ISSN: 1984-1655

Schème

Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

PADRÕES FRACTAIS E GEOMETRIA DINÂMICA: UMA ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DA ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE

Marcelo Antonio dos Santos[1]
Marcus Vinicius de Azevedo Basso[2]
Alice Borges Maestri[3]

Resumo

Este artigo tem por objetivo descrever e analisar as interações de um grupo de estudantes do Ensino Fundamental com *applets* do GeoGebra, desenvolvidos a partir de uma proposta de construção de conceitos de Matemática através da exploração de fractais. A pesquisa considera a necessidade de desenvolver uma compreensão detalhada dos percursos cognitivos e das diversas possibilidades que surgem com a utilização de recursos digitais amplamente acessíveis na atualidade. O referencial teórico aborda a abstração reflexionante de Jean Piaget, além de estudos sobre as potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica e dos fractais na construção de conceitos matemáticos. A metodologia contempla uma abordagem qualitativa, com dados coletados por meio de atividades no GeoGebra, vídeos dos encontros com os participantes, notas de campo e protocolos de observação, com intervenções inspiradas no método clínico de Jean Piaget. Os resultados enfatizam a importância de uma análise detalhada das interações dos estudantes com os *applets*, suas estratégias e como demonstram progressos conceituais ao longo do processo, observadas sob diferentes perspectivas. As elaborações dos estudantes em resposta a atividades significativas e desafiadoras evidenciam as implicações do processo de abstração reflexionante e suas contribuições no que se refere aos avanços na construção de conceitos relacionados às principais características dos fractais.

Palavras Chave: Abstração Reflexionante, Construção do Conhecimento, Fractais, Geometria Dinâmica.

[1] Doutorando em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor de Matemática no Colégio de Aplicação da UFRGS (CAp/UFRGS). E-mail: marcelo7906@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7059-8982

[2] Doutor em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor Titular do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS. E-mail: mbasso@ufrgs.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2312-9056

[3] Graduanda em Matemática – Licenciatura pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: mat.alice.maestri@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0009-0004-0585-6091

ISSN: 1984-1655

Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

FRACTAL PATTERNS AND DYNAMIC GEOMETRY: AN ANALYSIS FROM THE THEORY OF REFLECTING ABSTRACTION

Abstract

This article aims to describe and analyze the interactions of a group of Middle School students with GeoGebra applets, developed based on a proposal to build mathematical concepts through the exploration of fractals. The research considers the need to develop a detailed understanding of cognitive pathways and the different possibilities that arise with the use of digital resources that are widely accessible today. The theoretical framework addressed Jean Piaget's reflecting abstraction, in addition to studies on the potential of dynamic geometry environments and fractals in constructing mathematical concepts. The methodology adopts a qualitative approach, with data collected through activities on GeoGebra, videos of recorded meetings with participants, field notes, and observation protocols, with interventions inspired by Jean Piaget's clinical method. The results emphasized the importance of a detailed analysis of students' interactions with the applets, their strategies, and how they demonstrate conceptual progress throughout the process, observed from different perspectives. The students' elaborations in response to meaningful and challenging activities highlighted the implications of the reflecting abstraction process and its contributions in terms of advances in constructing concepts related to the key characteristics of fractals.

Keywords: Dynamic Geometry, Fractals, Knowledge Construction, Reflecting Abstraction.

Introdução

As tecnologias digitais têm promovido mudanças significativas que impactam nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Além das diferentes possibilidades de exploração que tais tecnologias proporcionam, estudos recentes evidenciam perspectivas e abordagens que não eram possíveis antes do advento de recursos amplamente acessíveis na atualidade. Nesse sentido, podemos citar os estudos de Sinclair e Robutti (2012), Salazar e Almouloud (2015) e Notare e Basso (2018).

Para explorar as potencialidades das tecnologias digitais, é importante desenvolver uma compreensão detalhada dos percursos cognitivos e das múltiplas possibilidades de interação que emergem ao utilizar esses recursos. Nessa perspectiva, estudos que investigam diferentes ambientes têm sido desenvolvidos, incluindo as pesquisas conduzidas por Notare e Basso (2015), Bairral e Barreira (2017), Leung (2015, 2008), Borba et al. (2020), Hegedus e Otálora (2023) e Pittalis e Drijvers (2023).

Com o intuito de contribuir para esse processo, buscamos inspiração na epistemologia genética de Jean Piaget para descrever e analisar as interações de um grupo de estudantes do Ensino Fundamental com *applets* criados no ambiente de geometria dinâmica GeoGebra. As atividades foram desenvolvidas com a finalidade de promover a aprendizagem de conceitos de Matemática por meio da exploração de fractais, que são formas encontradas em uma ampla variedade de contextos.

Propomos que a exploração de fractais em ambientes como o GeoGebra, por meio de atividades que oportunizem manifestações espontâneas do pensamento matemático por parte dos estudantes, podem enriquecer as possibilida-

ISSN: 1984-1655

des de interação destes com os objetos, promovendo uma articulação entre aspectos figurais e conceituais. Essa articulação pode evidenciar abstrações reflexionantes, nas diferentes formas propostas por Piaget (1995).

A próxima seção abordará os princípios teóricos que fundamentam este trabalho, apresentando uma visão sobre o processo de construção do conhecimento matemático à luz desses referenciais.

Interações sujeitos-*applets*: uma abordagem piagetiana

Compreender como o ser humano aprende e progride de conhecimentos mais limitados para conhecimentos mais complexos. Embora essa frase possa parecer simples em sua formulação, suas implicações do ponto de vista pedagógico e epistemológico remetem a uma ampla gama de possibilidades em termos de análise.

Nestes apontamentos, iniciamos explicitando o nosso entendimento de que o conhecimento matemático não é meramente transmitido, nem se desenvolve exclusivamente a partir de condições prévias, hereditárias. O conhecimento não tem origem unicamente no objeto ou no sujeito. Partimos do pressuposto de que "a construção do conhecimento é um processo contínuo que ocorre na interação entre sujeito e objeto, entre indivíduo e meio social, entre organismo e meio ambiente" (dos Santos *et al*., 2022, p. 44).

Ao tratar das interações entre sujeito e objeto, é relevante destacar que para Piaget, "[...] o entre envolve ação. No entanto, essa ação não é de qualquer tipo, mas, desde os primeiros períodos de sua obra, trata-se de ação como assimilação e acomodação, ou seja, como interação" (Franco; Machado, 2020, p. 47). No contexto do presente estudo, analisaremos as interações entre os sujeitos e os objetos digitais, que consistem em *applets* desenvolvidos no ambiente GeoGebra.

O GeoGebra consiste em um ambiente de geometria dinâmica cujas potencialidades foram evidenciadas em diversos estudos. Estes ambientes estão promovendo mudanças na forma como se aprende matemática, "transformando a construção e a representação estática de uma figura, para formas dinâmicas e que constituem uma classe de figuras e propriedades" (Bairral; Barreira, 2017, p. 48). Construir e explorar uma forma geométrica qualquer em um ambiente dinâmico, como o GeoGebra, difere radicalmente de realizar a mesma atividade em um recurso estático, com lápis, régua e papel.

A transição de formas estáticas para formas dinâmicas apresenta uma série de implicações. Essa mudança de paradigma desafia os estudantes a explorar relações, experimentar diferentes configurações e observar como as mudanças nos parâmetros afetam as figuras geométricas.

No GeoGebra, o sujeito pode agir sobre os *applets*, explorando as inúmeras possibilidades de interação que um ambiente de geometria dinâmica pode oferecer. Essa atividade, que implica assimilação, altera o objeto a partir de novos observáveis. Nesse processo, possíveis obstáculos à assimilação, decorrentes das características dos objetos, podem desafiar o sujeito na construção de novos esquemas de assimilação, o que está relacionado ao processo de acomodação. Nesse contexto, a ação "se compõe de duas ações, entre si complementares: a ação assimiladora que, ao assimilar o objeto, o transforma; ação acomodadora que, ao responder às dificuldades da assimilação, transforma os esquemas assimiladores" (Becker, 2013, p. 70).

Sobre a construção de conhecimentos e a transição de conhecimentos mais limitados para conhecimentos mais complexos, tomamos como referência o processo de abstração reflexionante, conforme proposto por Piaget (1995). De acordo com Becker (2014, p. 105), "[...] abstração é a atividade ao mesmo tempo

ISSN: 1984-1655

coordenadora e diferenciadora do sujeito conhecedor mediante a qual constrói conhecimento, como estrutura ou capacidade; secundariamente, como conteúdo".

Piaget (1995) trata de duas formas de abstração: empírica e reflexionante. Através das abstrações empíricas, o sujeito extrai qualidades observáveis dos objetos, ou qualidades inerentes aos objetos antes da sua ação sobre eles. Isso inclui características como a cor ou a forma de um objeto, por exemplo. No GeoGebra, ao clicar e arrastar um ponto, é possível observar o movimento deste ponto na janela de visualização, por abstração empírica. Por outro lado, possíveis relações de dependência ou propriedades invariantes deste ponto ou de outras formas geométricas a ele vinculadas não são observáveis. Tais qualidades são extraídas por meio de abstrações reflexionantes.

