SOBRE O INFINITÉSIMO E O CÁLCULO DIFERENCIAL PARACONSISTENTE DE DA COSTA[1]

Tadeu Fernandes De Carvalho
Centro de Ciências Exatas, Ambientais e de Tecnologias – Faculdade de Matemática
Pontifícia Universidade Católica de Campinas – PUCCAMP
tvcarvalho@directnet.com.br

Itala M. Loffredo D'ottaviano
Grupo de Lógica Teórica e Aplicada
Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência
Departamento de Filosofia
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
itala@cle.unicamp.br

RESUMO

Apresentamos, neste artigo, algumas notas históricas relativas ao conceito de *infinitésimo*, desde as origens do cálculo diferencial e integral de Leibniz e Newton à análise não-standard de Robinson. Introduzimos o *cálculo diferencial paraconsistente* de da Costa e alguns de seus resultados relevantes. Concluímos com um Teorema de Transferência do cálculo diferencial clássico para o cálculo diferencial paraconsistente.

Palavras Chave: Lógica paraconsistente, teoria de conjuntos paraconsistente, infinitésimo, cálculo diferencial paraconsistente, teorema de transferência.

Introdução

Os princípios estabelecidos por Aristóteles para a lógica mantiveram-se aceitos, praticamente sem discussão, até o final do século XIX.

A maior parte da contribuição relevante de Aristóteles para a lógica encontra-se na coleção de trabalhos conhecida como **Organon**, mais especificamente nos **Analytica priora** e no **De interpretatione**.

A lógica aristotélica fundamenta-se em três princípios, conhecidos como três leis básicas do pensamento aristotélico: *princípio da identidade* - todo objeto é idêntico a si mesmo; *princípio da (não-)contradição* – uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; e *princípio do terceiro excluído* – toda proposição é verdadeira ou falsa, não havendo outra possibilidade.

Novos sistemas lógicos, ditos não-clássicos, surgem especialmente a partir do início do século XX, como resultado de investigações sobre a natureza e indiscutibilidade dos princípios aristotélicos (ver (D'Ottaviano, 1990) e (D'Ottaviano; Feitosa, 2003)). Destacam-se entre os principais sistemas heterodoxos de lógicas não-clássicas, alternativos à lógica clássica, os *sistemas paraconsistentes*, cujo fundador é Newton Carneiro Affonso da Costa.

As lógicas paraconsistentes são lógicas que podem ser utilizadas como lógicas subjacentes a teorias inconsistentes e não triviais, como é o caso das chamadas teorias paraconsistentes de conjuntos, criadas por da Costa.

Os artigos de da Costa sobre lógicas paraconsistentes, teorias paraconsistentes de conjuntos e algumas de suas possíveis aplicações, principalmente à matemática e à física, motivaram-nos ao estudo da matemática inconsistente de Mortensen e de trabalhos de Stroyan e Luxemburg.

[1] Este artigo corresponde a parte dos resultados da Tese de Doutorado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, apresentada na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas – IFCH, em junho de 2004.

Carvalho (2004) - *Sobre o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa* –desenvolve o cálculo diferencial paraconsistente esboçado por da Costa em 1996 e introduzido em da Costa (2000). São introduzidas definições dos conceitos básicos do cálculo diferencial, são demonstrados teoremas que generalizam importantes resultados clássicos e apresentadas aplicações desses resultados: uma, de natureza clássica, baseada em problema sugerido por J. Bell, em correspondência pessoal; e a segunda, de natureza paraconsistente, motivada pela "função delta" de Dirac. A partir da introdução do conceito de superestrutura paraconsistente, é demonstrado um Teorema de Transferência do cálculo diferencial clássico para o cálculo diferencial paraconsistente.

Os cálculos paraconsistentes de predicados $C_n^{=}$, $1 \leq n \leq \omega$, foram introduzidos por da Costa em 1963 (ver (da Costa, 1963a)). A teoria de conjuntos CHU_1, aparentemente não trivial, que constitui a teoria de conjuntos subjacente ao cálculo diferencial paraconsistente, foi introduzida por da Costa (1986), tem como lógica subjacente o cálculo de predicados de primeira ordem $C_1^{=}$, e é fundamentada na teoria de conjuntos CHU_0 de Church (Church, 1974), por sua vez baseada na teoria clássica de conjuntos Zermelo-Fraenkel (teoria ZF).

