ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

O PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO DE FUNÇÃO AFIM NA PERSPECTIVA DE JEAN PIAGET[1]

Suzana Domingues da Silva[2]
Clélia Maria Ignatius Nogueira[3]

Resumo

Este artigo apresenta recorte de uma pesquisa que teve por objetivo compreender o processo de generalização de função afim a partir de protocolos de pesquisas já realizadas pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática - GEPeDiMa, sob a perspectiva da Epistemologia e Psicologia Genéticas estabelecidas por Jean Piaget, particularmente em seus estudos descritos no livro *Investigaciones sobre la generalización* (1984). Para isso, foi realizada uma meta-análise dos resultados encontrados na pesquisa de Pavan (2010) intitulada *A mobilização das ideias básicas do conceito de Função por crianças da 4ª Série do Ensino Fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas*, e dos dados da pesquisa de Calado (2020) intitulada *Invariantes operatórios relacionados à generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim*. Na busca pela resposta à questão: *Quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização relacionadas ao processo de generalização de função afim, identificadas nas pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa?* Os resultados mostraram que, em relação ao processo de generalização indutiva e construtiva, estabelecidos por Piaget, a principal razão pela qual os alunos não avançam de um nível para outro, isto é, da generalização indutiva para a construtiva, deve-se ao fato de ainda não terem tomado consciência de suas ações e das formas de abstrações que a tomada de consciência determina sobre os problemas e atividades propostas. Quando o sujeito não

[1] Este trabalho é parte da dissertação de mestrado da primeira autora com orientação da segunda autora.

[2] Mestra em Educação Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PRPGEM da Universidade Estadual do Paraná – Unespar - Campus de Campo Mourão. E-mail: suzana369@hotmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8733-8466

[3] Doutora em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Docente do Corpo Permanente do PRPGEM – Unespar – Campo Mourão e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste – Campus de Cascavel. E-mail: cminogueira@uem.br.Orcid: http://orcid.org/0000-0003-0200-2061

Volume 14 Número 1 – Jan-Jul/2022
www.marilia.unesp.br/scheme
https://doi.org/10.36311/1984-1655.2022.v14n1.p102-144

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

passa da abstração empírica para a abstração reflexionante isso implica necessariamente no nível de generalização que esse sujeito consegue alcançar, independentemente da idade ou nível de escolarização. A partir desta pesquisa, foi possível constatar também que o professor, ao trabalhar a função afim, deve considerar a proposta de tarefas que oportunizem o desenvolvimento do processo de generalização em geral, e dessa ideia base de função afim.

Palavras Chave: Função Afim. Generalização. Epistemologia e Psicologia Genética. Educação Matemática.

THE GENERALIZATION PROCESS OF LINEAR FUNCTION IN JEAN PIAGET'S PERSPECTIVE

Abstract

This article presents a cut of a research that aimed to understand the process of generalization of linear function from research protocols already conducted by the Group of Studies and Research in Mathematics Didactics – GEPeDiMa, from the perspective of Genetic Epistemology and Psychology established by Jean Piaget, particularly in his studies described in the book *Investigaciones sobre la generalización* (1984). For this, a meta-analysis of the results found in the research of Pavan (2010) entitled *A mobilização das ideias básicas do conceito de Função por crianças da 4ª Série do Ensino Fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas*, and the data from the research of Calado (2020) entitled *Invariantes operatórios relacionados à generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim*. In the search for the answer to the question: *What are the possible reasons, according to Jean Piaget's theory, for the difficulties of students from different levels of schooling related to the process of generalization of linear function, identified in the research developed by GEPeDiMa?* The results showed that, in relation to the inductive and constructive generalization process, established by Piaget, the main reason why students do not advance from one level to another, that is, from inductive to constructive generalization, is due to the fact that they have not yet become aware of their actions and the forms of abstractions that this awareness determines about the proposed problems and activities. When the subject does not go from empirical abstraction to reflexive abstraction, this necessarily implies the level of generalization that this subject can achieve, regardless of age or level of schooling. From this research, it was also possible to verify that the teacher, when working with the linear function, should consider the proposal of tasks that allow the development of the generalization process in general, and of this basic idea of linear function.

Keywords: Linear function. Generalization. Genetic Epistemology and Psychology. Mathematics Education.

Introdução

O conceito de função emergiu da tentativa de filósofos e cientistas compreenderem e explicarem racionalmente os fenômenos naturais, e, apesar de sua definição em termos matemáticos aparecer pela primeira vez por volta de 1700 com os trabalhos de Newton, os primeiros indícios desse conceito surgiram com os pitagóricos (séc. VI a.C.) (NOGUEIRA, 2014).

Segundo Nogueira, "[...] o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática. É a função que dá mobilidade à Matemática, que retira a Rainha das Ciências da sua rigidez estática e permite a representação e o estudo de fenômenos móveis" (2014, p. 121). Considerando a importância deste conceito, ele é integrante do currículo da Educação Básica, aparecendo formalmente, nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Os resultados de pesquisas realizadas por Rezende, Nogueira e Calado (2020), Manzan (2014) e Pinto (2014), dentre outros, apontam que das ideias base de função, a saber: variável, dependência, regularidade e generalização a última é a de constituição mais complexa, para todos os sujeitos, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, até ao Ensino Superior.

Uma das razões para isso pode ser, segundo Tinoco (2011), que

ISSN: 1984-1655

quando o aluno começa a fazer o uso da linguagem algébrica causa uma ruptura na forma de pensar e agir em Matemática, até mesmo em alunos com mais facilidades em técnicas algébricas. Ainda para esta autora, os alunos dificilmente representarão uma determinada situação-problema algebricamente, e mesmo que conduzidos para tal, ainda assim, apresentam dificuldades em concluir a explicação pedida simbolicamente (*Ibid.*).

Para Tinoco (2011), "O uso da linguagem e das técnicas algébricas para argumentar matematicamente é muito pouco explorado" (p. 6). No entanto, "[...] o registro de leis gerais em linguagem algébrica ou geométricas é passo decisivo para que construam o conceito de função, embora não seja fácil" (NOGUEIRA, 2014, p. 9). Nesse mesmo pensamento, Tinoco (2011. p. 21) afirma que "A origem do conceito de função está intimamente ligada à necessidade do homem de registrar regularidade observadas em fenômenos e generalizar leis e padrões".

Para Blanton e Kaput (2005) o pensamento algébrico pode assumir várias formas, por exemplo, na generalização da aritmética envolvendo operações e propriedades numéricas; na generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais; na modelagem para expressar e formalizar generalizações; e para generalizar sobre abstrações extraídas de cálculos e relações. Dessas quatro formas, a generalização da aritmética e o pensamento funcional são os mais comuns do pensamento algébrico nos níveis escolares elementares (BLANTON; KAPUT, 2005).

Portanto, a generalização está no bojo do pensamento algébrico. Nesse sentindo, Kaput (1999, p. 6), citada por Canavarro (2007), afirma que:

ISSN: 1984-1655

> A generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimento, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objectos de nível superior para o raciocínio ou comunicação) (KAPUT, 1999 *apud* CANAVARRO, 2007, p 87).

Devido às considerações anteriormente explicitadas, surgiu então o problema de pesquisa: *Quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização com o processo de generalização de função afim, identificadas nas pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa*[4]*?*

Com a finalidade de respondermos à questão levantada, realizamos uma meta-análise dos dados obtidos nas pesquisas de Pavan (2010) e de Calado (2020) - que investigaram o conceito de função afim - particularmente as ideias base respaldadas teórica e metodologicamente nos estudos de Jean Piaget no que se refere tanto à abstração empírica e reflexionante quanto à generalização indutiva e construtiva.

Para Piaget (1984) a generalização vai além de abstrair. Generalizar envolve a construção de novas estruturas cognitivas, todavia preservando o que existia no antigo.

Piaget, em seu livro, *Investigaciones sobre la generalización* (1984), faz um estudo sobre as generalizações indutivas e construtivas, esta última sendo a essência dessa sua obra, explicitando sua formação e mecanismo. Piaget (1984) afirma que assim como há pelo menos dois tipos de abstrações, a empírica e a reflexionante, há, do mesmo modo, pelo menos dois tipos de generalização, a

[4] GEPeDiMa – Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática que é composto por docentes e discentes do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - PPGECEM/UNIOESTE e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná – PRPGEM/UNESPAR, e tem por objetivo o estudo de função considerando teorias da Didática da Matemática.

indutiva e a construtiva, e que as generalizações advêm das abstrações, ou seja, toda generalização supõe uma abstração prévia (1995). "Com efeito, o resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização, bem como o resultado de uma abstração empírica conduz a precisar o grau de generalidade dos caracteres extraídos do objeto" (PIAGET, 1995, p. 59).

Para desenvolver uma reflexão sobre essa perspectiva, apresentamos a seguir uma abordagem teórica a respeito das abstrações empírica e reflexionante a fim de chegarmos às generalizações indutivas e construtivas.

Abstração Empírica e Reflexionante

Para Piaget, a aprendizagem pode-se dar por meio de dois tipos de experiências: a física que consiste em agir sobre o objeto e extrair dele alguma característica; e a lógica-matemática em que o conhecimento não é dado pelo objeto, mas é extraído das ações do sujeito sobre o objeto ou da coordenação de suas ações sobre ele. A primeira se refere à abstração empírica, a segunda, à abstração reflexionante (RUIZ; BELLINI, 2001).

Piaget, em sua obra, *Abstração Reflexionante: Relações Lógico-Aritméticas e Ordem das Relações Espaciais* (1995), define dois tipos de abstração: aquela cuja característica é tirada do objeto, isto é, do que pode ser observado, chamada de *abstração empírica*; e aquela cujas coordenações são extraídas das ações que o sujeito realiza a partir do que pode ser observado ou apoiado no objeto, a *abstração reflexionante*.