A abstração reflexionante "apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas" (Piaget, 1995, p. 274). Quando o sujeito toma consciência das abstrações reflexionantes, realiza abstrações refletidas. Neste processo, as relações entre a ação e a conceituação nas interações sujeitos-*applets* podem ser evidenciadas em diferentes níveis.

O GeoGebra disponibiliza um conjunto de ferramentas que ampliam de forma expressiva as possibilidades do sujeito em suas ações. Além de arrastar e medir, existem recursos relacionados a transformações, animações, interação, criação de novas ferramentas, gráficos, entre outros. De acordo com Notare e Basso (2012, p. 6), "este ambiente torna-se um importante recurso para ser utilizado como um espaço de exploração e manipulação pelos alunos, pois valoriza a ação do aluno, tanto no processo de construção, quanto no processo de exploração".

Quando o sujeito explora e manipula construções no GeoGebra utilizando as ferramentas disponíveis, mesmo não tomando consciência desse processo, pode retirar dos objetos qualidades inseridas pelas suas ações sobre as construções. Neste caso, temos uma forma de abstração definida por Piaget (1995) como abstração pseudo-empírica, que também é reflexionante. Essa forma de abstração se evidencia quando o sujeito manipula uma figura geométrica e a classifica como triângulo equilátero, por exemplo. O conceito de triângulo equilátero não pertence ao objeto, pois demanda uma construção anterior do sujeito.

O processo de abstração reflexionante comporta ainda dois aspectos inseparáveis: reflexionamentos e reflexões. Quando o sujeito é desafiado a agir de forma significativa e a refletir sobre suas ações, é possível que as coordenações relacionadas a estruturas já construídas não deem conta das novas informações. Neste caso, o sujeito retira qualidades de um patamar para transferi-las para um patamar superior, o que consiste no aspecto de reflexionamento. Ao fazer isso, é necessário reconstruir e reorganizar as estruturas anteriores neste novo patamar em função dessa novidade, o que caracteriza o aspecto da reflexão.

Ao analisarmos estes dois aspectos da abstração reflexionante, cabe também citar as relações entre conteúdo e forma na construção de conceitos de Matemática. Um conteúdo retirado de um patamar e colocado em um patamar superior, por reflexionamento, leva à construção de uma forma, por reflexão. Piaget (1995) utiliza o termo "espiral" ao tratar dessas relações, e afirma que "todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devidas à reflexão", e este ciclo segue de forma ininterrupta, em domínios cada vez mais amplos.

A próxima seção apresenta ideias relacionadas aos fractais e suas potencialidades na construção de conceitos matemáticos. Além disso, são exploradas algumas possibilidades de investigação das principais características de um fractal, relacionando-as com a teoria da abstração reflexionante.

Fractais e o processo de Abstração Reflexionante

O estudo dos fractais teve início nos anos 70, tendo Benoit Mandelbrot[4] como precursor. Os fractais são formas que possuem algumas propriedades especiais. De acordo com Barbosa (2007, p. 9), esses entes geométricos "[...] constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes. Segue que suas partes lhe são semelhantes; propriedade conhecida como autossimilaridade".

Além da autossimilaridade, os fractais apresentam características cuja análise pode ser desafiadora para os sujeitos, tais como iteração infinita, proporcionalidade das suas partes, dimensão. O estudo dos fractais possibilitou a estruturação do que é chamado de Geometria Fractal, que está relacionada a estruturas aparentemente caóticas, devido às especificidades das formas, diferenças conceituais em relação à Geometria Euclidiana e aplicações em diferentes campos.

Barbosa (2007, p. 9) aponta que "as estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas dessa geometria, fornecem uma certa ordem ao Caos, razão de ser, às vezes, considerada como a sua linguagem, que busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório". Essa aparente complexidade dos fractais revela uma beleza intrincada e uma estrutura matemática

[4]Benoit Mandelbrot (1924-2010) foi um matemático que nasceu em Varsóvia, amplamente reconhecido como o pai da geometria fractal.

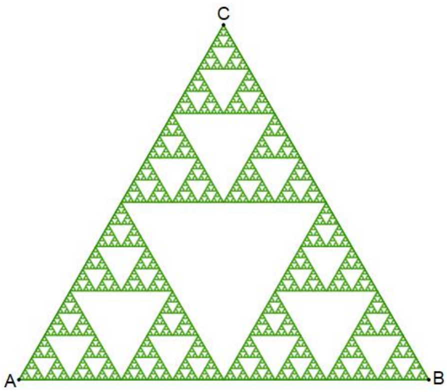
ISSN: 1984-1655

que desafia conceitos e abordagens tradicionais em geometria, uma vez que o processo de construção e exploração de uma forma fractal requer a compreensão de conceitos e relações que vão além de uma simples leitura de observáveis ou da execução mecânica de determinados passos.

Para Xavier (2020, p. 41), "devido a sua forma e características, o estudo de fractais pode ser um tema interessante e visualmente atrativo para os alunos, além de permitir a exploração de diferentes conteúdos matemáticos, nos diferentes níveis de ensino". Pereira e Borges (2017, p. 573), afirmam que "a geometria dos fractais se apresenta como um tema com o qual se possibilita a fundamental correlação de diferentes conteúdos matemáticos de forma simultânea".

Existem diversas formas fractais, assim como diferentes possibilidades de construção e exploração, que vão desde simples dobraduras até formas complexas geradas computacionalmente. No contexto deste estudo, as atividades analisadas envolvem a exploração de um fractal clássico, conhecido como Triângulo de Sierpinski[5] (Figura 1).

Figura 1 – Triângulo de Sierpinski

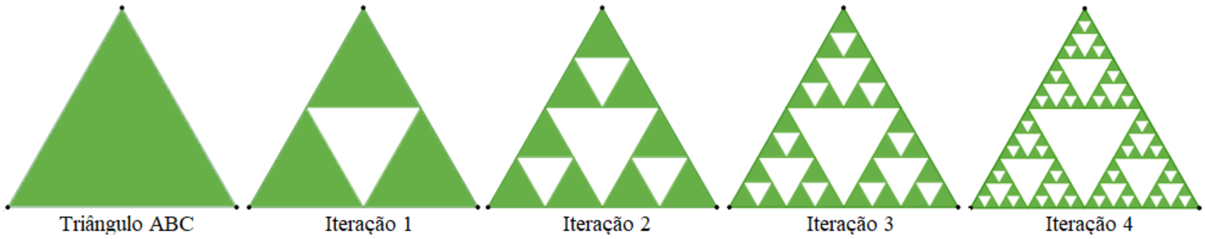


Fonte: Acervo dos autores

[5]Wacław Sierpinski (1882-1969) foi um matemático polonês que fez contribuições significativas em diversos campos da matemática. Ele é particularmente conhecido por seu trabalho na teoria dos conjuntos e por ter estudado o "Triângulo de Sierpinski", um fractal que leva seu nome.

O Triângulo de Sierpinski é um fractal criado por remoção. Para construí-lo, parte-se de um triângulo equilátero ABC, com lado de medida l. Na primeira iteração, remove-se um triângulo central com lado de medida $l/2$, formado pelos pontos médios dos lados do triângulo inicial, gerando três triângulos equiláteros. Na segunda iteração, repete-se o mesmo procedimento nos três triângulos remanescentes, formando agora nove triângulos, com lado de medida $l/4$. Este procedimento é repetido sucessivamente, criando uma estrutura fractal que é caracterizada por sua autossimilaridade, o que significa que a forma do fractal se repete em diferentes escalas. A figura 2 apresenta as primeiras quatro iterações deste fractal, agora representadas sequencialmente:

Figura 2 – Quatro iterações do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Acervo dos autores

Possíveis explorações deste fractal podem incluir, por exemplo, contagens como o número de triângulos construídos em cada nova etapa; também podem ser exploradas propriedades numéricas e algébricas relativas à variação do perímetro e da área dos triângulos, tanto os retirados quanto os remanescentes.

Ao explorar essa forma fractal, o sujeito é desafiado a realizar abstrações reflexionantes. Tais abstrações podem ser evidenciadas quando, por exemplo, o sujeito observa a sequência de construções e conclui que se tratam de triângulos, comparando suas medidas a cada nova etapa; pode ainda realizar a contagem do número de triângulos retirados em cada iteração (1, 3, 9, etc.); o próprio processo de construção demanda conceitos relacionados à ordem ou à identifica-

ISSN: 1984-1655

ção de transformações realizadas em determinadas etapas, sempre sobre os resultados da etapa anterior, o que caracteriza o processo iterativo. Nestes exemplos, possíveis qualidades retiradas dos objetos pelo sujeito resultam das suas ações sobre os mesmos, demandando construções prévias. Tais abstrações podem ser interpretadas como abstrações pseudo-empíricas.

Becker (2014, p. 115) trata de um "jogo mental altamente eficiente utilizando ao mesmo tempo as qualidades da abstração empírica e o mecanismo da abstração reflexionante" ao se referir às abstrações pseudo-empíricas. E este jogo mental pode estar na gênese de conceituações relacionadas às propriedades do Triângulo de Sierpinski, tais como o padrão infinito e a autossimilaridade. A análise dessas conceituações não está limitada a um número restrito de iterações.