Iniciamos este artigo com considerações históricas sobre a criação e o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, em especial sobre problemas relativos à noção de infinitésimo, intimamente relacionados ao desenvolvimento do cálculo e ao surgimento da análise não-standard e do cálculo diferencial paraconsistente.

Na Seção 2, apresentamos, de forma sucinta, os sistemas paraconsistentes que constituem a lógica e a teoria de conjuntos subjacentes ao cálculo diferencial paraconsistente introduzido neste trabalho, bem como alguns resultados necessários ao desenvolvimento do artigo: a partir da hierarquia de cálculos proposicionais paraconsistentes C_n, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa, e da hierarquia de cálculos de predicados paraconsistentes C_n^{*}, $1 \leq n \leq \omega$, introduzimos o cálculo $C_1^{=}$, da hierarquia de cálculos de predicados paraconsistentes $C_n^{=}$, $1 \leq n \leq \omega$, e a teoria de conjuntos CHU_1.

Na Seção 4, apresentamos as definições e resultados fundamentais relativos ao anel **A** e ao quase-anel $\mathbf{A}^{*}$ dos números hiper-reais, extensões do conjunto dos números reais, e desenvolvemos o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa.

Na última seção, introduzimos os conceitos de superestrutura paraconsistente, de monomorfismo entre superestruturas, e apresentamos um Teorema de Transferência, que nos permite "traduzir" teoremas do cálculo diferencial clássico no cálculo diferencial paraconsistente.

Nossa opção, como da Costa, por $C_1^{=}$ como lógica subjacente para o cálculo diferencial paraconsistente é bastante natural, por ser a lógica subjacente à teoria CHU_1, adotada como teoria de conjuntos subjacente à construção do cálculo diferencial paraconsistente desenvolvido. Isso não significa, no entanto, que não seja possível à adoção de uma outra lógica, ou de outra teoria de conjuntos subjacentes, como mostra Mortensen (1995), Capítulo 5, em que diferentes lógicas são utilizadas em abordagens não-clássicas do cálculo diferencial e integral.

1. Sobre o infinitésimo e o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, a análise não-standard e o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa

A noção de *infinitésimo*, que se relaciona diretamente com as propriedades do *contínuo*[2], remonta à Grécia antiga, por volta do século V a. C. Está presente, por exemplo, na filosofia e na geometria dos Pitagóricos, de Anaxágoras de Clazomenae [499 a. C, 428 a. C], do filósofo atomista Demócrito de Abdera [460 a. C, 370 a. C] e de Aristóteles [384 a. C, 322 a. C]. Mas aparece, de forma mais explícita e relacionada com as propriedades do cálculo, em trabalhos de Eudoxo de Cnido [408 a. C, 355 a. C], Euclides de Alexandria [325 a. C, 265 a. C] e, principalmente, de Archimedes de Siracusa [287 a. C, 212 a. C] (ver (Boyer, 1974) e (Lintz, 1999)).

Eudoxo, com base no lema:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrair uma parte não menor do que sua metade, e do resto se subtrair não menos do que sua metade, e assim se prosseguir, restará ao final, uma grandeza menor do que qualquer grandeza da mesma espécie,

desenvolve seu *método da exaustão*, através do qual mostra ser possível trabalhar de forma finita e precisa no cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

Archimedes, cerca de um século depois, ao utilizá-lo em **O método** (Archimedes, 1950)[3], considerado o seu

[2] Referimo-nos, aqui, ao *contínuo matemático*, embora a noção de infinitésimo, ou quantidade infinitesimal, possa igualmente ser associada ao *contínuo físico* relativo ao espaço, tempo e movimento.