As abstrações reflexionante e empírica são operações que retiram coordenações de ações ou características do objeto. Não obstante, a abstração reflexionante, ao contrário da empírica, vai mais além, pois admite atividades contínuas que podem permanecer inconscientes, mas que em um determinado nível de coordenações, alcançam tomadas de consciência mais complexas. Já a abstração empírica se limita a escolher dentre as observações perceptíveis aquelas que respondem a uma certa questão (PIAGET, 1995, p. 278).

As duas formas de abstração existem em todos os níveis de desenvolvimento "[...] dos patamares sensório-motores, e mesmo orgânicos, até as formas mais elevadas do pensamento científico" (*Ibid.*, p. 286).

Em relação à abstração empírica, esta consiste e se apoia sobre os objetos físicos, ou seja, elas retiram propriedades e informações dos objetos, como, a cor, o peso, a forma, etc., assim como aspectos materiais da própria ação, por exemplo, os movimentos e empurrões (PIAGET, 1984; 1995). Piaget afirma que esse tipo de abstração, por mais elementar que possa parecer, não consiste apenas nas "leituras" dos objetos, pois para abstrair qualquer propriedade é imprescindível valer-se de "[...] instrumentos de assimilação (estabelecimento de relações, significações, etc.) oriundos de 'esquemas' (*schèmes*) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito" (1995, p. 5). Para Piaget, embora esses esquemas sejam necessários na relação experimental sujeito - objeto, a abstração empírica "[...] não se refere a eles, mas busca atingir o dado que lhe é exterior, isto é, visa a um conteúdo em que os esquemas se limitam a enquadrar formas que possibilitarão captar tal conteúdo" (PIAGET, 1995, p. 5).

Becker (2014) recorre a várias situações do dia a dia para dar exemplos de abstrações empíricas:

> Assim como ouço um violão, sinto o odor de um perfume, vejo uma árvore alta e verde, saboreio uma maçã, tateio paredes e portas no escuro para me localizar, sigo com o olhar o movimento de um carro ou de um avião, também observo ações de pessoas como dirigir um automóvel, digitar um texto, plantar uma árvore, andar de bicicleta, gesticular num discurso, brincar, remar, nadar, escrever à mão ou ler. Tais

> qualidades, retiradas de objetos (violão, perfume, árvore, maçã, paredes, portas, automóveis, aviões) ou de ações (dirigir, digitar, andar de bicicleta, gesticular, brincar, remar ou nadar), são todas observáveis. Retirar características desses objetos ou ações, isto é, desses observáveis, qualifica as abstrações empíricas (BECKER, 2014, p. 106).

Por sua vez, a abstração reflexionante não se apoia sobre o objeto, mas se dá pelas inferências que o sujeito extrai de suas ações e coordenações sobre eles (PIAGET, 1984, p. 7). E ainda, "A abstração 'reflexionante' é um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores [...]" (PIAGET, 1995. p.193).

No processo de abstração reflexionante as coordenações não podem ser observadas, apenas inferidas por meio de observações do comportamento, pois elas estão no cérebro, na mente; por exemplo, quando uma criança toma consciência de que o resultado da soma 3+3+3 é o mesmo que multiplicar 3x3, tem-se, portanto, a coordenação de duas ações de somar em uma única de multiplicar; a coordenação é, portanto, algo dinâmico, não estático (BECKER, 2014).

E essa passagem de uma ou muitas coordenações numa operação, a uma mais complexa, faz-se por abstração reflexionante a qual "[...] implica equilibração, por assimilações e acomodações, retirando qualidades dessas coordenações ou operações, constituindo, assim, novidades. Uma nova operação, composta de muitas coordenações de ações, mais capaz que a anterior e de maior abrangência" (*Ibid.*, p. 107).

Piaget, (citado por Ruiz e Bellini, 2001, p. 35), para exemplificar a experiência lógico-matemática (abstração reflexionante), recorre ao relato de infância de um de seus amigos: quando tinha entre quatro ou cinco anos de idade, estava brincando de contar pedras. Enquanto contava, colocou-as em fileiras e contou dez pedras, depois, começou novamente a contagem, mas no sentido contrário, e encontrou novamente dez. Ficou maravilhado de ter encontrado o mesmo resultado em direções diferentes, então colocou-as em círculos e contou-as encontrando dez novamente. Assim continuou fazendo outros arranjos e sempre encontrando dez.

Portanto, como afirmam Ruiz e Bellini (2001), dessa experiência, ele não descobriu uma propriedade das pedras, mas da ação de ordenar, pois as pedras não tinham ordem, foi sua ação que impôs uma ordem. Descobriu que o resultado da soma independe das configurações das pedras, pois essas não possuem soma, são simplesmente uma pilha; para somar era necessário a ação, ou seja, a operação de coloca-las juntas e contá-las "Assim, não é uma propriedade física das pedras que se descobre com a experiência. É uma propriedade da ação exercida sobre as pedras, o que certamente é uma outra forma de experiência" (RUIZ; BELLINI, 2001, p. 35).

No processo reflexionante tem-se ainda *a tomada de consciência*. Para Piaget a tomada de consciência "é uma reconstituição conceitual do que tem feito a ação" (PIAGET, 1978 *apud* SALADINI, 2008, p. 34). E que

> [...] a ação, ela só tende para um alvo e ela está satisfeita quando o alvo é atingido. Ela é dominada por aquilo que eu chamaria de êxito. Enquanto que a tomada de consciência comporta mais a compreensão: trata-se de saber como se tem êxito [...] é a interpretação e a explicação da ação. Na própria ação, a compreensão está centralizada sobre o objeto e não sobre os mecanismos que permitiram atingi-lo ((PIAGET, 1978 *apud* SALADINI, 2008, p. 34).

Assim, o sujeito toma consciência de suas ações quando é capaz de explicar as coordenações necessárias pelas quais efetivamente agiu. Portanto a tomada de consciência tem um papel fundamental nesse processo reflexionante, pois a partir do momento em que o sujeito toma consciência dos resultados de uma abstração reflexionante, tem-se aí a abstração refletida (Piaget, 1995, p. 193), "É, através da abstração refletida que o sujeito constrói os conceitos matemáticos, abrindo caminho para sua generalização a uma grande variedade de conteúdos

ISSN: 1984-1655

inacessíveis sem essa nova tomada de consciência" (MARTINS, 2007, p. 29).

> No entanto, uma abstração refletida difere profundamente de um *insight* porque não se trata de uma organização súbita da percepção, mas é resultado de um longo processo de construção. A estrutura que possibilita um *insight* é, de acordo com a teoria da *Gestalt*, inata ou *a priori* e não sofre transformações pela experiência, enquanto a estrutura que possibilita uma abstração refletida é construída por abstração reflexionante, transformando-se com a experiência e a equilibração; é estruturada e estruturante ao mesmo tempo (BECKER, 2014, p. 108).

Assim, conclui Becker (2014), todas as descobertas da humanidade, desde o fogo ou roda passando por todas as evoluções humanas, como, a lâmpada elétrica, o cálculo diferencial integral, a mecânica quântica, a internet, etc., são oriundas de abstrações refletidas, "É essa abstração que transforma as quase necessidades em necessidades; o possível em necessário; o finito em infinito... o tronco de uma árvore em cilindro, a árvore serrada em circunferência, uma pedra redonda em esfera [...]" (BECKER, 2014, p. 109).

O estudo realizado sobre a abstração empírica e reflexionante, nos possibilitou melhor compreensão sobre a generalização indutiva e construtiva, pois tais abstrações são imprescindíveis no estudo das generalizações, uma vez que, segundo Piaget (1984) só se tem generalização por meio de abstrações anteriores.

Generalização Indutiva e Construtiva

A generalização é um grau mais elevado do pensamento humano e está intimamente relacionado com a abstração. Como Piaget (1984)[5] afirma, as generalizações requerem uma abstração prévia. E a relação entre a abstração e generalização não acontece de maneira separada, ela é construída de maneira solidária, pois uma depende da outra para acontecerem. Do mesmo modo, temos

[5] Todas citações diretas ou indiretas referentes à Piaget (1984), são traduções da autora desse texto cuja referência pode ser encontrada em: PIAGET, J. **Investigaciones Sobre La Generalización**: estudios de epistemología y psicología genéticas. Tlahuapan: Editora Premià, 1984.

essa mesma construção sincrônica e solidária nas generalizações indutivas e construtivas, ou seja, para o sujeito generalizar de forma indutiva é preciso uma generalização anteriormente construída, por mais elementar que possa ser. Como é referido por Piaget (1984, p. 68) "[...] não há dúvida que toda generalização indutiva supõe um marco prévio cuja utilização atual pode ser ou não justificada e cuja formação se deve a generalizações construtivas anteriores e mais elementares".

Nessa direção, Piaget (1984, p. 7) afirma que a generalização constitui dois grandes mistérios do conhecimento: 1º) o fato de engendrar estruturas constantemente novas, no sentido de não estarem contidas naquelas do ponto de partida, mas que, uma vez construídas, aparecem como o produto necessário destas; 2º) e que esta construção se apoia sem cessar sobre o que está em devir, portanto, sobre o que ainda não está realizado, tanto e frequentemente mais que sobre a aquisição anterior.

Quanto à generalização indutiva, procedente da abstração empírica, ela parte de relações observadas nos objetos e se remete a eles para verificar sua validez com a finalidade de estabelecer um grau de generalização, mas sem encontrar explicações ou razões para justificar o observado (PIAGET, 1984, p. 8). O sujeito não pensa *a priori*, ele se limita a raciocinar e generalizar somente no que está observando (p. 47).