Mesmo com a possibilidade de dar continuidade à construção no GeoGebra, representando novas iterações, é possível que a partir de determinado momento o sujeito não mais necessite observar tais representações do ponto de vista figural. Ao analisar e formular conjecturas sobre a variação da medida da área e do perímetro do fractal, por exemplo, pode-se concluir que a primeira diminui a cada nova iteração, enquanto a segunda aumenta; pode-se concluir ainda que quando o processo de construção continua sucessivamente, com muitas iterações, a medida da área se aproxima de zero, e o número de triângulos remanescentes cresce exponencialmente, engendrando uma ideia de infinito.

Essas abstrações decorrem de numerosas construções, por reflexionamentos e reflexões, aspectos próprios da abstração reflexionante, que compreende uma atividade contínua. Segundo Piaget (1995, p. 278), essa atividade "pode permanecer inconsciente, a começar pelas coordenações sobre as quais ela influi, mas cujas realizações atingem, a partir de um certo nível, tomadas de consciência complexas".

ISSN: 1984-1655

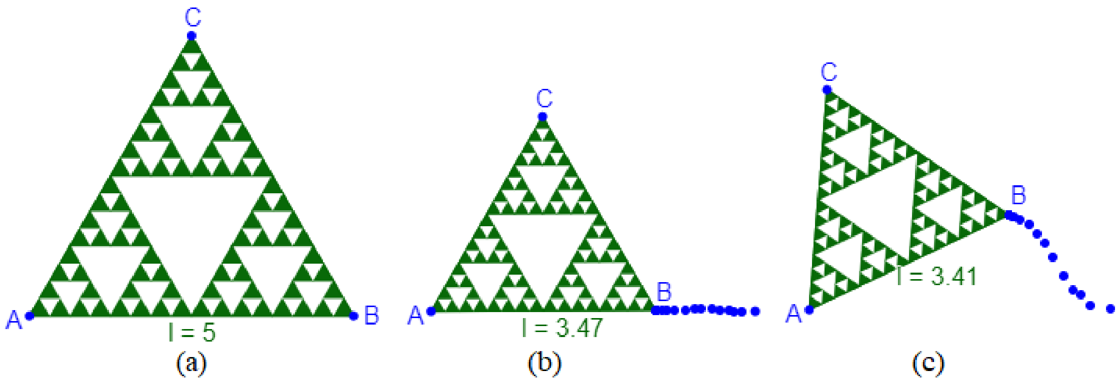
Quando o sujeito toma consciência das abstrações realizadas (abstração refletida), "estas se tornam instrumentos para um processo de reflexão sobre as reflexões anteriores, de operações sobre operações" (dos Santos *et al.*, p. 45). A partir desse processo, a relação constante entre conteúdos e formas atinge novos patamares, nos quais o reflexionamento de conteúdos reelaborados leva à construção de novas formas.

Retornando ao Triângulo de Sierpinski e às possibilidades de exploração deste fractal no GeoGebra, a variação da medida da área, que corresponde a uma forma, pode tornar-se conteúdo para a criação de novas formas; o mesmo acontece com a variação do número de triângulos remanescentes após cada iteração. À medida que o sujeito continua sendo desafiado, de forma progressiva e através de questionamentos que o levem a pensar na matemática envolvida nas construções com as ferramentas disponíveis no GeoGebra, novas formas podem ser construídas, em domínios cada vez mais amplos.

Na construção representada na Figura 1, ao explorar o *applet*, o sujeito pode usar a ferramenta "mover" para arrastar os pontos A, B e C, que são vértices do triângulo ABC. A figura inicial, antes estática e classificada como um triângulo equilátero, se transforma em uma série de representações figurais do mesmo fractal, introduzindo outros elementos nas análises a partir de novos observáveis. Aqui, podemos apresentar duas possibilidades de exploração: na primeira, o triângulo equilátero mantém suas propriedades quando os pontos A e B são arrastados; nessa configuração, as coordenadas do ponto C dependem das coordenadas dos pontos A e B, e o triângulo ABC permanece equilátero, variando a medida do lado e outras medidas que dependem funcionalmente dela.

A figura 3 apresenta três representações figurais do mesmo fractal, resultado do movimento do ponto B. O rastro do ponto foi incluído para demonstrar outra ferramenta com grande potencial de exploração no GeoGebra, que consiste em "Exibir Rastro", e para indicar que cada marca nesse rastro pode corresponder a um triângulo equilátero distinto. Durante o ato de arrastar, podemos analisar não apenas as posições final e inicial do ponto, comparando, por exemplo, a figura 3 (a) com as figuras 3 (b) e (c), mas também todas as posições intermediárias ocupadas por ele durante a exploração, as quais são representadas pelo rastro do ponto B.

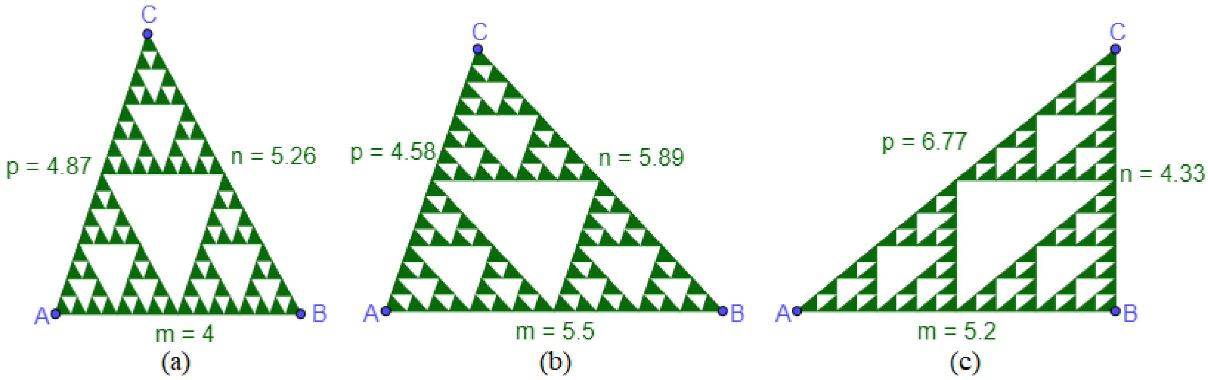
Figura 3 – Três representações do mesmo fractal, ao mover o ponto B



Fonte: Acervo dos autores

Na segunda possibilidade, representada na figura 4, o sujeito pode mover os pontos A, B e C, e, nesse cenário, o triângulo equilátero ABC da figura 3 (a) pode se transformar em uma série de triângulos diversos, com lados de medida m, n e p, os quais não necessariamente precisam ter medidas iguais.

Figura 4 – Representações distintas da construção arrastando-se os pontos A, B e C



Fonte: Acervo dos autores

As representações dinâmicas têm o potencial de se transformarem em desafios cognitivos que promovam novas abstrações, pois ao comparar diferentes representações de um fractal, o sujeito pode testar conjecturas até então não consideradas. A conservação de possíveis qualidades analisadas em um caso pode agora ser discutida para uma classe mais abrangente de figuras planas, com diferenciações e integrações em diferentes patamares. Além de abstrações reflexionantes, é possível promover generalizações não apenas com base em observáveis, mas principalmente com base em coordenações de ações do sujeito, no campo da compreensão. Essas coordenações são internas e correspondem a um processo mental altamente promissor no desenvolvimento do conhecimento matemático.

Segundo Piaget (1995), há uma relação circular entre as abstrações e as generalizações. De acordo com o autor, "o resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização, bem como o resultado de uma abstração empírica conduz à precisão do grau de generalidade dos caracteres extraídos do objeto" (Piaget, 1995, p. 59). Além disso, de acordo com as ideias de Piaget (1995), as generalizações pressupõem a prévia delimitação das propriedades a serem generalizadas, o que implica em abstrações. Essa relação circular entre abstrações e generalizações pode ser observada nas interações dos estudantes com os *applets* do GeoGebra, sendo necessário analisar tais interações segundo os tipos de abstração e de generalização possíveis.

Com esses exemplos, não só apresentamos ideias relacionadas ao conceito de fractal, mas também buscamos estabelecer conexões entre diversas abordagens para explorar esses objetos geométricos no GeoGebra e a teoria da abstração reflexionante. Na próxima seção, serão descritos os procedimentos metodológicos utilizados para identificar esse processo nas interações de um grupo de estudantes com atividades criadas no ambiente GeoGebra, as quais envolvem a exploração de fractais.

Procedimentos Metodológicos

Este estudo está vinculado a um projeto de pesquisa que tem como objetivo investigar os percursos cognitivos que emergem a partir de atividades voltadas para a construção de conceitos matemáticos por meio da exploração de fractais em ambientes de geometria dinâmica.

A metodologia adotada apresenta uma abordagem qualitativa. Tal abordagem utiliza o texto como material empírico, e "[...] parte da noção da construção social das realidades de estudo, está interessada nas perspectivas dos participantes, em suas práticas do dia a dia e em seu conhecimento cotidiano relativo à questão de estudo" (Flick, 2009, p. 16).