[3] **O método**, uma das mais importantes obras de Archimedes, teve sua descoberta na era moderna cercada de mistérios. Em 1906, em Constantinopla, o filólogo dinamarquês Johan L. Heiberg, convidado a analisar um palimpsesto contendo 174 páginas, descoberto em 1899, no monastério do Santo Sepulcro, em Jerusalém, consegue descobrir, sob inscrições de textos religiosos datadas do século XIII da Era Cristã, transcrições de partes de diversos trabalhos de Archimedes, dentre as quais, da obra **O método**, realizadas por volta do século X. Desaparecido durante a Primeira Guerra Mundial, o livro reaparece por volta de 1930 em Paris, em uma coleção particular, desaparecendo novamente até quase

quarto trabalho (escrito na forma de carta a Eratóstenes), na ordem cronológica presumida do que conhecemos de sua obra, antecipa-se às idéias fundamentais da teoria de limites, diferenciação e integração, que seriam desenvolvidas apenas a partir do final do século XVII.

Os infinitésimos aparecem no tratado **O método**, sem magnitude, uma vez que não são obtidos pela divisão de entes geométricos, e trilham, a partir daí, um longo e acidentado caminho, que inclui extensos períodos até de esquecimento na matemática. Podemos considerar os séculos XVI e XVII como períodos de grande interesse pelos infinitésimos, graças, em parte, aos trabalhos de físicos e astrônomos proeminentes, como o alemão Johannes Kepler [1571, 1630], o italiano Galileu Galilei [1564, 1642], e um de seus mais destacados discípulos - e sucessor na Universidade de Pisa -, Evangelista Torricelli [1608, 1647] (ver (Torricelli, 1644)), que aplicaram, com relativo sucesso e rigor, o método infinitesimal à física e à matemática.

Kepler (1615, p.551-646), utiliza transformações geométricas e métodos infinitesimais no cálculo do volume de inúmeros sólidos de revolução, em particular, no cálculo do volume de tonéis de vinho. Suas falhas conceituais são compensadas pelo pioneirismo de suas idéias.

Galilei (1638) utiliza propriedades dos infinitésimos, inclusive algumas relacionadas com sua *ordem*, no estudo de problemas da mecânica e da dinâmica, como no movimento de projéteis e queda livre de corpos. Um dos resultados obtidos, por exemplo, é que *a área delimitada por uma curva dada pela velocidade de um móvel em função do tempo é a distância percorrida pelo mesmo, no intervalo de tempo considerado*. Em Galileu (ver (Galilei, 1890-1909)) já encontramos a utilização do termo *indivisível*, porém seu uso mais extensivo ocorre com seu discípulo Bonaventura Cavalieri [1598, 1647]. Cavalieri, em (Cavalieri, 1966) (tradução para o italiano da publicação original **Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota**, de 1635, e da edição póstuma, melhorada, de 1653), desenvolve, mesclando o método da exaustão e o método infinitesimal de Kepler, um novo processo para o cálculo de áreas e de volumes. Na edição original, possivelmente pela falta de recursos algébricos para generalizar seus resultados, incorre em falhas grosseiras, que acabam por eclipsar seus aspectos positivos, conforme comentários de Baron (1969, p.123). Motiva-se, no entanto, com as críticas recebidas e aprimora o seu método, que é reapresentado na edição póstuma de 1653. Por essa obra, uma das mais importantes publicações em integração geométrica do século XVII, Cavalieri pode ser considerado um dos mais representativos precursores do cálculo diferencial e integral[4].

Torricelli, que até o início do século XX teve pouco de sua importante obra publicada, interpreta, com clareza, em (Torricelli, 1644), os conceitos de derivada e de integral, elucidando aspectos obscuros da obra de Cavalieri.

Podemos destacar ainda, entre os precursores do cálculo diferencial e integral, René Descartes [1596, 1650], Pierre Simon de Fermat [1601, 1655] e John Wallis [1616, 1703] (ver (Boyer, 1974) e (Lintz, 1999)).