Piaget (1984, p. 186) afirma que ao falar sobre generalizações indutivas não está discutindo sobre questões da lógica, mas refere-se às "[...] fronteiras epistemológicas entre o que provém dos objetos e o que é proporcionado pelas operações ou ações do sujeito". Para o autor, as investigações realizadas sobre a generalização sempre partem do observável (indutivo) e vão evoluindo de acordo com as coordenações das ações do sujeito sobre o objeto até a construção de novas

ISSN: 1984-1655

formas e conteúdo (construtivo).

Ainda, segundo Piaget (1984, p. 26), acontecem generalizações indutivas, quando o sujeito, depois de encontrar uma solução, seja falsa ou verdadeira, aplica-a sem uma justificativa a novos conteúdos que já estavam presentes nas informações, mas que ainda não foram utilizadas. Nesse caso não há criação de novas formas, nem, posteriormente, a construção de novos conteúdos, apenas uma simples aplicação do esquema resolutório anterior, como, por exemplo, quando o sujeito identifica alguma regularidade para n=1 e n=2 e acredita ser essa a generalização para todas as situações sem ao mesmo testar sua validez, e/ou ainda, mesmo testando sua validez para essa primeira situação, acredita que essa mesma regularidade se aplica, num mesmo contexto, a outras situações.

Além disso, na generalização indutiva, as inferências dos sujeitos se limitam a uma generalização de "algum" para o "todo" dos fatos observados ou das relações constatadas (PIAGET, 1984, p. 186). A isso, Piaget (1984) chama de raciocínio recorrente, isto é, o sujeito começa sua investigação, descobre alguma regularidade e generaliza sem a necessidade de constatar se vale para "todas" as situações. No entanto, quando questionado, verifica que tal constatação já não funcionará sempre.

Segundo Piaget (1984, p. 56):

> [...] o raciocínio recorrente (ou 'indução completa' como o chama Poincaré) constitui precisamente o padrão por excelência destas construções baseando-se nas posteriores. Se se verifica uma propriedade no caso do primeiro número, e valendo-se para *n*, vale, necessariamente para *n-1*, então valerá para todos os números: nesta formulação, está claro que o momento decisivo não é o controle sobre 0 ou 1, ou sobre n, mas, precisamente, a passagem de n a n-1, o que proporciona, retroativamente, a razão do anterior".

Piaget (1984, p.56) afirma que há duas fases na formação do raciocínio recorrente: durante a primeira fase, a propriedade em jogo se dá pela observação

ISSN: 1984-1655

para um ou dois números, e as razões para essas observações são locais ou incompletas, ou seja, sem necessidade, remetendo, portanto, a generalizações indutivas. Por outro lado, a segunda fase se inicia quando o sujeito não se limita a raciocinar sobre o que observou, mas sente a necessidade de pensar *a posteriori*, "[...] e é essa necessidade ligada às construções anteriores, isto é, a um 'todo' virtual, o que caracteriza a recorrência e uma nova forma de generalização que, assim, se torna construtiva, pois sempre estará aberta aos futuros possíveis" (PIAGET, 1984, p. 57).

No que se refere à generalização construtiva, essa, por sua vez, ocorre quando se apoia ou se dá sobre operações do sujeito ou seus produtos. Neste caso ela é de natureza simultaneamente compreensiva e extensiva e chega, portanto, à produção de novas formas e por vezes de novos conteúdos (PIAGET, 1984, p. 8). Não se trata de assimilar conteúdos novos de formas já constituídas, mas de engendrar novas formas e novos conteúdos, ou seja, novas organizações estruturais (*Ibid*., p. 188)

A formação da generalização construtiva consiste precisamente em uma transposição de uma construção material para uma construção conceitual – partindo das observações e manipulações dos objetos à conceitualização de suas ações -, e, a partir do momento em que os sujeitos conseguem ter uma abstração refletida sobre suas ações, cuja tomada de consciência condiciona os processos generalizadores, elas evoluem de um nível a outro (*Ibid*., p. 50-51).

Piaget ainda destaca que o processo de generalização construtiva começa quando os sujeitos não se limitam à leitura dos resultados das ações ou manipulações, mas quando conseguem entender o próprio esquema de construção, ou seja, começam a entender as coordenações necessárias que dão 'razões' a suas ações (1984, p. 53). Para Piaget, a eficácia dessas coordenações necessárias se manifesta pelo descobrimento das "razões" atribuídas às regularidades, já que elas representam critério autêntico das generalizações construtivas (*Ibid*., p. 55).

Piaget (1984), para explicar o papel da generalização construtiva, utiliza-se do pensamento funcional ao mencionar que, quando o sujeito estabelece uma relação entre a variável y e a variável x e verifica a constância dessa relação, esse processo é extensivo e sempre supõe um marco prévio de assimilação devida às atividades do sujeito, e que, neste caso, corresponde às relações funcionais. E, ainda para o mesmo autor,

> Se $y = f(x)$, este marco é a própria função "f" que permite a união dos conteúdos "x" e "y" e de suas variações. Estas variáveis, suas variações e a própria existência de suas relações pertencem ao campo do observável, mas o poder de estabelecer as relações se deve às ações ou operações do sujeito (mas simplesmente "aplicadas" e não, todavia, "atribuídas" causalmente aos objetos), e, portanto, resulta de generalizações construtivas anteriores (intervindo despois nos morfismos ou correspondência sensório-motriz (PIAGET, 1984, p. 8).

A passagem de uma generalização indutiva para construtiva não acontece num "estalar de dedos" como se fosse mágica, é um processo de evolução do sujeito em relação aos seus pensamentos, o quais estão diretamente relacionados com a abstração reflexionante e a tomada de consciência. No entanto, esse processo não acontece de maneira linear, por acúmulo de informações, mas por estádios, que de acordo com Bellini (2020, p. 171) "[...] os estádios não são uma classificação estática de comportamento, mas períodos de construção de conhecimentos distintos que levam a criança a alcançar os conhecimentos da humanidade".

Ainda para Piaget, a generalização indutiva e construtiva sempre vem reunidas e indissociáveis

> [...], mas o fato de que no transcurso de seu desenvolvimento mudam, não somente de proporções, mas também, e sobre tudo, de subordinações, impede de falar de um processo contínuo, e implica em atribuir

> às formas superiores (ou mais precisamente lógico-matemáticas a partir de um nível de metareflexão) das generalizações indutivas e das abstrações pseudo-empíricas, um significado diferente ao que tenham nas formas iniciais (PIAGET, 1984, p. 69).

As evoluções "admiráveis" dos sujeitos se devem às relações estreitas que existem entre as transformações da generalização e as etapas, não somente a da tomada de consciência, mas também, e sobretudo, das formas de abstrações que elas determinam (PIAGET, 1984, p. 68)

De acordo com Piaget (1984, p. 68) no início da investigação – estádio I- o sujeito limita-se às descobertas dos resultados de suas manipulações, que a princípio aparecem deformadas (nível IA), e somente depois as descobertas começam a ser verdadeiras e aceitas (subestádio IB), por isso as falsas abstrações empíricas, e posteriormente corretas, assim como, as generalizações indutivas errôneas que se tornam posteriormente válidas apesar de muito breves.

Em seguida (nível IIA e IIB), na medida em que o sujeito vai tomando consciência do desenvolvimento de suas ações bem-sucedidas – as quais continuam sendo abstrações empíricas acerca das manipulações materiais – e finalmente do próprio esquema com suas coordenações necessárias (abstração reflexionante), a generalização se torna cada vez mais construtiva até chegar na "surpreendente" capacidade dos sujeitos do estádio III em construir novas figuras e formas não fornecidas empiricamente. "Com efeito, essas novas figuras são deduzidas, não do material em que não foram inseridas, mas de construções anteriores ou de seus resultados, mas sempre com base nas possibilidades por elas abertas, o que representa algo decididamente novo" (PIAGET, 1984, p. 68).

Piaget (1984) afirma que no estádio III os sujeitos se fundamentam de maneira constante no próprio esquema de suas ações, permitindo, às vezes, antecipações por construções mentais ou representativas, substituindo, assim, as manipulações materiais, ao mesmo tempo em que a explicação das coordenações necessárias proporciona as razões. Portanto, a ação do sujeito e a tomada de consciência de suas ações são imprescindíveis no progresso da generalização indutiva para generalização construtiva, e, como afirma Piaget, toda evolução psicogenética das generalizações "[...] parece dominada por uma tendência cada vez mais acentuada, por substituir ou duplicar os conhecimentos de natureza exógena por uma reconstrução endógena" (PIAGET, 1984, p. 200), isto é, de fora para dentro. E que, ainda para o mesmo autor; "[...] esta tendência pode explicar-se pelas leis da tomada de consciência, procedendo da periferia ao centro, quer dizer, dos observáveis (aos pontos de interferência entre os objetos e o resultado das ações) às coordenações internas necessárias ao desenrolar dos atos" (p. 200-201).

Não obstante, esse progresso da generalização pode não ocorrer de maneira linear, havendo momentos em que os sujeitos alcançam o princípio da generalização construtiva, mas em outros casos voltam para a generalização indutiva mediante observações, e esse "paradoxo", tal como é referido por Piaget (1984, p. 50), é facilmente explicado pelas leis da abstração e tomada de consciência. Segundo Piaget (1984, p. 50), é necessário distinguir pelo menos três níveis nos dados da própria ação incluindo as transições entre eles.