A pesquisa foi conduzida com um grupo de 10 estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CAp/UFRGS), com idades entre 12 e 13 anos. A prática ocorreu no Laboratório de Informática e foi organizada em cinco encontros com periodicidade semanal, com a duração de 1 hora e 30 minutos cada. Ao todo, foram propostas ao grupo de estudantes 20 atividades, com uma distribuição inicial de 4 atividades por encontro. Houve um certo grau de flexibilidade, pois,

ISSN: 1984-1655

embora os estudantes tenham recebido informações sobre as atividades a serem desenvolvidas em cada encontro, foram orientados a realizá-las no seu próprio ritmo.

No GeoGebra, é possível criar atividades no formato de Tarefas, organizadas com base em vários elementos, como *applets*, textos, questões abertas, questões de múltipla escolha e vídeos, entre outros. Para o desenvolvimento do experimento descrito aqui, cada atividade foi composta por duas partes principais: um ou mais *applets* com propostas de construção e exploração de objetos geométricos, e questões abertas, acompanhadas de campos de edição de texto, permitindo que os participantes registrassem suas elaborações. Uma vez configuradas pelo professor, as tarefas foram atribuídas e disponibilizadas aos estudantes de duas maneiras: por meio de um link, que permite o acesso direto em um navegador, ou por meio de um código. Esse código deve ser informado após o acesso ao GeoGebra online[6].

Todas as atividades realizadas pelos estudantes no GeoGebra Tarefas podem ser acessadas posteriormente pelo professor, que, por meio de algumas configurações, também pode acessar o protocolo de construções. Além das elaborações textuais dos sujeitos e das construções realizadas por eles, o processo de coleta de dados também envolveu outros instrumentos.

O registro das possíveis condutas cognitivas e a análise dessas condutas pelo processo de abstração reflexionante demandam a interação direta do pesquisador com os sujeitos, assim como o acompanhamento constante e sistemático

[6] No GeoGebra online, as atividades podem ser acessadas através do endereço https://www.geogebra.org/classroom.

ISSN: 1984-1655

dos processos de pensamento envolvidos na realização das atividades. Nesse cenário, o Método Clínico de Jean Piaget se configura como uma importante fonte de inspiração.

Nas palavras de Delval (2002, p. 67), este método de pesquisa e coleta de dados criado por Piaget objetiva "investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem, que procura descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras". Dessa forma, além dos registros no GeoGebra, implementamos diversas estratégias para analisar os caminhos trilhados pelos sujeitos durante as explorações. Esses caminhos podem evidenciar-se tanto por meio de respostas verbais dos estudantes a possíveis questionamentos apresentados pelos pesquisadores quanto por suas próprias ações junto aos *applets*.

Durante os encontros, o pesquisador utilizou uma câmera móvel para gravar seus diálogos com os estudantes, visando captar aspectos observáveis de suas ações, expressos por meio de gestos e da manipulação dos objetos geométricos na janela de visualização do ambiente. Além de atender aos estudantes quando eles o chamavam, o pesquisador procurou conduzir pequenas entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano, apresentando questões complementares, com o objetivo de reunir evidências sobre como eles estavam pensando ao realizar as atividades. Notas de campo foram produzidas com registros complementares sobre essas intervenções. Uma assistente de pesquisa acompanhou todos os encontros, observando as ações dos sujeitos, ouvindo possíveis diálogos e fazendo registros sobre as estratégias utilizadas e elementos que julgasse pertinentes, levando em consideração os objetivos do estudo. Esses registros compuseram o protocolo de observação.

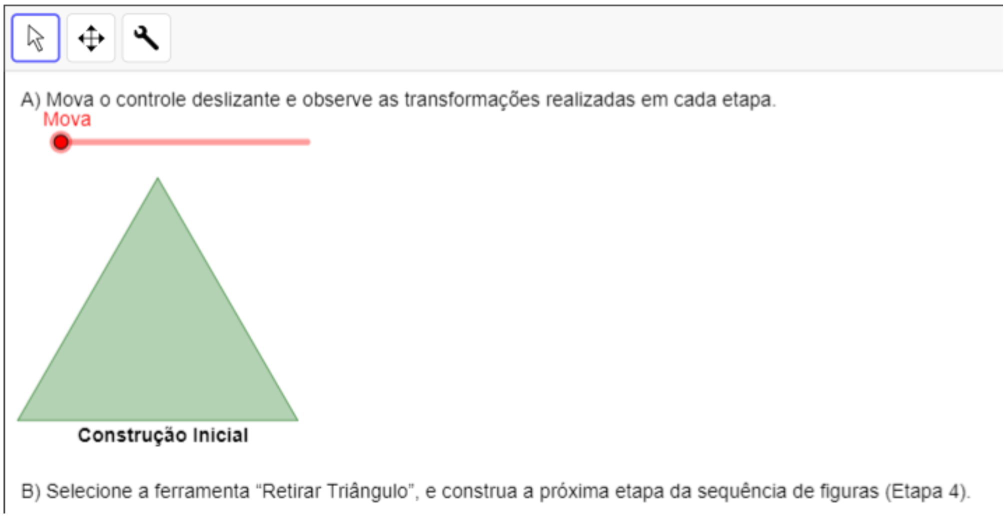
Os dados coletados foram organizados em um relatório e categorizados de acordo com o número da atividade e os tipos de respostas. Antes da análise dos dados, realizou-se uma redução dos mesmos, eliminando respostas semelhantes por saturação. Durante a análise dos textos produzidos pelos estudantes, foram identificados problemas relacionados à gramática e à ortografia. Portanto, alguns trechos usados nas análises passaram por correção linguística, preservando o conteúdo original do texto. Com base em Flick (2009), foi realizada uma triangulação entre os diferentes instrumentos utilizados, o que contribuiu enriquecer a compreensão em relação aos processos de abstração observados durante as interações.

Durante os experimentos, foram explorados diversos fractais, entre eles o Triângulo de Sierpinski. No presente artigo, apresentamos um recorte da pesquisa, no qual selecionamos uma das atividades propostas para os sujeitos, que será descrita na próxima seção.

Descrição do experimento

O experimento selecionado para análise neste artigo foi desenvolvido com o objetivo de observar as condutas cognitivas dos participantes e possíveis abstrações relacionadas às propriedades do Triângulo de Sierpinski. A atividade foi dividida em duas partes. O *applet* utilizado na parte 1, representado na figura 5, apresenta um controle deslizante denominado "Mova" e uma construção inicial que consiste em um triângulo equilátero. Quando o controle é arrastado, são exibidas as três primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski.

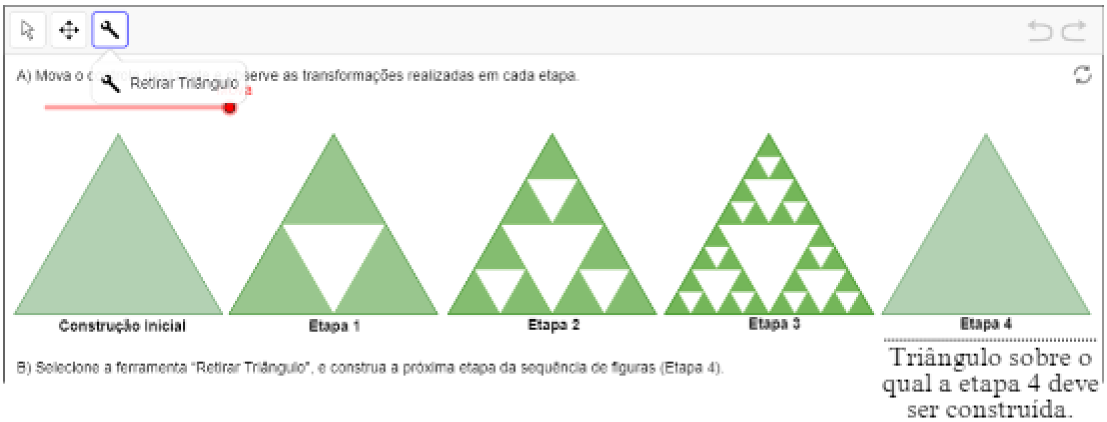
Figura 5 – *Applet* utilizado na parte 1 da atividade selecionada para análise



Fonte: Acervo dos autores

A animação foi configurada de forma que cada uma das quatro posições do controle deslizante corresponda a uma iteração do fractal, tornando a exibição dos objetos progressiva. Assim, a posição inicial corresponde à iteração 0, e a posição final corresponde à iteração 3. A figura 6 representa a configuração da construção quando o controle deslizante ocupa sua posição final, momento em que também é exibido um novo triângulo, sobre o qual deve ser construída a iteração 4, aqui identificada como "Etapa 4".

Figura 6 – *Applet* utilizado na parte 1, com controle deslizante na posição final



Fonte: Acervo dos autores

ISSN: 1984-1655

O applet apresenta aos estudantes uma ferramenta chamada "Retirar Triângulo", que constrói uma iteração do Triângulo de Sierpinski a partir de um triângulo qualquer. Com essa ferramenta, é possível remover um triângulo central, cujos lados são formados pelos pontos médios dos lados do triângulo selecionado. Na Figura 6, para construir a primeira iteração do Triângulo de Sierpinski sobre o triângulo correspondente à etapa 4, por exemplo, o sujeito precisa selecionar a ferramenta "Retirar Triângulo" e clicar sobre o triângulo. As demais iterações são obtidas aplicando a mesma transformação nos triângulos restantes.

