhecer o futuro, e sim paras ampliar nossos horizontes, entender que nossa situação presente não é natural nem inevitável e que, consequentemente, existem mais possibilidades diante de nós do que imaginamos" (HARARI, 2018, p. 325-326).

Tanto empirismo quanto apriorismo desconsideram os processos de construção das estruturas lógico-matemáticas pelo sujeito epistêmico: desvalorizam a ação do sujeito na medida em que afirmam a hegemonia da experiência empírica ou a pré-formação das estruturas lógico-matemáticas. Analogamente, desconsideram os processos históricos de formação desses conhecimentos. Ora, como constatamos, em análises anteriores, os docentes, ao professar concepções empiristas, sustentadas por concepções aprioristas, comportam-se de forma congruente com suas convicções epistemológicas ao desconsiderar os processos históricos na formação dos conhecimentos matemáticos, tanto no sentido filo quanto no ontogenético.

Pode-se afirmar, ao concluir esta análise, que a maioria das respostas dos docentes apresenta conhecimentos históricos inconsistentes; conhecimentos que não passam de informações factuais, imprecisas, desconectadas entre si, vazias de historicidade ou da noção de gênese histórica. Há também aqueles que ou não respondem, ou afirmam ignorar essa história ou, ainda, apresentam informações errôneas sobre ela. Dão a entender que, para o ensino que praticam, essa história é supérflua. Mas, felizmente, encontramos algumas respostas animadoras – apenas nove de mais de 80 – que afirmam que a Matemática é uma construção humana na qual cada novidade, ao mesmo tempo em que emerge do topo de uma pirâmide imensa de conhecimentos, desempenha o papel de embrião, ou de pilar, para construções futuras.

As respostas obtidas assemelham-se às de docentes brasileiros quanto à presença de epistemologias de senso comum – empiristas ou aprioristas – fundamentando as concepções de história na medida em que desvalorizam a história da Matemática ou a reduzem a sucessões factuais, vazias de historicidade ou de concepção de história como gênese ou processo formador segundo o qual, cada nova construção matemática foi possibilitada pelas construções anteriores e, ao mesmo tempo, abriu possibilidades para as construções seguintes. Trata-se, portanto, de conhecimentos quase inteiramente factuais, relativamente longe de uma genealogia dos conhecimentos matemáticos: o que precedeu, como isso serviu de base para o que veio depois, em função de que foram construídos tais conhecimentos, quase não aparece. Esse processo histórico é análogo à ontogênese das capacidades lógico-matemáticas pelo sujeito epistêmico. A diferença reside no fato de que aparecem, nesta análise, mais respostas impregnadas de historicidade do que nas respostas de docentes brasileiros.

Impõe-se a continuidade de investigações como esta, cujo caráter é exploratório, ou similares, para se chegar a conhecimentos mais aprofundados das implicações de concepções epistemológicas docentes, empiristas e aprioristas, no ensino de Matemática; e, mais amplamente, na educação matemática.

## Referências

BOYER, Carl B. **História da Matemática**; sinopse cronológica e vocabulário. **2ª.** Reimpr. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1999.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio.** Tradução: Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

HARARI, Yuval Noah. **Sapiens; uma breve história da humanidade.** Tradução: Janaína Marcoantonio. Porto Alegre: LP&M Pocket, 2018.

KIKUCHI, Luzia Maya. **Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental: uma aproximação entre os Obstáculos Epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais**. São Paulo: Faculdade de Educação – USP, 2012. Dissertação de Mestrado. Disponível em: file:///C:/Users/Lenovo/Downloads/Obstaculos_a_aprendizagem_de_conceitos_a.pdf

MONTANGERO, J. & MAURICE-NAVILLE, D. Tradução: Tania Beatriz Iwaszko Marques e Fernando Becker. **Piaget ou a inteligência em evolução. Porto** Alegre: Artmed, 1998.

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança**. Tradução: Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

______. **Fazer e compreender**. Tradução: Christina Larroudé de Paula Leite. São Paulo: EDUSP/ Melhoramentos, 1977.

______. **Abstração reflexionante; relações lógico-aritmética e ordem das relações especiais.** Tradução: Fernando Becker e Petronilha Beatriz da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

______ & SZEMINSKA. **A gênese do número na criança.** Tradução: Christiano Monteiro Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 1975a.

______. **Gênese das estruturas lógicas elementares.** Tradução: Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 1975b.

______. **Biologia e conhecimento; ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos.** Tradução: Francisco M. Guimarães. Petrópolis: Vozes, 1973.

______. **Para onde vai a educação.** 2ª. ed. Tradução: Ivette Braga. Rio de Janeiro: Livraria José Olympio Ed., 1974.

Recebido 20/10/2022

Aprovado 09/11/2022