> Primeiro, partindo da periferia (a tomada de consciência procede precisamente da periferia até o centro) se tem os resultados exteriores à ação que podem ser conhecidos pelo sujeito em que este entenda como os tenha alcançado. [...] Em segundo lugar, a ação ocorre em seu desenvolvimento material e o fato de tomar conhecimento ainda se situa, como no caso dos resultados externos, no nível da abstração empírica (referindo-se aos deslocamentos, as manipulações como tais...). Por fim, há a compreensão do mecanismo interno de ação, ou seja, de suas coordenações necessárias (origem das operações lógico-matemáticas) e a tomada de consciência dessa lógica praxeológica se deve então à abstração refletida (PIAGET, 1984, p. 50 – 51).

Portanto, como afirma Piaget (1984, p. 51), não há nada de contraditório nas reações dos sujeitos. Quando se dificulta a ação, conseguem executá-la

ISSN: 1984-1655

aos poucos, mas só percebem claramente o resultado, mesmo que distorcido, quando são questionados. Ainda para o mesmo autor "[...] só se tem, por meio destas observações, corretas ou não, generalizações indutivas, por falta de abstração refletida e por falta de tomada de consciência do mecanismo coordenador interno que permitiu a realização das ações" (PIAGET, 1984, p. 51).

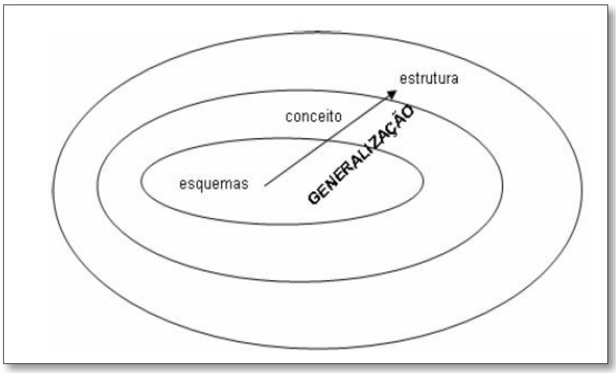
No processo generalizador, Piaget (1984) afirma que a conceitualização constitui o terceiro nível da tomada de consciência das ações:

> [...] no primeiro nível, o pensamento não alcança senão os resultados exteriores da ação, sendo esta imediatamente adaptada ou resultado de vacilações (por falta de direção conceitual); no segundo nível a consciência coincide com o desenvolvimento das ações em suas manipulações materiais sucessivas, mas podem ser, em parte, dirigidas pelos progressos de conceitualização; por fim, no terceiro nível, o pensamento remonta desde as manipulações até suas coordenações necessárias (PIAGET, 1984, p. 62).

De acordo com Martins (2007, p. 49), "[...] o desenvolvimento da generalização construtiva se dá por um processo de equilíbrio entre sucessivas diferenciações e integrações, ocorrendo, em todos os momentos, algum grau de generalização. A continuidade desse processo se dá por desequilíbrios e reequilibrações".

Becker (2006), citado por Martins (2007, p. 47), mostra um esboço (figura 1) do processo de generalização, em que a coordenação do sujeito sobre suas ações transforma os esquemas em conceitos, ampliando a estrutura que lhe dá sustentação.

Figura 1: Processo de generalização



Fonte: Becker, 2006 *apud* Martins, 2007, p. 47.

Ou seja, quando o sujeito generaliza, ele amplia possibilidades de construir novas totalidades no processo de aprendizagem e não apenas memorização de conteúdo (*Ibid.*, p. 48).

Tendo em vista que o objetivo principal dessa pesquisa realizada foi investigar a generalização da função afim mobilizada por alunos do 5° e 9° anos do Ensino Fundamental, a teoria piagetiana, mais precisamente, seus estudos sobre o processo de generalização, ofereceu respaldos teóricos na orientação das análises das estratégias desenvolvidas pelos alunos.

Encaminhamentos Metodológicos

Essa investigação possui caráter qualitativo e cunho interpretativo em que se deseja compreender os resultados encontrados de pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa no tocante à generalização sob a perspectiva da Epistemologia e Psicologia Genética estabelecidas por Jean Piaget, particularmente em seus estudos descritos no livro*: Investigaciones sobre la generalización* (1984).

Os dados cuja meta-análise realizamos nessa investigação foram produzidos mediante a aplicação de sequências didáticas constituídas de tarefas envolvendo o conceito de função afim, particularmente a ideia base de generalização, aplicadas a estudantes do Ensino Fundamental I e II, mais precisamente, estudantes do 5° e 9° ano.

Para alcançar o objetivo dessa pesquisa, realizou-se uma meta-análise dos dados já obtidos na pesquisa de Pavan (2010) que tem como título, *A mobilização das ideias básicas*[6] *do conceito de função por crianças da 4ª Série do Ensino Fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas*, e dos dados obtidos por Calado (2020), em investigação intitulada, *Invariantes operatórios relacionados à generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim.*

Segundo Bicudo (2014), meta-análise ou meta-síntese é uma investigação que vai além daquelas já realizadas, e, no caso de trabalhos qualitativos que são sínteses de interpretações de dados primários, a meta-análise efetua interpretação das interpretações das pesquisas selecionadas dessa análise. Ainda para a autora, a meta-análise "É uma investigação pautada em comparações e análises dos dados primários de pesquisas, tomadas como significativas em relação ao tema posto sob foco" (BICUDO, 2014, p. 9).

Nesse sentido, buscamos, no trabalho de Pavan (2010) e Calado (2020), trazer novas reflexões sobre o processo de generalização pesquisado por elas, mas agora sob outra perspectiva, a de Piaget, mais precisamente, conforme explicitado anteriormente, em seus estudos descritos no livro: *Investigaciones sobre la generalización* de 1984.

A pesquisa de Pavan (2010), fundamentada na Teoria dos Campos

[6] No início das investigações do GEPeDiMa, utilizávamos a denominação Ideias Básicas, todavia, com o decorrer dos estudos e pesquisas realizadas, constatamos que essas ideias não são básicas, mas de construção complexa, porém essenciais ao conceito de função, sendo, portanto, renomeadas por Ideias Base.

Conceituais de Gerard Vergnaud, teve como objetivo investigar se tarefas envolvendo estruturas aditivas ou multiplicativas possibilitam a alunos de 4ª série, atualmente 5° ano, reconhecer e mobilizar as ideias bases de função, como, correspondência, variável, dependência, regularidade e generalização. Para isso, foram realizadas entrevistas individuais valendo-se das orientações do Método Clínico Piagetiano, pois, segundo Pavan (2010), era fundamental que a criança descrevesse o mais fiel possível os raciocínios utilizados para resolver as tarefas propostas, algo que apenas com observação e análise da produção escrita não seria possível. A pesquisa foi desenvolvida, em contraturno, com 10 crianças do 5° ano do Ensino Fundamental, com idades variando entre 9 e 10 anos de uma escola Municipal de Floresta- Paraná. Pavan (2010) desenvolveu situações-problema que foram organizadas em 5 baterias de atividades: a primeira bateria é organizada em três situações-problemas e as outras quatro baterias em duas situações-problema cada.

Sustentada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, a pesquisa de Calado (2020) teve o objetivo de analisar invariantes operatórios, relacionados à generalização, mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, mediante situações envolvendo função afim. A pesquisa contou com a participação de 32 estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental de um colégio estadual do interior do Paraná. Para alcançar o objetivo da pesquisa, Calado elaborou uma sequência didática composta por sete tarefas contextualizadas e organizadas de acordo com o grau de dificuldade, ou seja, em cada atividade exigia um grau de complexidade mais elevado, como, atividades que exigiam mais cálculo, mais operações matemáticas na generalização, apresentação de tabelas, e interpretação gráfica (CALADO, 2020). A aplicação dessa sequência ocorreu durante as aulas de matemática. Os alunos foram organizados em grupos (duplas ou trios) e, buscando preservar a identidade deles, Calado (2020) nomeou cada grupo com a letra G seguida de um número de identificação ficando, assim, nomeados de G1 a G13.

Respeitando as limitações de laudas, consideramos nesse artigo, para análise, apenas o *problema 1* da segunda bateria de atividades e o *problema 2* da terceira bateria de atividades proposta por Pavan (2010), assim, como, as *atividades 1 e 2* proposta por Calado (2020).

Análises das situações-problema propostas por Pavan (2010) envolvendo a ideia base de generalização

Discorremos, agora, sobre meta-análises realizadas nas situações-problemas desenvolvidas por Pavan (2010) buscando identificar se os alunos alcançaram a generalização construtiva estabelecida por Piaget (1984). Para essa análise, consideramos a *situação-problema 1* da segunda bateria de atividades elaborada por Pavan (2010), como mostrado no quadro 1.

Quadro 1: Problema 1 da segunda bateria de atividades de Pavan (2010)

Problema 1 (Pavan 2010) - João foi à feira e comprou 3 quilos de batatas para sua mãe. Se cada quilo de batata custa R$ 1,30 quanto João pagou pela compra? Se ele tivesse comprado 5 quilos quanto pagaria? Podemos calcular o custo para qualquer quantidade de batatas? Como?

Fonte: Pavan (2010).

Nas duas primeiras perguntas do *Problema 1* os alunos de Pavan (2010) precisavam determinar quanto João gastou na compra de 3 e 5 quilos de batatas, respectivamente. Para esses itens, segundo a autora, os alunos não tiveram dificuldades na resolução. Apenas os alunos MAR e IGO que anteciparam[7] a resposta, mas, ao serem solicitados que as explicassem, resolveram corretamente.

[7] "A antecipação de respostas sem maiores reflexões indica que as crianças não estão habituadas a ler com atenção os problemas e utilizam a "adivinhação" como estratégia de solução" (PAVAN, 2010, p. 72).