Além de mover o controle deslizante, a atividade propõe aos participantes que utilizem a ferramenta referida anteriormente para construir a quarta iteração do fractal, começando com um novo triângulo equilátero. Os participantes não receberam informações ou um roteiro prévio das etapas de construção do fractal. A palavra “etapa” foi escolhida em vez de “iteração” porque a experiência de construção de objetos desse tipo era nova para os participantes, e optou-se por palavras que fossem mais significativas para eles naquele momento.

A figura 7 apresenta a parte 2 da atividade. O *applet* exibe um triângulo com vértices nos pontos A, B e C, bem como outros quatro triângulos, nos quais os estudantes devem construir as iterações 1, 2, 3 e 4 do Triângulo de Sierpinski. A princípio, essa proposta pode parecer repetitiva em relação à primeira parte; no entanto, do ponto de vista das abstrações envolvidas, são introduzidos elementos significativamente distintos, incluindo a possibilidade de arrastar os vértices do triângulo ABC. Quando os pontos A, B e C são arrastados, os estudantes observam que há uma relação de dependência entre os triângulos representados no *applet*. Além disso, não é fornecida aos estudantes uma visualização prévia das primeiras iterações.

Além da ferramenta "Retirar Triângulo", mencionada anteriormente, o *applet* também oferece a ferramenta "Retirar Triângulos", que permite a construção de duas iterações do Triângulo de Sierpinski em qualquer triângulo dado. Durante a realização da atividade, os estudantes têm a opção de utilizar apenas uma das ferramentas ou combinar ambas para atingir determinado objetivo na construção de novas iterações.

Figura 7 – *Applet* utilizado na parte 2 da atividade analisada

Fonte: Acervo dos autores

Junto aos *applets*, foram propostas questões básicas para todos os sujeitos, formuladas com o objetivo de promover o processo de escrita dos estudantes acerca da variação da medida da área do fractal.

Uma das características essenciais do método clínico, que o diferencia de outros métodos, consiste na "intervenção sistemática do experimentador diante da atuação do sujeito e como resposta às suas ações ou explicações" (Delval, 2002, p. 68). Com esse propósito, além das questões básicas, o pesquisador procurou apresentar questões complementares, elaboradas em função das respostas dos sujeitos e orientadas pelos objetivos do estudo.

Durante a realização da atividade, os estudantes levantaram dúvidas e questionamentos relacionados às principais propriedades do fractal, desafiados por questionamentos adicionais do pesquisador e pelo dinamismo das construções no GeoGebra, que oferecem diversas possibilidades de exploração. A próxima seção apresenta uma análise dos resultados, considerando esses e outros aspectos relevantes para a compreensão das abstrações envolvidas e de possíveis percursos cognitivos identificados durante as interações.

Análise dos resultados

A atividade selecionada contou com a participação de 9 estudantes. Para se reportar aos participantes nas análises desta investigação, usou-se um número para cada. Após o processo de organização e redução dos dados referentes a essa atividade, selecionamos 6 sujeitos cujas condutas cognitivas foram consideradas instrutivas no contexto do presente estudo. São os sujeitos 1, 2, 4, 5, 7 e 9.

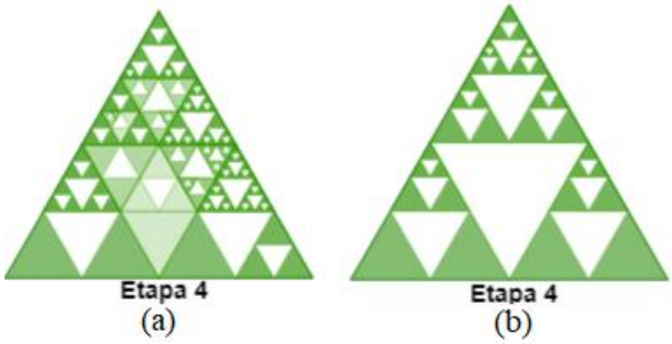
Na primeira parte, os sujeitos iniciaram a atividade movendo o controle deslizante e observando as diferenças entre a construção inicial e a construção final, que corresponde à etapa 3. Ao avançarem para o item B, que envolve o uso da ferramenta "Retirar Triângulo" para construir a etapa 4, foram observadas muitas dificuldades. Nessa fase inicial de predomínio das ações sobre possíveis conceituações que poderiam intervir, as elaborações dos sujeitos frente aos questionamentos do pesquisador foram pautadas em resultados observáveis das suas ações, mais especificamente, em abstrações empíricas.

Progressivamente, os sujeitos passaram a analisar não somente as posições final e inicial do controle deslizante, mas também posições intermediárias e suas transformações correspondentes na construção. Em novas tentativas de

ISSN: 1984-1655

utilização da ferramenta "Retirar Triângulo", os sujeitos aplicaram as transformações de forma mais organizada. A Figura 8, partes (a) e (b), apresenta, respectivamente, as construções dos sujeitos 4 e 7 nesta fase.

Figura 8 – Representação da quarta iteração do Triângulo de Sierpinski pelos sujeitos 4 e 7



Fonte: Acervo dos autores

Embora essas construções não representem a quarta iteração do fractal, já se observam avanços em relação ao momento inicial da atividade. Ao analisar o protocolo de construções, observamos que esses sujeitos reconstituíram com sucesso as iterações 1 e 2 do Triângulo de Sierpinski, mas não tiveram êxito nas iterações 3 e 4, as quais deveriam ser construídas sobre o mesmo triângulo.

A realização da atividade não é simples, uma vez que exige não apenas a leitura dos dados observáveis, mas também uma série de coordenações de ações que os conduzam a reconstituir as etapas anteriores antes de criar a próxima, em um processo iterativo.

Ao mover o controle deslizante, o *applet* exibe apenas o estado final de cada uma das três primeiras iterações do fractal, em vez de mostrar a sequência que leva à construção de cada uma delas. Utilizando a ferramenta que "remove" um triângulo central de outro, os sujeitos compreenderam o resultado dessa ação de forma isolada, como na transição entre a construção inicial e a etapa 1. No

ISSN: 1984-1655

entanto, eles enfrentaram dificuldades em replicar essa ação de maneira ordenada para obter iterações em níveis superiores, como é o caso das transições entre as etapas 2 e 3 e, principalmente, entre as etapas 3 e 4. Sobre as dificuldades de prolongamento das estruturas iterativas, Piaget (1995, p. 161) aponta que "[...] os caracteres de uma transformação são sempre mais difíceis de observar, e, portanto, de abstrair, do que os de estados".

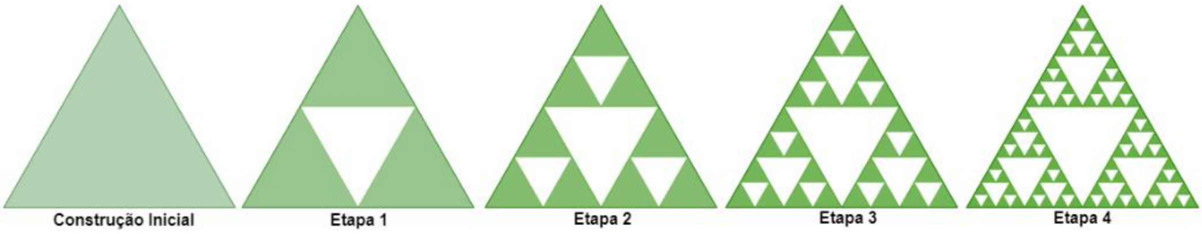
Ainda de acordo com Piaget (1995, p. 161), "[...] o sujeito toma consciência do resultado de seus atos, antes de atingir o mecanismo e o desenrolar exato, porque estes implicam na reconstituição de um processo e aquele numa simples leitura estática". A construção da quarta iteração do Triângulo de Sierpinski pelos participantes demanda a reconstituição da sequência de ações necessárias para criar as iterações anteriores, o que não pode ser realizado apenas através de uma leitura estática.

Dos 9 participantes que realizaram a atividade, 7 a concluíram com êxito, alcançando a quarta iteração do fractal após um processo de exploração e experimentação. Desses, destacamos as falas dos sujeitos 2 e 5. Ao ser questionada pelo pesquisador sobre como procedeu para concluir a atividade, a estudante 2 respondeu: "*Na etapa 1, eu cliquei uma vez sobre o triângulo verde. Depois, como sobraram 3 triângulos verdes menores, eu cliquei 3 vezes, uma vez em cada um. E assim por diante*". O pesquisador pediu então que ela explique quantas vezes clicou para obter a etapa 4. A estudante iniciou a sua fala e hesitou; retornou à construção, desfez uma etapa e repetiu o processo. "*Na etapa 3 eu cliquei 9 vezes, pois tinham sobrado 9 triângulos*". E completa: "*Então é 27. É sempre três vezes a etapa anterior*". Ao clicar uma vez sobre cada um dos 27 triângulos que restam na etapa 3, são gerados 81 triângulos, os quais formam a etapa 4, ou a quarta iteração do Triângulo de Sierpinsk. A contagem do número de triângulos em cada etapa não

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

foi solicitada aos sujeitos, mas consistiu em uma estratégia utilizada pela estudante, cuja construção final é representada na figura 9.