Wallis, o mais eminente matemático inglês anterior a Isaac Newton, em 1655, aritmetiza, num certo sentido, os indivisíveis de Cavalieri (ver (Wallis, 1693) e (Baron, 1969)), substituindo as razões geométricas de Cavalieri por somas de séries de potências inteiras de números naturais; Fermat, em (Fermat, 1679, volume 2)[5] (ver também (Fermat, 1891-1922)), introduz a representação gráfica de funções e estuda problemas de máximos e mínimos e de tangência; e Descartes, em **La géométrie** (ver (Descartes, 1686)) - tratado que integra, praticamente como anexo, a obra (Descartes, 1637)[6] -, cria a *geometria analítica* e estuda, algebricamente, propriedades de funções, com o auxílio do cálculo.

Mas a paternidade, propriamente, do cálculo, é dividida entre Isaac Newton [1642, 1727] e Gottfried Wilhelm Leibniz [1646, 1716].

Newton foi discípulo e sucessor de Barrow (ver (Barrow, 1670)) em sua cátedra na Universidade de Cambridge. Motivado em suas pesquisas, na física e na matemática, pela física de Aristóteles e pelo método axiomático de Eu-

---

o final dos anos 90. Sabe-se hoje que foi analisado por Constantine von Tischendorf, na biblioteca da casa Metochion, da Igreja do Santo Sepulcro, em 1846. Curiosamente, após sua morte, entre fragmentos de manuscritos integrantes de seu espólio vendidos à biblioteca da Universidade de Cambridge, encontrava-se uma folha do palimpsesto que examinara em 1846, e que, analisada por Nigel Wilson, do Lincoln College – Oxford em 1983, viria a ser confirmada como parte do palimpsesto analisado por Heiberg. Levado a leilão pela Casa Christie's em Nova York, em 29 de outubro de 1998, após tão somente cinco minutos, o palimpsesto é arrematado por dois milhões de dólares (para a insatisfação da Igreja Ortodoxa Grega de Jerusalém, que teve seu pedido de embargo do leilão rejeitado pela Corte de Nova York). Com a promessa de servir à comunidade científica após o período de tratamento ao qual deveria ser submetido, que ocorreria sob a chancela do Rochester Institute of Technology, ou da John Hopkins University, é posto sob os cuidados da *The Valters Art Gallery*, de Baltimore.

(Veja http://www.thewalters.org/archimedes/frame.html - consulta realizada em dezembro/2003).

[4] Baron (1969) apresenta uma comparação entre o método de integração com recursos geométricos de Cavalieri e a integração clássica.

[5] Obra póstuma que reúne os manuscritos de Fermat, consistindo de dois volumes, editada por seu filho mais velho, Samuel de Fermat e concluída em 1679. O segundo volume contém, entre outros tratados importantes, **De maximis et minimis**, que trata, algebricamente, de problemas de máximos e mínimos.

[6] **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences**. Plus **La dioptrique, Les météores** et **La géométrie.**

clides, foi também influenciado pelos trabalhos de Wallis, particularmente por Wallis (1693). Seus trabalhos mais relevantes para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, na ordem de publicação, são **Philosophiae naturalis principia mathematica** (1687), **Optics** (1704), **Universal aritmethic** (1707), **Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias** (1711), **Methodus differentialis** (1711), e **Methodus fluxionum et serierum infinitarum** (1736) (ver (Newton, 1671, 1687, 1711 e 1967-1981)).

Alguns de seus trabalhos são frutos da compilação de manuscritos antigos, que relutara em publicar assim que os produzira, como **Optics** (1704), escrito originalmente em inglês, que inclui, como apêndices, os tratados *Cubic curves*, *Quadrature and rectification of curves by the use of infinite series* e *Method of fluxiones*. Neste último, *Method of fluxiones*, são introduzidas as entidades denominadas *fluxões* e *fluentes*.

Outro exemplo é **Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias** (1711), uma compilação de vários tratados, dos quais, para o cálculo diferencial e integral, o mais importante é **De analysi per æquationes numero terminorum infinitas**. Neste, Newton introduz a noção de *momento* de um *fluente*[7].