Na resolução, metade dos alunos utilizaram o método da adição no primeiro momento, ou seja, para comprar 3 quilos de batatas fizeram: 1,30 + 1,30 + 1,30, e para 5 quilos somou, com a anterior, mais duas parcelas de 1,30. Ao serem questionados se teria outra forma de resolver, eles responderam que sim, e fizeram a multiplicação de 3x1,30 e 5x1,30. São os casos de MAR, LUA, DJH, KEM, BRU. Já os alunos ROB, RAF, IGO, DIO e MIL utilizaram somente o método da multiplicação.

Na terceira pergunta do *problema 1* era questionado aos alunos se tinha uma maneira para calcular qualquer quantidade de batatas e qual seria essa maneira. Nesse caso, pedia a generalização do problema.

Os alunos MAR, LUA, DJH e BRU generalizaram por meio de exemplos, o que, segundo Piaget, caracteriza uma generalização indutiva. Nesse sentido os alunos ainda não tomaram consciência de suas ações, eles falam o que conseguem "enxergar" naquele momento. Para Piaget (1984), quando o sujeito se fundamenta em observações e generaliza todas as situações apresentadas por meio delas, constitui, então, a generalização do tipo indutiva. No quadro 2 a seguir é possível observar a generalização obtidas pelos alunos.

Quadro 2: Generalização indutiva realizadas pelos alunos

MAR	**Generalização:** "*Se for 10 quilos, 10 vezes 1,30, se for 20 quilos, 20 vezes 1,30*".
LUA	**Generalização:** "*Por eseplo 50 da 50x1,30*".
DJH	**Generalização:** "*Nós poderemos ex= 9 quilos por 1,30 fazer uma conta e multiplicar por 9*".
BRU	**Generalização:** "*30x1,30 e 20x1,30*".

Fonte: A pesquisa, baseada em Pavan (2010).

Um ponto importante a destacar é que todos os alunos, exceto KEM, que resolveram as duas primeiras perguntas do *problema 1* pelo método da adição, se encontram na generalização indutiva, ou seja, quando solicitados se po-

ISSN: 1984-1655

diam calcular para qualquer quantidade, valeram-se de exemplos para isso. Segundo Pavan (2010) esses alunos ainda não têm construído e consolidado o conceito de multiplicação. Fato esse que comprova o que Piaget afirma sobre a generalização construtiva:

> [...] quando a generalização se fundamenta em ou se refere às operações do sujeito ou seus produtos, sua natureza é nesse caso simultaneamente compreensiva e extensiva, e então conduz à produção de novas formas e por vezes novos conteúdo (cf. os números e suas múltiplas variedades) (PIAGET, 1984 p. 8).

Ou seja, a generalização construtiva requer um nível mais elevado do pensamento que permite ao sujeito construir estruturas novas a partir das iniciais.

Quanto aos alunos RAF e DIO, esses estão no nível intermediário que configura o progresso da generalização indutiva e a passagem aos princípios da generalização construtiva (PIAGET, 1984).

Como podemos observar nas respostas desses alunos descritas no quadro 3, o avanço da generalização construtiva se deve ao fato deles não se limitarem à leitura dos resultados (PIAGET, 1984), ou seja, não se valeram de exemplos para generalizar. No entanto, não conseguem explorar bem o conceito de multiplicação e se prendem ao conceito da adição para explicar suas razões.

Quadro 3: Progresso da generalização indutiva e princípios da generalização construtiva

RAF	**Generalização:** “*Multiplicando ou somando* (mais fácil a multiplicação), *o quilo de batatas com o dinheiro* (preço)”.
DIO	**Generalização:** “*Também da para fazer de mais e é só pegar o quilo que você quer comprar e somar de vezes ou de mais*”.

Fonte: A pesquisa, baseado em Pavan (2010).

Mesmo RAF afirmando que a multiplicação é mais fácil, ele ainda menciona a adição, assim como DIO, deixando para segundo plano a multiplicação. Para Pavan (2010), por mais que DIO tenha resolvido as questões anteriores valendo-se da multiplicação, "[...] ainda não é um conceito construído, mas apenas uma outra forma de registrar raciocínios aditivos" (PAVAN, 2010, p. 79).

"Os sujeitos desse nível tomam consciência de suas construções progressivas, mas ainda não destacam o esquema generalizador como esquema de coordenação necessária" (PIAGET, 1984, p. 51).

Com relação aos alunos ROB, IGO e KEM, esses chegaram à generalização sem a utilização de exemplos, e sem a utilização do algoritmo da adição para isso, mostrando que, para qualquer quantidade de batatas compradas, o valor será 1,30 vezes essa quantidade. Os alunos fundamentaram seus raciocínios no próprio esquema de construção, destacando deles as coordenações necessárias para generalizar (PIAGET, 1984). Com isso, podemos dizer que chegaram à generalização construtiva, pois ocorreu uma transposição da construção material a uma construção conceitual (PIAGET, 1984). No quadro 4 é apresentado as respostas dos alunos.

Quadro 4: Generalização construtiva

ROB	**Generalização:** "*Fazendo 1,30 x* (vezes) *o tanto de quilo que você queria comprar*".
IGO	**Generalização:** "*Pode calcula para qualquer quantidade de batata fazendo conta de vezes 1,30*".
KEM	**Generalização:** "*Sim, sempre vai ser a quantidade de batatas vezes 1,30*"

Fonte: A pesquisa, baseado em Pavan (2010).

Com relação à aluna KEM, apesar de ter feito pelo algoritmo da adição as duas primeiras perguntas, ela não generalizou por meio de exemplo, isso porque, segundo Pavan (2010), "[...] a ideia de variável é bem clara, pois não necessitou de valores específicos, compreendendo que o que é variável aqui, é a quantidade de batatas, conforme fica explícito no registro escrito de sua generalização" (PAVAN, 2010, p. 78).

Já o aluno MIL não conseguiu apresentar nenhuma generalização para

ISSN: 1984-1655

situação, ou mesmo tentou por meio de exemplos (PAVAN, 2010).

Assim como constatado por Pavan (2010), alguns alunos não conseguiram apresentar a situação de forma genérica, mas, mesmo utilizando exemplos particulares, indica que estão no caminho da generalização. Vale ressaltar que os sujeitos investigados por Pavan (2010) são alunos do 5° ano, o que significa que eles ainda não tiveram experiências com a álgebra, então a generalização foi expressa em linguagem natural.

Analisamos o problema 2 da terceira bateria de atividades proposta por Pavan (2010). Mesmo o problema não pedindo a generalização, como mostrado no quadro 5, Pavan (2010) questiona aos alunos se "Pedro poderia calcular o valor a ser pago pela corrida para qualquer quantidade de quilômetros" (PAVAN, 2010, p. 94), por esse motivo o analisamos.

Quadro 5: Problema 2 da terceira bateria de atividades proposta por Pavan (2010)

Problema 2 - Pedro chegou à cidade de São Paulo, para ir até a casa de seu primo ele chamou um taxi. O taxi cobra uma taxa fixa de R$ 4,00 mais R$ 1,20 por quilometro rodado. a) Se a casa do primo de Pedro fica a 15 quilômetros de onde ele está, quanto ele pagará para o motorista? b) E se Pedro desejar ir ao shopping que fica a 12 quilômetros quanto pagará para o motorista?

Fonte: Pavan (2010).

Segundo Pavan (2010), todos os alunos utilizaram o algoritmo da multiplicação para resolver os itens a) e b), ou seja, fizeram 15x1,20 e resultado somaram com 4 reais. Do mesmo modo, para calcular o valor que Pedro pagará por uma corrida de 12 km, fizeram 12x1,20 e somaram com esse resultado 4 reais.

De acordo com essa evolução do pensamento, a multiplicação começa

ISSN: 1984-1655

a se consolidar. Como esse problema já consta da terceira bateria, é possível inferir que a implementação das tarefas presentes no instrumento contribuiu para a aprendizagem.

No tocante ao questionamento se Pedro poderia calcular o valor para qualquer quantidade de quilômetros, podemos observar nas respostas dos alunos DJH, MAR, DIO, BRU, MIL e LUA, no quadro 6, que apresentam a generalização de forma indutiva recorrendo a valores específico para tal.

Quadro 6: Generalização indutiva

DJH	Generalização: "Ele pode, se for 19 km, faz 19x1,20 mais 4 reais que é da taxa fixa”.
MAR	Generalização: “Se for 14 km, 14x1,20= 16,80 16,80+4,00=20,80”.
DIO	Generalização: “Ele por exemplo se fosse andar 5 quilômetros, ia fazer 1,20 a taxa de quilômetro rodado vezes 5 mais o resultado que deu mais os 4 reais”.
BRU	Generalização: Primeiro deu um exemplo: “se for 89 km, faz 89x1,20=106,80+4,00=110,80”. Depois de questionada novamente respondeu: “pegaria qualquer distância que ia e daí ia vezes (explicou depois que era o valor que ia cobrar) mais (explicou que era mais a taxa fixa) o valor que ia dá”.
MIL	Generalização: “Acho que sim, se ele fosse numa sorveteria que ficava a 19 km ele ia pega 19x1,20 e ia paga os quilômetros e com o outro ele ia paga mais o fixo”.
LUA	Generalização: “Se for 13 km, 18,40+1,20=19,60 19,60+4,00=23,60”. (recorrendo à resposta de 12 km do item b) sem perceber que na resposta 18,40 já havia calculado 4,00).

Fonte: A pesquisa, baseado em Pavan (2010).

Vale trazer à atenção que essa é a primeira vez que MIL generaliza, além disso é nesta terceira bateria de atividades que MIL utiliza a multiplicação para resolver os problemas propostos. Assim, podemos inferir que MIL está no progresso de abstração empírica para abstração reflexionante, assimilando o conteúdo e tomando consciência de suas ações. Segundo Piaget a abstração reflexionante se dá pelas inferências que o sujeito extrai de suas ações e coordenações sobre eles (PIAGET, 1984, p. 7).