Figura 9 – Construção com êxito da etapa 4 pela estudante 2



Fonte: Acervo dos autores

A estudante não apenas obteve êxito em suas ações, mas também desenvolveu uma compreensão do mecanismo de construção do Triângulo de Sierpinski. Ao desfazer/refazer etapas antes de responder ao pesquisador, ela procurou abstrair as características da transformação, e esse processo vai além da simples análise dos resultados observáveis de suas ações, pois em determinado momento não houve necessidade de retomar as ações para avançar para novas abstrações. A contagem do número de triângulos verdes a cada nova etapa $(3, 9, 27, \ldots)$ e a reconstituição das etapas anteriores com base em um ordenamento resultam das coordenações progressivas das ações do sujeito. São qualidades introduzidas no objeto pelo próprio sujeito e, portanto, abstrações pseudoempíricas.

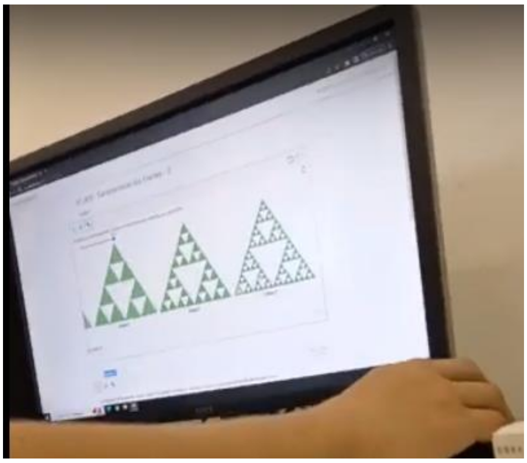
O questionamento do pesquisador sobre o que aconteceria na etapa 4 teve como objetivo observar a conduta da estudante ao introduzir novos conteúdos em uma forma cuja construção estava em progresso. Aqui, destacam-se os dois aspectos da abstração reflexionante: o reflexionamento de um conteúdo e a reflexão, que envolve a reorganização nas estruturas anteriores. A conclusão de que "*É sempre três vezes a etapa anterior*" consiste em uma elaboração da estudante

ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

por abstração reflexionante, resultante de uma série de reflexionamentos e reflexões. Tal conclusão evidencia ainda uma abstração refletida, que consiste na abstração reflexionante com tomada de consciência.

O estudante 5 também é um dos sujeitos que tiveram êxito na construção da quarta iteração após uma série de explorações e experimentações. Durante o acompanhamento das atividades, o professor questionou sobre as suas estratégias. Ele respondeu: "*As partes se encaixam. A etapa anterior está dentro da próxima, só que os triângulos são menores.*". Ao acompanhar o sujeito durante as interações, o pesquisador observou que o estudante utilizou a ferramenta *Ampliar* ou *Reduzir* o *zoom* na janela de visualização. Essa ferramenta pode ser acessada por meio de ícones específicos, ou simplesmente através do botão de rolagem do mouse. A figura 10 apresenta a imagem do *applet* após as interações do estudante, que no momento do registro utilizava a ferramenta *zoom* para explicar sua resposta.

Figura 10 – Sujeito 5 nas suas interações



Fonte: Acervo dos autores

Este estudante não fez referência ao número de triângulos em cada etapa; entretanto, sua conduta durante as explorações e sua resposta ao pesquisador indicam que ele utilizou a autossimilaridade do fractal para construir a próxima etapa. A afirmação de que as partes "se encaixam", em uma análise inicial, poderia ser considerada um ato de abstração empírica; no entanto, o complemento a essa afirmação evidencia abstrações reflexionantes do tipo pseudo-empíricas.

A afirmação "a etapa anterior está dentro da próxima, só que os triângulos são menores" evidencia coordenações de ações e construções anteriores do sujeito. Nesse contexto, o sujeito não analisa uma etapa em sua totalidade, de forma isolada, mas propõe partições de uma etapa a partir da etapa anterior. Além disso, estabelece uma comparação entre os triângulos de uma etapa e da outra, mesmo que não quantifique tais comparações.

Os sujeitos 2 e 5 não somente tiveram êxito em suas ações, como também demonstraram compreensão dos meios que os levaram a isso. As construções observadas na primeira parte da atividade aumentam as possibilidades de assimilação pelos sujeitos, os quais, uma vez desafiados por questionamentos e propostas de interação significativas, podem avançar para outros patamares, com construções decorrentes de uma alternância contínua entre reflexionamentos e reflexões.

Dos 9 sujeitos que realizaram a atividade, foram identificadas evidências de que 5 utilizaram a ferramenta *zoom* nas interações. A transformação da representação figural decorrente da utilização da ferramenta de *zoom* evidenciou características que desafiaram o sujeito em suas explorações, desencadeando abstrações relacionadas a uma das propriedades mais intrigantes dos fractais, que consiste na ideia de complexidade infinita. Na próxima parte da atividade analisada, em diversos momentos, os sujeitos utilizaram a ideia de infinito em suas elaborações, seja verbalmente ou por escrito.

ISSN: 1984-1655

Ao iniciarem a parte 2 da atividade, os estudantes não demonstraram tantas dificuldades comparando-se com o início dos trabalhos na parte 1. A possibilidade de mover os pontos A, B e C do triângulo inicial e a disponibilização da nova ferramenta "Retirar Triângulos" representam novos desafios aos estudantes. A ferramenta de *zoom* foi amplamente utilizada pelos sujeitos em suas ações, com evidências de utilização por parte de 7 dos 9 sujeitos, possibilitando inúmeras explorações. Nessa parte da atividade, o desafio inicial para os participantes era construir as quatro primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski usando o *applet* representado na figura 7. Dos 9 participantes que realizaram a atividade, 6 tiveram êxito.

À medida que os participantes modificam o objeto por meio de suas atividades, são também desafiados a agir sobre si mesmos. O processo inicial de tentativas e erros gradualmente dá lugar a ações mais planejadas e organizadas. Com o enriquecimento das abstrações pseudo-empíricas, os participantes progridem para elaborações mais complexas. De acordo com Becker (2014), as abstrações pseudo-empíricas estão a "meio-caminho" entre as abstrações empíricas e reflexionantes, permitindo "a realização de um jogo altamente eficaz que utiliza simultaneamente as qualidades da abstração empírica e o mecanismo da abstração reflexionante" (Becker, 2014, p. 115).

A transcrição de um diálogo entre o pesquisador e o sujeito 1 durante os trabalhos, mostrada no quadro 1, evidencia elementos considerados instrutivos na presente análise.

Quadro 1 – Diálogo entre o pesquisador e o sujeito 1

Sujeito 1: *Olha aqui sor. Se tu der um zoom vai até o infinito.* [ampliando o *zoom*].
Pesquisador: E como faz para voltar?
Sujeito 1: *Agora vamos voltar*. [reduzindo o *zoom*]
Pesquisador: Como assim, infinito?

Sujeito 1: *Vai até muitos. Muitos*. [continua explorando o *zoom*]
Pesquisador: A ideia de infinito é legal! Explica pra mim.
Sujeito 1: *É que se tu conseguir continuar clicando, pode ir até o infinito.* [Amplia o *zoom* e utiliza a ferramenta "Retirar Triângulo" sucessivamente]
Sujeito 1: *Agora estou tentando voltar. Voltou!* [obtém o *zoom* inicial e visualiza as primeiras iterações]

Fonte: Acervo dos autores

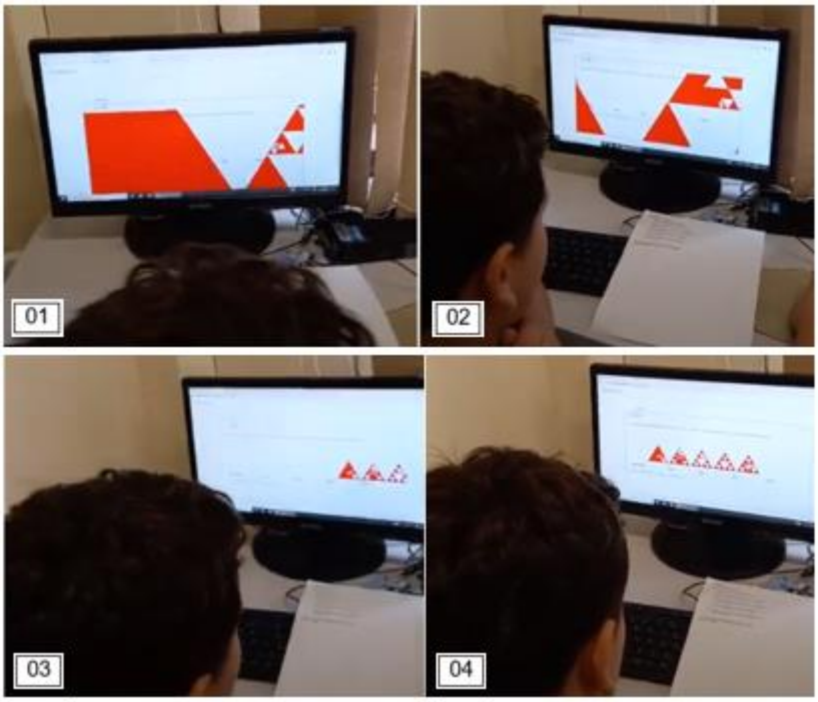
Ao dialogar com o sujeito durante as explorações, o pesquisador não apenas o desafia a refletir sobre o sentido do que está fazendo, mas também oportuniza que ele retome as suas ações e pense nas transformações que estão sendo promovidas no objeto a partir delas. Esse processo pode evidenciar as ideias do sujeito na construção de suas explicações, o que constitui um dos objetivos do método clínico piagetiano.