Newton introduz, através dessas entidades, dois tipos clássicos de problemas do cálculo. O primeiro deles equivale a encontrar a fluxão associada a fluentes dados, a partir de relações conhecidas entre os mesmos, o que corresponde ao processo de *diferenciação* do cálculo usual. O segundo, um processo inverso do primeiro, equivale à determinação da relação entre as fluxões de dois fluentes, dada a equação que traduz a relação existente entre tais fluentes, o que corresponde ao processo de integração do cálculo usual.

Newton esperava, com o uso das fluxões e dos fluentes, dar mais consistência ao seu método infinitesimal, no que não foi totalmente bem sucedido. De fato, não conseguiria justificar satisfatoriamente o desaparecimento, em operações com *momentos* dos *fluentes*, de certas quantidades, ou incrementos, tacitamente considerados desprezíveis.

Vejamos um exemplo de uso desses conceitos por Newton.

Pretendendo relacionar a curva dada por $z = ax^m$ com a área delimitada pela mesma, e adotando para x o momento **o**, Newton, através de séries infinitas, obtém:

$$z + \mathbf{o}y = ax^m + am\,x^{m-1}\mathbf{o} + \frac{am(m-1)}{2!}x^{m-2}\mathbf{o}^2 + \cdots .$$

Sendo $z = ax^m$, **o** não nulo, e assumindo que as potências de **o** maiores ou iguais a 2 podem ser desprezadas, obtém, operando convenientemente, $y = amx^{m-1}$. Mas o desaparecimento das potências de **o** maiores do que 2 não é adequadamente justificado.

Através do método similar dos fluentes e fluxões, em que, de forma análoga ao caso acima, há "acréscimos evanescentes" dos fluentes x, Newton obtém, a partir de $z + o\dot{y} = a(x + o\dot{x})^m$, o resultado $\dot{y} = amx^{m-1}\dot{x}$, ou, na linguagem que seria desenvolvida por Leibniz,

$$\frac{dy}{dt} = amx^{m-1}\frac{dx}{dt},$$

de onde, determinando a razão entre $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$, obtém o equivalente a $\frac{dy}{dx}$.

Paralela e independentemente de Newton, Leibniz, por volta de 1673, em Paris, motivado por trabalhos de Descartes relativos à geometria analítica, e, principalmente, de Pascal, relativos ao método infinitesimal, ensaia os primeiros passos rumo à criação e formalização do cálculo.

Incentivado por Huygens, a quem apresenta suas primeiras descobertas, recorre a trabalhos de Nicholas Mercator [1620, 1687], John Wallis [1616, 1703], James Gregory [1638, 1675] e Henry Oldenburg [1618, 1677] para aprofundar seus conhecimentos matemáticos.

Através de Oldenburg, um dos matemáticos com os quais manteve correspondência, Leibniz, em 1676, viria a se comunicar com Isaac Newton - o que, conforme Baron (1969), seria de grande significado matemático e se incorporaria às controvérsias envolvendo seus nomes, acerca da paternidade do cálculo, pelos próximos 250 anos.

---

[7] No *método das fluxões*, as quantidades infinitesimais são trabalhadas cinematicamente, de tal modo que as variações infinitesimais da variável *tempo* tornam-se parte do processo que gera magnitudes geométricas. As quantidades variáveis x recebem o nome de *fluentes*, e o conceito de *derivada* é obtido a partir da noção de *fluxão* $\dot{x}$ *do fluente* x: $\dot{x}$ é a fluxão do fluente x; $\ddot{x}$ é a fluxão do fluente $\dot{x}$, etc, enquanto que inversamente, $\dot{\overline{x}}$ é o fluente do qual x é a fluxão. O *momento* de um fluente x é definido como o acréscimo ocorrido em x em um período indefinidamente pequeno **(o)** de tempo, e denotado por $\mathbf{o}\dot{x}$.

Em **Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus,** Leibniz (1684) (ver (Leibniz, 1983)), antecipando-se em cerca de três anos à publicação dos *Principia Mathematica* de Newton, sistematiza o cálculo diferencial, introduzindo a notação básica, que seria adotada em definitivo, como, por exemplo, **dx** para expressar a diferencial de x.