Não identificamos nessa situação problema nenhuma resposta dos alunos que se enquadram no nível intermediário.

Quanto aos alunos RAF, ROB, IGO e KEM conseguem generalizar de forma construtiva (quadro 7), pois apresentam a generalização de forma genérica, sem se limitarem a exemplos. Esses alunos já têm construído o conceito de multiplicação e a noção de variável, alguns desde o primeiro problema que pedia a generalização, como, RAF e ROB, outros construíram no decorrer das atividades, como, IGO e KEM.

Quadro 7: Generalização construtiva

RAF	Generalização: "Pegaria o quilômetro e multiplicaria por 1,20 e somaria os 4 reais".
ROB	Generalização: "Os 1,20 mais (oralmente ele falou vezes) o quilômetro que ele quiser mais a taxa fixa".
IGO	Generalização: "Pode, faria conta de vezes depois mais 4 reais".
KEM	Generalização: "Ele pode pegar quantos quilômetros quiser vezes 1,20 e mais 4,00 reais".

Fonte: A pesquisa, baseado em Pavan (2010).

Segundo Piaget (1984, p. 201), conforme o sujeito toma consciência das coordenações de suas ações, "[...] se torna capaz de construir novas formas, seja por meio das interpretações de conteúdos exteriores, ou engendrando, graças a eles, novos conteúdos (número, etc.), o que caracteriza a generalização construtiva em suas diversas variedades".

ISSN: 1984-1655

Em relação aos alunos ROB e RAF, desde o problema 1, que pedia a generalização da situação, já conseguiram generalizar sem trazer à tona exemplos específicos, isto é, apresentaram uma generalização construtiva, pois de acordo com Piaget (1984), esses alunos chegaram à abstração refletida das situações apresentadas compreendendo o mecanismo interno de suas ações e construindo o esquema generalizador necessário. Podemos inferir, também, que um fator importante que permitiu que isso ocorresse deu-se pelo fato de que esses alunos já na segunda bateria de atividades haviam consolidado o conceito de multiplicação, reiterando o que Piaget (1984) afirma, isto é, que a generalização construtiva requer um nível mais elevado do pensamento, permitindo ao sujeito construir estruturas novas a partir das iniciais.

Quanto aos alunos DIO, KEM e DJH, percebemos, que no decorrer das baterias de atividades, a generalização foi progredindo passo a passo, desde a indutiva, passando pelo intermediário até chegar na generalização construtiva.

Quanto aos alunos MIL, IGO, BRU e MAR, mesmo que em algumas situações não alcançaram a generalização construtiva, evoluíram rumo a esta no decorrer da implementação do instrumento de produção de dados. O mesmo aconteceu com LUA, que nesta última bateira de atividades alcançou a generalização construtiva.

Para Piaget (1984, p. 68) a “[...] evolução se deve naturalmente às relações estreitas que existem entre as transformações da generalização e as etapas, não só da tomada de consciência, mas, também, e sobre tudo, das formas de abstração que esta determina”.

Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas
ISSN: 1984-1655

Análises da sequência didática proposta por Calado (2020) a respeito da generalização da função afim

Discorremos, agora, sobre meta-análises realizadas nas atividades desenvolvidas por Calado (2020) com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, com o intuito de identificar se eles alcançaram a generalização construtiva defendida por Piaget (1984). Para essa análise, consideramos a *atividade 1* elaborada por Calado (2020), como mostrado no quadro 8.

Quadro 8: Atividade 1 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 1: Ana vai à padaria para comprar pães todo sábado de manhã, seus pães preferidos custam $R\$$ 0,18 cada um. a) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães? b) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães? c) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.

Fonte: Calado (2020)

Nos itens a) e b) da *atividade 1*, os alunos precisavam determinar quanto Ana pagará na compra de 3 e 7 pães respectivamente, sabendo que cada pão custava R$ 0,18 centavos. Para isso, tinham que multiplicar o número de pães pelo valor unitário de cada pão. Essas duas perguntas, segundo Calado (2020), os alunos não tiveram dificuldades para resolver, uma vez que, para esse nível de ensino (9° ano), são considerados de fácil interpretação. Além disso, os alunos puderam contar com o auxílio da calculadora, evitando erros nas contas com números decimais (*Ibid.*)

Dos treze grupos que resolveram essas duas atividades, doze utilizaram a mesma estratégia de resolução, sendo: $3x\ 0{,}18\ =\ 0{,}54$ e $7\ x\ 0{,}18\ =\ 1{,}26$ para a compra de 3 e 7 pães, apenas o grupo G3 apresentou uma estratégia diferente dos demais, mas também de maneira correta. Eles fizeram a soma de par-

ISSN: 1984-1655

celas iguais quantas vezes era a quantidade de pães pedidas, isto é, para encontrarem o valor que Ana pagará na compra de 3 pães, fizeram: $0{,}18 + 0{,}18 = 0{,}36$ e, a esse resultado, somavam mais 0,18 ficando: $0{,}36 + 0{,}18 = 0{,}54$; e com valor para 7 pães realizaram a conta da mesma maneira, ou seja, somaram os dois primeiros valores, e ao resultado somavam mais quantas vezes era necessário (CALADO, 2020).

De acordo com Calado (2020, p. 96) todos os grupos desenvolveram as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois, para calcularem o valor pago por Ana na compra dos pães, tiveram que estabelecer uma correspondência entre o valor unitário e a quantidade de pães, além disso, o resultado obtido (valor) depende da quantidade de pães que Ana deveria comprar, e a regularidade pode ser observada por meio do valor unitário de cada pão.

No item c) da *atividade 1* os alunos tinham que determinar uma expressão algébrica que representasse o valor pago por Ana se ela quisesse comprar qualquer quantidade de pães, ou seja, nesse item pedia a generalização da função.

Como previsto por Calado (2020), os alunos tiveram bastante dificuldade nesse item, por isso a pesquisadora realizou uma conversa com a turma questionando-os sobre o que seria uma expressão algébrica e explicando o que era pedido: "[...] *O x representa um número qualquer. Por exemplo, na expressão x+2, eu posso atribuir valores para o x. x pode valer 0, 2, 3 e assim por diante. Agora, vocês têm que pensar em uma expressão que represente essa situação da atividade* (CALADO, 2020, p. 97).

Feito essa discussão com os alunos, segundo Calado (2020), os grupos G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8 e G9 desenvolveram estratégias corretas para generalização, já os grupos G10, G11, G12 e G13, não. As generalizações apresentadas pelos nove grupos variaram entre $Y = 0{,}18x$ ou apenas $0{,}18x$ não mencionando a variável dependente (CALADO, 2020).

Para esse item, o grupo G11 apresentou a expressão $x + 0{,}18 = y$. No quadro 9 há um recorte feito por Calado (2020) mostrando o argumento que um dos integrantes utilizou para chegar na generalização.

Quadro 9: Diálogo entre os integrantes do grupo G11 na resolução do item c) da atividade 1

- *Olha, vai ser tipo x mais 0,18. Sendo que x é a quantidade de pães que a gente não sabe, mais o valor de cada pão. Como é uma soma de valores, então fica x+0,18* – aluno A. - *Ah tá* – aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 100)

No fragmento da conversa anteriormente descrita no quadro, constatamos que o aluno utiliza a adição para generalizar, e não verifica sua validade. Nesse caso, inferimos que, implicitamente, o sujeito faz somas de parcelas iguais (0,18 + 0,18....) para determinar o valor a pagar dependendo da quantidade de pães. No entanto, como foi pedida uma expressão algébrica – a qual possui letras e números- o aluno representou "qualquer quantidade de pães" pela letra x. Dessa forma, consideramos que esteja no nível intermediário da generalização, ou seja, o progresso da generalização indutiva à passagem da generalização construtiva, pois, apesar de apresentar uma lei de formação equivocada, valendo-se do algoritmo da soma, não se limitou em apresentar um valor específico representando qualquer quantidade por x.

Em relação ao grupo G5, este alcançou a generalização requisitada na atividade proposta. No quadro a seguir, é apresentado o trecho destacado por Calado (2020) da conversa entre os alunos desse grupo.

Quadro 10: Diálogo entre os integrantes do grupo G5 na resolução do item c) da atividade 1

- *Então, seria 18 vezes x. Na verdade, é 0,18 vezes x* –aluno A. - *Como assim?* – aluno B. - *O valor do pão é 0,18. Mas a gente não sabe quantos pães ela vai querer, então é x* – aluno A. - *Verdade* – aluno B.

Fonte: Calado (2020, p. 98)

Portanto, podemos inferir desse diálogo descrito anteriormente que, pelo menos um dos integrantes do grupo alcançou a generalização construtiva, uma vez que tomou consciência de suas ações, isto é, além de saber fazer, o sujeito foi capaz de explicar as coordenações necessárias para efetivação de sua ação, fato que, segundo Piaget (1984), é imprescindível na generalização construtiva.

> Na medida em que o sujeito toma consciência das coordenações de suas ações, se torna capaz de construir novas formas, seja por meio de interpretação de conteúdos exteriores, ou engendrando, graças a elas, novos conteúdos (números, etc.), o que caracteriza a generalização construtiva em suas diversas variedades (PIAGET, 1984, p. 201).

Em relação aos outros grupos, inferimos, também, que chegaram à generalização construtiva, uma vez que apresentaram como resposta a expressão algébrica que relaciona o valor a ser pago pelo pão em função da quantidade de pães desejada, isto é, desenvolveram a generalização sem se limitarem a exemplos específicos, atribuindo a essa "qualquer quantidade" a variável x.