A análise do protocolo de construção indicou que esse participante usou as ferramentas "Retirar Triângulo" e "Retirar Triângulos" de forma alternada, obtendo sucesso na representação figural. No entanto, a ordem de utilização dessas ferramentas ainda pareceu um tanto aleatória. Durante o diálogo, o participante interagiu com o *applet* usando a ferramenta de *zoom*, buscando coordenar as suas ações para justificar as respostas (Figura 11).

ISSN: 1984-1655

Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Figura 11 – Sequência de *frames* que representa as explorações do sujeito 1 com a ferramenta *zoom*.



Fonte: Acervo dos autores.

As construções do participante ainda apresentaram imprecisões em relação à representação correta das iterações deste fractal, no entanto, a triangulação dos dados em diferentes instrumentos revelou avanços significativos na coordenação progressiva de suas ações. A menção pelo participante ao infinito não corresponde a uma qualidade observável, que pertence ao objeto. Em vez disso, representa uma elaboração do sujeito por meio de abstração reflexionante.

Continuando as suas explorações, o sujeito moveu os pontos A, B e C, e se surpreendeu com os resultados observáveis da sua ação: "*Hum...essa parte eu não sabia*". Uma vez desequilibrado por um novo desafio à assimilação imposto pelo objeto, o sujeito deu continuidade às suas explorações. A figura 12 apresenta uma sequência de *frames* que ilustra este processo de exploração por parte do sujeito.

Figura 12 – Explorações do sujeito 1 com a ferramenta mover

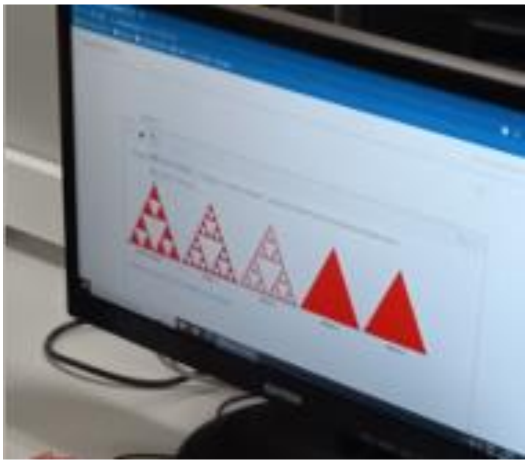
Fonte: Acervo dos autores

Posteriormente, o sujeito revisitou cada um dos triângulos e construiu as quatro primeiras iterações do fractal. Após explorar a construção, ao ser questionado sobre o que aconteceria nos próximos níveis, o sujeito 1 registrou em uma das suas respostas no GeoGebra Tarefas: "*Iria ficar com mais triângulos desenhados*", se referindo aos triângulos remanescentes. Em outra resposta, ao ser questionado sobre o que aconteceria com a soma das áreas dos triângulos remanescentes, ele respondeu: "*a superfície vermelha desaparece cada vez mais*". Quando o pesquisador pediu para que o sujeito explicasse um pouco mais sobre as respostas anteriores, ele parou, pensou por alguns instantes e respondeu: "*É um ciclo infinito de triângulos*". Para essa resposta, o sujeito não recorreu à construção; ao contrário, tentou elaborar sua resposta reconstituindo os passos de construção do fractal mentalmente, no campo da representação.

O estudante não apresentou maiores detalhes em suas explicações, mas em se tratando no desenvolvimento do pensamento matemático, tais abstrações indicam avanços conceituais significativos ao considerarmos o estádio de desenvolvimento dos sujeitos participantes do estudo. Com a possibilidade de transformar os objetos geométricos através das ferramentas do GeoGebra, os sujeitos "começam a aprender como realizar os mesmos tipos de experiências em suas mentes, na ausência do recurso tecnológico" (Basso; Notare, 2015, p. 3).

O participante 9 iniciou a atividade de maneira diferente dos demais. Ele construiu as iterações 1 e 2 no primeiro triângulo exibido pelo *applet*. Nos segundos e terceiros triângulos, identificados como Etapa 1 e Etapa 2, construiu as iterações 3 e 4, respectivamente. Dois triângulos ainda estavam por ser trabalhados. A Figura 13 representa o estágio da construção no momento em que o pesquisador se aproximou do estudante.

Figura 13 – Construção parcial do sujeito 9



Fonte: Acervo dos autores

O quadro 2 apresenta a transcrição do diálogo entre o pesquisador e o estudante nesse momento:

Quadro 2 – Diálogo entre o pesquisador e o sujeito 9

Pesquisador: Quando aumentamos os níveis, o que acontece com a superfície branca?
Sujeito 9: *Vai aparecendo mais áreas brancas, e diminuindo as áreas vermelhas.*
Pesquisador: E quanto retiramos muitos triângulos brancos, o que tu achas que vai acontecer? Daria para continuar a construção?

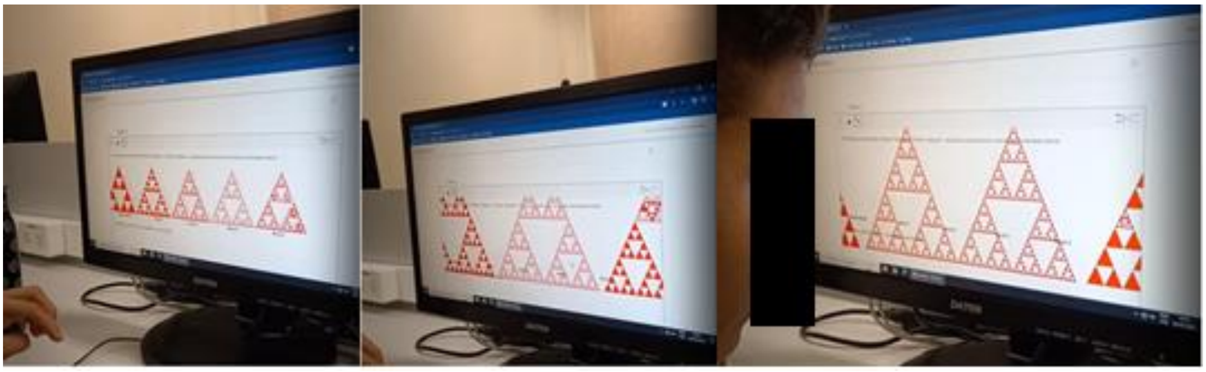
ISSN: 1984-1655
Schème
Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas

Sujeito 9: Olha...depende. Se eu aumentar aqui [aumenta o *zoom*]
Sujeito 9: *Tem mais triângulos vermelhos. Se eu ficar apertando, apertando [...]* [utilizando a ferramenta "Retirar Triângulos" para construir novas iterações]
Sujeito 9: *Seria quase o nível infinito.*
Sujeito 9: *Aqui ó* [aumenta o *zoom* e mostra uma das partes do fractal]

Fonte: Acervo dos autores

O participante continuou a construir novas iterações, fazendo uso da ferramenta de *zoom* do GeoGebra durante suas explorações, conforme ilustrado na sequência de *frames* da Figura 14.

Figura 14 – Explorações do sujeito 9

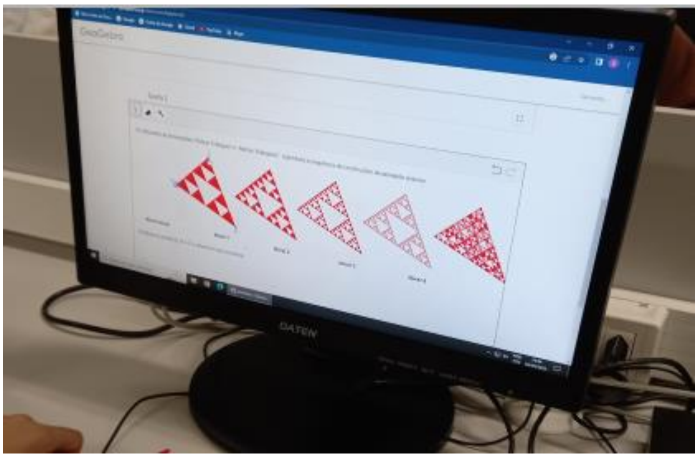


Fonte: Acervo dos autores

Após construir de forma correta as 5 primeiras iterações, passou a explorar o último triângulo da sequência, o qual na ideia inicial seria utilizado para construir a iteração 4 (nível 4 na figura 9). Além da ferramenta *zoom*, utilizou a ferramenta mover para arrastar os pontos A, B e C para diferentes posições no plano, gerando diferentes triângulos, não necessariamente equiláteros.