O grupo G10 representou a lei de formação como $y = 1.x$; o grupo G12 representou por $2x^2 + 5x - 3$; e o grupo G13 representou por $x^2 + 0{,}18 = x$. Desse modo, acreditamos que os alunos não alcançaram uma abstração reflexionante em relação à dependência e à expressão que a representa, isto é, a noção de relacionar o valor a ser pago em função da quantidade de pães. Logo, como teriam que apresentar uma expressão algébrica, colocaram o que vieram à mente.

ISSN: 1984-1655

Por meio das análises realizadas por Calado (2020) dessa *atividade 1*, não identificamos nenhum grupo que se encontra no nível de generalização indutiva, ou seja, generalização que se limita apenas no observável.

No quadro 11 a seguir apresentamos a atividade 2 desenvolvida por Calado (2020) analisada a seguir.

Quadro 11: Atividade 2 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 2 *(Adaptada de Tinoco (2002))* – No último sábado, Ana foi à padaria com apenas $R\$$ 2,00 para comprar seus pães preferidos que custam R$ 0,18 cada um. a) Se ela comprar 3 pães, quanto receberá de troco? b) Se ela comprar 7 pães, qual será o seu troco? c) Na situação apresentada, qual a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar? d) Considerando que Ana comprou uma quantidade qualquer de pães, descreva com as suas palavras os passos para determinar o troco de Ana. e) Escreva uma expressão algébrica que represente o troco que Ana receberá se comprar uma quantidade possível qualquer de pães.

Fonte: Calado (2020)

Nessa *atividade 2* para os itens a) e b), segundo Calado (2020), doze grupos apresentaram a mesma estratégia de resolução para determinar o troco, fazendo: $2 - 0,54 = 1,46$ na compra de 3 pães, e $2 - 1,26 = 0,74$ na compra de 7 pães. Apenas o grupo G3 apresentou uma estratégia incorreta nesses itens. Para a letra a), fizeram: $0,27 \div 2,00 = 1,35$, e para a letra b), $0,63 \div 2 = 0,35$. No diálogo apresentado no quadro a seguir, não foi identificada por Calado (2020) nenhuma estratégia de resolução correta.

Quadro 12: Diálogo entre os integrantes do grupo G2 na atividade 1 proposta por Calado (2020)

Diálogo entre integrantes do grupo 2 (G2) - fragmento
- 3 pães deu 54 centavos agora divide por 2 reais. Dá 27 centavos de troco, e agora divide por 2 de novo. A Resposta dá 1 real e 35 centavos – aluno A.
- Huuuun – aluno B.
- Daí pra 7 pães dá 31 centavos de troco – aluno A.

Fonte: Calado (2020, p. 102)

O item c) pedia a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar com R$2,00 sabendo que cada pão corresponde a R$ 0,18. Doze grupos apresentaram estratégias corretas por meio de tentativas, concluindo que poderia ser comprado 11 pães no máximo. Das estratégias utilizadas, os grupos G1, G4, G5, G8, G12 e G13, utilizaram o algoritmo da multiplicação, fazendo: $11\, x\, 0{,}18 = 1{,}98$. O grupo G9, por sua vez, utilizou o algoritmo da divisão, calculando: $2 \div 0{,}18 = 11{,}111$ .... Já os grupos G3, G6, G7, G10 e G11, apenas afirmaram que era possível comprar 11 pães. E o grupo G2 não apresentou nenhuma estratégia de resolução (CALADO, 2020).

Para a letra d) dessa *atividade 2*, os grupos tinham que descrever com suas palavras qual seria o troco de Ana se ela comprasse qualquer quantidade de pães, isto é, a generalização da função em linguagem natural. Nesse item, Calado (2020) afirma que os alunos ficaram com muita dúvida, pois é algo que não estão acostumados a fazer. Desse modo, a pesquisadora conversou com a turma sobre o processo de generalização por meio da linhagem natural explicando que deveriam descrever os cálculos necessários para se obter o troco.

Inferimos que os grupos G1, G4, G7, G12 e G13 estão, nesse item, na generalização indutiva, pois valeram-se de exemplos com valores específicos para generalizar. Segundo Calado (2020, p. 107), os grupos G1, G4 e G13 consideraram, para "qualquer quantidade", a quantidade máxima possível de pães que poderia ser comprada e depois calcularam o troco, como, por exemplo, quando o grupo G1 responde: "*Ana foi na padaria com 2 reais e comprou 11 pães que custou 1,98 e sobrou 0,02 centavos de troco*". O grupo G12, não considerou a quantidade máxima de pães, mas sim valores aleatórios para exemplificar a situação, ao afirmarem: *"se ele tivesse 0,50 centavos ele poderia comparar 2 pães ele irá receber de troco 0,14 centavos de troco"* (CALADO, 2020, p. 107). Tal como é referido por Piaget (1984) estamos diante de um processo de generalização indutiva, uma vez que, "[...] o critério da generalização indutiva reside no fato de que se fundamenta nas constatações ou somente no resultado das ações" (p. 41). Já o grupo G7 apenas descreve que para encontrar o troco para qualquer quantidade de pães compradas *"[...] é necessário descobrir o valor de cada pão e dividir pelo valor inicial"* (*Ibid*., p 108), aqui, acreditamos que estamos diante de uma falsa generalização indutiva implicada por considerações não pertinentes (Piaget, 1984).

No diálogo que Calado (2020) apresenta da conversa entre os componentes do G11 (quadro 13 a seguir), inferimos que o *aluno A* se encontra na generalização indutiva, pois ao afirmar, *"Então escreve aí, fui ao mercado com 3 reais e comprei 3 balas de 40 centavos, aí coloca o troco"*, limita-se a exemplo específico para generalizar e se fundamenta em observações. Já o *aluno B*, está no nível intermediário do processo generalizador, isto é, um progresso da generalização indutiva e a passagem aos princípios da generalização indutiva, pois ao dizer, *"Então na verdade o que eu tenho que fazer é subtrair o valor que eu tenho pelo valor que eu tenho que pagar"*, não se limita a valores específicos como numa generalização indutiva, mas também não consegue explicar com clareza a situação proposta, indicando que o aluno tomou parcialmente consciência de suas ações, configurando o nível intermediário.

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Quadro 13: Diálogo do grupo G11 do item d) da atividade 2 desenvolvida por Calado (2020)

- Coloca assim, Fernanda foi ao mercado... – aluno A.

- Pera aí, ela tinha 2 reais né? – aluno B.

- Mas pode colocar outro preço, coloca 3 reais – aluno A.

- É? – aluno B.

- É, inventa um problema. Tipo assim, ela comprou balas de 40 centavos e ela tinha 3 balas, quanto ia vir de troco pra ela? – aluno A.

- Vai dar 1 real e 20 centavos. Sobra 1,80 – aluno B.

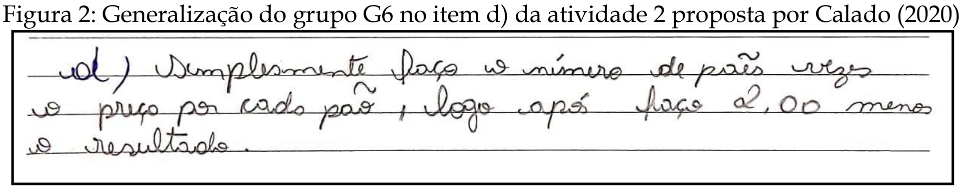
- Então escreve aí, fui ao mercado com 3 reais e comprei 3 balas de 40 centavos, aí coloca o troco – aluno A.

- Não. Então na verdade o que eu tenho que fazer é subtrair o valor que eu tenho pelo valor que eu tenho que pagar. Vou colocar isso – aluno B

Fonte: Calado (2020, p. 106)

Quanto aos grupos G5, G6 e G9, descreveram que para determinar o troco é preciso multiplicar a quantidade de pães compradas pelo preço dele, e, em seguida, fazer R$2,00 menos o resultado da multiplicação feita anteriormente (CALADO, 2020). Na figura 2 a seguir, está a resposta do G6 para esse item.

Figura 2: Generalização do grupo G6 no item d) da atividade 2 proposta por Calado (2020)


d) Simplesmente faço o número de pães vezes o preço por cado pão, logo após faço 2,00 menos o resultado.

Fonte: Calado (2020, p. 105)

Desse modo, inferimos, da resposta do grupo G6, que houve a generalização construtiva, pois não se limitaram a exemplos e conseguiram fundamentar seus raciocínios no próprio esquema de construção, destacando deles as coordenações necessárias para generalizar (PIAGET, 1984). Assim como o grupo G6, os grupos G5 e G9 também alcançaram a generalização construtiva, pois apresentaram formas parecidas de generalização (CALADO, 2020).

Os grupos G2, G3, G8 e G10 não apresentaram nenhuma generalização da atividade (CALADO, 2020).

Para o item e) dessa *atividade 2* os alunos deveriam escrever uma expressão algébrica que representasse o troco de Ana para qualquer quantidade de pão comprada. Assim como no item anterior, nesse também é pedido a generalização da atividade, porém, por meio da expressão algébrica.

Os grupos G4 e G13 escolheram uma quantidade específica de pães para generalizar, assim sendo, não desenvolveram uma abstração reflexionante da situação proposta e por isso não conseguem pensar além de exemplos com valores específicos, representando somente o que podem "observar" no momento, configurando o que Piaget (1984) chama de generalização indutiva.

O grupo G7, segue na tentativa de utilizar o algoritmo da divisão para generalizar a atividade, fazendo $y = \frac{2-x}{0,18}$, o que, segundo Piaget (1984, p. 60), apresenta uma falsa generalização indutiva por considerações construtivas anteriores e não pertinentes para a situação proposta, mas que são tão fortes que, mesmo quando sugerindo a generalização (como na conversa feita por Calado (2020) e os alunos, explicando novamente o que era pedido na questão), não se provoca nenhuma compreensão.

Já os grupos G11 e G12 responderam por meio de uma expressão quadrática fazendo: $2x^2 + 5x - 3$, e o grupo G3 generalizou por $2xy$. Diante disso, os resultados obtidos por G11, G12 e G3, sugerem que ainda estão no nível de abstração empírica a respeito da *atividade 2*, pois, para os itens a), b) e c) encontraram respostas corretas devido às "manipulações" com números específicos, já nesse item, que pedia a generalização, não conseguiram apresentar alguma resposta.

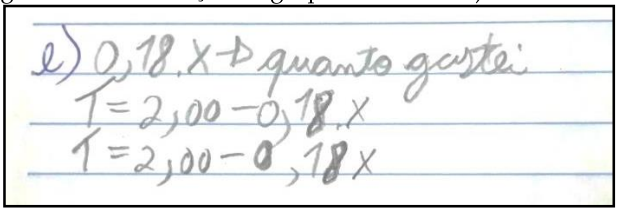
Portanto, os sujeitos dos grupos G3, G7, G11, G12 não antecipam uma resposta correta, por falta de compreensão e tomada de consciência em relação à dependência do troco em função da quantidade de pães compradas, isto é,

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

$T(p) = 2 - 0{,}18p$, as soluções são, enfim, por tentativas infundadas.

Para esse item e) o grupo G8 – que anteriormente não apresentou resposta em linguagem natural – descreve com êxito, em linguagem algébrica, o troco de Ana para qualquer quantidade de pães, por $T = 2 - 0{,}18x$ (CALADO, 2020), como podemos ver na figura 3 a seguir.

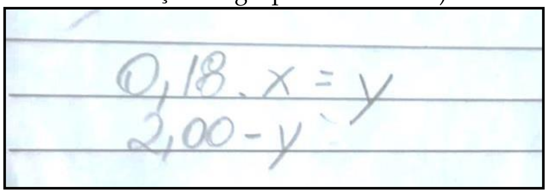
Figura 3: Generalização do grupo G8 no item e) da atividade 2



Fonte: Calado (2020, p. 109)

Segundo Calado (2020), os grupos G5, G6 e G9 também apresentaram a generalização, mas por meio de duas expressões algébricas, fazendo $0{,}18x = y$ como sendo o valor gasto para qualquer quantidade de pães, e, posteriormente, $2 - y$ para representar o troco, como podemos ver na figura 4 a seguir da resposta do grupo G5.

Figura 4: Generalização do grupo G5 no item e) da atividade 2



Fonte: Calado (2020, p. 109)

Assim, como esses grupos generalizaram na linguagem natural (*primeiro é necessário multiplicar o número de pães pelo preço de cada pão, em seguida, diminuir de 2,00 o resultado obtido*), também o fizeram aqui, seguindo os mesmos passos, mas agora por meio da expressão algébrica, confirmando a análise feita no item anterior, isto é, que esses grupos alcançaram a generalização construtiva dessa *atividade 2*.

ISSN: 1984-1655

Portando, os G5, G6, G8 e G9 apresentaram a situação de forma genérica sem a necessidade de recorrerem à exemplos específicos, configurando, assim, generalização construtiva.

Os grupos G1, G2 e G10 não apresentaram nenhuma estratégia de resolução (CALADO, 2020).

Diante disso, depois de recolhidas as resoluções das *atividades 1 e 2*, Calado (2020) achou necessário realizar outra conversa com a turma para esclarecer o significado de uma quantidade qualquer, discutindo as resoluções apresentadas por eles.

Em relação às *atividades 1* e *2*, o grupo G13 teve um avanço na generalização, pois na primeira atividade não apresentou nenhuma estratégia de resolução, já na segunda atividade conseguiu generalizar de forma indutiva. Quanto ao grupo G10, este ainda não conseguiu generalizar em nenhuma atividade. Os grupos G3, G11 e G12, ora apresentaram uma generalização indutiva, outrora deixaram de apresentar qualquer estratégia coerente de generalização.

Desse modo, corroboramos com Calado (2020) ao afirmar que fica clara a dificuldade dos alunos no processo de generalização, tanto em linguagem natural quanto na linguagem algébrica, mesmo os alunos compreendendo o contexto da situação. E isso se explica, segundo Piaget (1984), pela falta de abstração reflexionante cuja tomada de consciência é determinante nesse processo.

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Considerações finais

Considerando nosso problema de pesquisa: *quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização com o processo de generalização de função afim, identificadas em pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa?* E considerando as meta-análises realizadas na pesquisa de Pavan (2010) e Calado (2020), sob a perspectiva de Piaget (1984), constatamos que a principal razão pela a qual os alunos tiverem dificuldades de evoluir da generalização indutiva para construtiva, deve-se ao fato de ainda não terem tomado consciência de suas ações e das formas de abstrações que a tomada de consciência determina, tal como é referido por Piaget (1984). Pois, independentemente do nível de escolaridade e a idade dos alunos, identificamos nas análises realizadas, que, a partir do momento em que os alunos conseguem explicar as razões de suas ações a generalização se torna cada vez mais construtiva.

Constatamos, também, a importância de o professor desenvolver uma sequência didática voltada para o estudo da lei de formação da função que proporcione aos alunos várias situações, a fim de que eles possam identificar, no decorrer das tarefas ou problemas propostos, o que está acontecendo com as informações que estão colocando em correspondência, quais variáveis estão "em jogo" e quais delas são dependentes e independentes para, então, por meio de abstrações e tomada de consciência de suas ações, passarem da generalização indutiva para generalização construtiva. Isso porque, constatamos que todos os colaboradores de ambas as pesquisas aqui analisadas, evoluíram durante a implementação das tarefas propostas, corroborando com Pinto (2014), para quem, uma sequência didática bem planejada pode ser fundamental na condução dos processos de ensino e de aprendizagem dos alunos, levando-os à efetivação do conceito estudado, que, no nosso caso, o de função afim.

Recomendamos que as ideias-base do conceito de função, como, variável, dependência, regularidade e generalização, sejam trabalhadas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental para que quando os alunos, ao chegarem aos finais (9° ano), cuja função afim é apresentada de maneira formal, consigam generalizar algebricamente as situações apresentadas, mas de maneira construtiva, não indutiva, como vimos na maioria das respostas de Calado (2020).

Isso porque não são somente as crianças que passam pela generalização indutiva, mas é o processo de generalização que tem duas etapas: indutiva e construtiva. Não se trata somente de algo relacionado à idade. Dito de outra forma, não somente é recomendável que as ideias base de função afim com a generalização sendo expressa em linguagem natural tenha seu início já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, mas que, nos Anos Finais, sejam propostas tarefas que possibilitem aos estudantes desenvolver o processo de generalização em suas duas etapas, a indutiva e a construtiva.

Referências

BECKER, F. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. **Schème:** : Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas, v. 6, n. e., p. 104-128, nov. 2014. Disponível em: http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/4276. Acesso em: 29 jul. 2020.

BELLINI, M, L. Piaget: uma teoria da ação. **Clareira**: Revista de Filosofia da Região Amazônica. v. 7, n. 1, p. 168-178. Jan-jul. 2020.

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **REVEMAT**. v. 9, p. 07-20. junho de 2014.

BLATON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Jornal for Research in Mathematics Education**. v.

36, n. 5, p. 412 – 446. 2005.

CALADO, V. C. **Invariantes Operatórios Relacionados À Generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE - Campus de Cascavel, Cascavel, 2020.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**. v. XVI, n. 2. 2007. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/62447846.pdf. Acesso em: 16/02/2021.

MANZAN, A. P. A. **A Apropriação Dos Conceitos De Função Afim E Quadrática Por Estudantes De Cursos De Engenharia**. Dissertação (Mestrado em enfermagem). Universidade de Uberaba, Uberaba, 2014.

MARTINS, L. C. **Abstração Reflexionante e Aprendizagem de Proporção**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

NOGUEIRA, C. M. I. Construindo o Conceito de Funções. *In*: Ramos, A.S.; Rejani, F.C. **Teoria e Prática de Funções**. Maringá: Unicesumar, p. 121, 2014.

PAVAN, L. R. **A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por Crianças da 4ª série do Ensino Fundamental em Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas**. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

PIAGET, J. **Investigaciones Sobre La Generalización**: estudios de epistemoligía y psicología genéticas. Tlahuapan: Editora Premià, 1984.

PIAGET, J. **Abstração Reflexionante**: Relações Lógico-matemáticas e Ordem das Relações Espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PINTO, C. F. **Dissertações Brasileiras sobre o Ensino de Função Afim, a partir da implementação de Sequências Didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012: Questões para formação de professores e para pesquisa**. Dissertação Mestrado. UFRJ, Rio de Janeiro, 2014.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função afim na Educação

Básica:estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas.**Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.** v. 13, n. 2, p. 25-50, nov. 2020.

RUIZ, A. R.; BELLINI, L. M. **Matemática: Epistemologia Genética e Escola**. Londrina: Edições CEFIL, 2001.

SALADINI, A, C. Da Ação à Reflexão: O Processo de Tomada de Consciência. **Schème**: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. v. 1, n. 2, p. 31-54. jul-dez. 2008.

TINOCO, Lucia Arruda Albuquerque. **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar....2º ed. Rio de Janeiro, Projeto Fundão, 2011.

Recebido 24/02/2022

Aprovado 30/06/2022