A figura 15 apresenta o estágio final da construção do sujeito, extraída do GeoGebra Tarefas, com construção incompleta da sexta iteração do fractal, momento que o pesquisador perguntou ao sujeito se ele poderia explicar o que aconteceria nos próximos níveis, sem construí-los.

Figura 15 – Construção final do sujeito 9 na parte 2 da atividade 10



Fonte: Acervo dos autores

O quadro 3 mostra o diálogo entre o pesquisador e o sujeito nesse momento da atividade:

Quadro 3 – Diálogo entre o pesquisador e o sujeito 9

Sujeito 9: *Se eu apertar de novo, aí vai dar um nível infinito. E por mais que eu aumente, aumente, não teria um fim.* [apertar, para o estudante, significa clicar sobre determinado triângulo, com a ferramenta "Retira Triângulo" selecionada]

Pesquisador: E a área dos triângulos brancos? Ou dos vermelhos, o que aconteceria?

Sujeito 9: *Olha, pra mim um dos dois tem um fim.*

Fonte: Acervo dos autores

A ideia de infinito citada pelo estudante agora está relacionada a uma situação aparentemente paradoxal e que, entre outras, está presente na exploração de fractais. O estudante afirmou que "*um dos dois tem um fim*", se referindo às áreas; entretanto, são infinitos níveis. Nas respostas registradas no GeoGebra Tarefas, o estudante escreveu: "*Por mim os níveis são infinitos*", quando questionado se poderíamos inserir novos níveis. Sobre a área do fractal, que corresponde à soma das áreas dos triângulos remanescentes, ele escreveu: "*a superfície vermelha vai desaparecer, fica zero*".

ISSN: 1984-1655

Também, no caso deste estudante, muitas das elaborações ainda estão desprovidas de explicações, mas as abstrações envolvidas não se referem a características observáveis. São o resultado de um processo rico em abstrações pseudo-empíricas, as quais conduzem o sujeito a abstrações reflexionantes propriamente ditas.

Considerações Finais

A questão central abordada neste trabalho envolve a descrição e análise das interações de um grupo de estudantes do Ensino Fundamental com os *applets* desenvolvidos no ambiente GeoGebra. Para tanto, apresentamos uma análise dos dados relativos a uma atividade de exploração do Triângulo de Sierpinski, uma forma fractal com diferentes possibilidades de abordagem que pode ser integrada na construção de diferentes conceitos de Matemática.

Durante as análises, buscamos identificar diferentes condutas cognitivas que emergem nessas interações, relacionando tais condutas ao processo de abstração reflexionante, em suas nuances e especificidades. A interpretação dos resultados nos conduziu a algumas reflexões, sobre as quais passamos a tratar na presente seção.

Além de reconhecer o potencial do GeoGebra como ambiente de Geometria Dinâmica na construção de conceitos de Matemática, o experimento contribuiu para mostrar a importância de uma análise detalhada de como os estudantes interagem com os *applets*, de suas estratégias e de como podem demonstrar seus progressos conceituais durante um processo, e sob diferentes lentes.

Uma vez que se promova a ação, ou melhor, a interação na perspectiva piagetiana, com propostas significativas, os sujeitos passam a pensar não somente sobre o que estão fazendo, mas sobre o próprio pensamento (Notare; Basso, 2012). Neste processo, sujeito e objeto estão em constante construção, o que se evidenciou em diferentes momentos.

Ao utilizar as ferramentas do GeoGebra nas explorações, mesmo sem ter consciência disso, os sujeitos transformavam os objetos geométricos, enriquecendo-os com propriedades introduzidas por suas ações. No entanto, ao agir sobre o objeto, o sujeito também agia sobre si mesmo, reconstruindo estruturas e elaborando conjecturas em diferentes níveis. Dessa forma, de maneira mediata, os sujeitos trilharam o caminho rumo à compreensão das principais propriedades dos fractais.

Uma dessas propriedades é a complexidade infinita, o que significa que, não importa o quanto você amplie ou reduza a imagem, sempre haverá mais detalhes para explorar. Quando utilizaram a ferramenta de *zoom*, os sujeitos encontraram características na representação gráfica que eram difíceis de compreender ou que causaram surpresa devido à sua complexidade. Pareceu-nos que os sujeitos estavam se aproximando da compreensão dessa característica dos fractais ao usar o *zoom*.

Sobre os conceitos de Matemática mobilizados pelos sujeitos na realização da atividade, ainda que caiba uma análise mais aprofundada que inclua as demais atividades relativas ao projeto de pesquisa, identificamos abstrações relacionadas aos conceitos de área, operação de potenciação e proporção. No entanto, acreditamos que uma das principais contribuições do estudo reside propor formas de utilização das tecnologias digitais para desencadear o pensamento matemático, o que certamente traz contribuições amplas que não se restringem a alguns conceitos específicos. Com essa visão, consideramos significativas as elaborações destes sujeitos, mesmo com imprecisões conceituais.

A continuidade dos estudos prevê a análise de outras atividades propostas até então, além de novas fases de coleta de dados, o que nos levará a aprofundar as análises relativas ao processo de abstração reflexionante e a ampliar o escopo do projeto, com estudos referentes à generalização em suas duas grandes formas, definidas por Piaget (1978) como generalização indutiva e generalização construtiva.

Referências

BAIRRAL, Marcelo A.; BARREIRA, João Carlos Fernandes. **Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica.** Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 6, n. 2, p. 46-64, 2017.

BARBOSA, Ruy M. **Descobrindo a geometria fractal - Para a sala de aula.** Grupo Autêntica, 2007. E-book. ISBN 9788551301272. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788551301272/. Acesso em: 10 out. 2023.

BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; NOTARE, Márcia Rodrigues. **Pensar-com tecnologias digitais de matemática dinâmica.** RENOTE: revista novas tecnologias na educação. Porto Alegre, RS. Vol. 13, n. 2 (dez. 2015), p. 1-10, 2015.

BECKER, Fernando. **Abstração pseudo-empírica e reflexionante: significado epistemológico e educacional.** Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Marília, SP. Vol. 6, n. nesp (2014), p. 104-128, 2014.

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento.** Porto Alegre: Artmed
Editora, 2001.

BECKER, Fernando. **Sujeito do conhecimento e ensino de matemática.** Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Marília, SP. Vol. 5, nesp (2013), p. 65-86, 2013.

BORBA, Marcelo de C.; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática Sala de aula e internet em movimento.** [Digite o Local da Editora]: Grupo Autêntica, 2020. E-book. ISBN 9788551306734. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788551306734. Acesso em: 06 set. 2023.

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças.** Artmed, 2002.

DOS SANTOS, Marcelo Antonio et al. **O uso de *applets* do GeoGebra e as Abstrações Reflexionantes: um estudo sobre possíveis desdobramentos na sala de aula.** Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 20, n. 2, p. 43-52, 2022.

FRANCO, Sérgio Roberto Kieling; MACHADO, Diandra Dal Sent. **A ideia de mediação no interacionismo piagetiano: alguns apontamentos.** Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas, v. 12, n. 2, p. 41-64, 2020.

FLICK, Uwe. **Desenho da pesquisa qualitativa.** In: Desenho da pesquisa qualitativa. 2009. p. 164-164.

HEGEDUS, Stephen J.; OTÁLORA, Yenny. **Mathematical strategies and emergence of socially mediated metacognition within a multi-touch Dynamic Geometry Environment.** Educational Studies in Mathematics, v. 112, n. 2, p. 289-307, 2023.

PITTALIS, M., DRIJVERS, P. **Embodied instrumentation in a dynamic geometry environment: eleven-year-old students' dragging schemes.** Educ Stud Math 113, 181–205 (2023). https://doi-org.ez45.periodicos.capes.gov.br/10.1007/s10649-023-10222-3

LEUNG, Allen. **Discernment and reasoning in dynamic geometry environments.** In: Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education. Springer International Publishing, 2015. p. 451-469.

LEUNG, Allen. **Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation.** International Journal of Computers for Mathematical Learning, v. 13, p. 135-157, 2008.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Argumentação e prova matemática com geometria dinâmica.** RENOTE: revista novas tecnologias na educação. Porto Alegre, 2018.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Tecnologia na educação matemática: trilhando o caminho do fazer ao compreender.** RENOTE: revista novas tecnologias na educação. Porto Alegre, 2012.

PEREIRA, Tiago; BORGES, Fábio Alexandre. **A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos.** Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 19, n. 4, p. 563-581, 2017.

PIAGET, J. **Abstração Reflexionante: Relações lógico aritméticas e ordem das relações espaciais.** Trad. Fernando Becker e Petrolina Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas. 1995 [1977]

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOUD, S. A. (2015). **Registro figural no ambiente de geometria dinâmica.** Educação Matemática Pesquisa. N. 5, v. 17, p. 919-941.

SINCLAIR, Nathalie; ROBUTTI, Ornella. **Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry.** In: Third international handbook of mathematics education. New York, NY: Springer New York, 2012. p. 571-596.

XAVIER, Luana Kuister. **Exploração de conceitos geométricos por meio de fractais com o uso do GeoGebra em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental.** Porto Alegre: UFRGS, 2020, 162 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220056. Acesso em: 30 novembro 2023.

Recebido 02/12/2023

Aprovado 08/12/2023