Em **De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum,** Leibniz (1686) (ver (Leibniz, 1983)), sistematiza o cálculo integral, estabelecendo a notação básica definitiva para o mesmo, como a notação $\int x$, depois modificada para $\int x\,dx$, da integração usual.

Dentre as diferenças fundamentais que podemos observar nos trabalhos de Newton e de Leibniz, destaca-se o caráter atribuído aos infinitésimos.

Newton utilizava os incrementos infinitesimais no cálculo diferencial apelando para propriedades da dinâmica. Por valer-se da eliminação de diferenciais de ordens superiores sem justificativa plausível, viria a ser duramente criticado, em especial pelo bispo anglicano George Berkeley [1685, 1753].

Berkeley (1734) (**The analyst**), mesmo não sendo a obra que concentra as discussões mais profundas sobre as inconsistências do método infinitesimal de Newton, é a mais citada, e, vista hoje com certa indulgência, mostra ter bem mais a oferecer do que a célebre caracterização dos infinitésimos como *ghosts of departed quantities*. A citação abaixo, que corresponde à íntegra do Item VI de **The analyst 2002** - edição eletrônica de David R. Wilkins (Universidade de Dublin) -, representa bem a tônica das críticas de Berkeley[8].

> VI. And yet in the *calculus differentialis*, which Method serves to all the same Intents and Ends with that of Fluxions, our modern Analysts are not content to consider only the Differences of finite Quantities: they also consider the Differences of those Differences, and the Differences of the Differences of the first Differences. And so on *ad infinitum*. That is, they consider Quantities infinitely less than the least discernible Quantity; and others infinitely less than those infinitely small ones; and still others infinitely less than the preceding infinitesimals, and so on without end or limit. Insomuch that we are to admit an infinite succession of infinitesimals, each infinitely less than the foregoing, and infinitely greater than the following. As there are first, second, third, fourth, fifth &c. Fluxions, so there are Differences, first, second, third, fourth, &c. in an infinite Progression towards nothing, which you still approach and never arrive at. And (which is most strange) although you should take a Million of Millions to the least given Quantity, it shall be never the bigger. For this is one of the modest *postulata* of our modern Mathematicians, and it is a corner-stone or Ground-work of their Speculations.

Publicado **The analyst**, não tardou para que simpatizantes da nova análise saíssem em defesa de Newton e de suas idéias, como James Jurin [1684, 1750], com (Jurin, 1734) (**Geometry no friend to infidelity...**) e (Jurin, 1735) (**The minute mathematician...**), e Benjamin Robbins [1707, 1751], com (Robins, 1735) (**A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios**).

As críticas, por outro lado, não impediam a divulgação dos trabalhos de Newton e de Leibniz. Os matemáticos suiços Jacques Bernoulli [1654, 1705] e Jean Bernoulli [1667, 1748], irmãos, que mantiveram assídua correspondência com Leibniz[9], foram os seus primeiros divulgadores (ver (Bernoulli, 1744)). Jean foi professor do Marquês Guillaume F. A. de l'Hospital [1661, 1704], entre 1690 e 1692, a quem teria cedido, por via de um obscuro acordo, descobertas que seriam usadas na redação do primeiro livro sobre o cálculo infinitesimal, de de l'Hospital (1696) (**Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes**). Apesar da pendência sobre a produção intelectual, a realidade é que de l'Hospital (1696) dá o melhor tratamento, até então, ao caráter inconsistente das quantidades infinitesimais. Isto se revela na axiomatização utilizada por l'Hospital, da qual destacamos as definições e postulados seguintes.

Definições

- *Quantidades variáveis são aquelas que aumentam ou diminuem continuamente, quantidades constantes são as que permanecem fixas enquanto as outras variam.*

- *A porção infinitamente pequena segundo a qual uma quantidade variável continuamente aumenta ou diminui é chamada diferencial.*

Postulados

- *Pode-se tomar, indiferentemente, qualquer uma de duas quantidades que diferem entre si por uma quantidade infinitamente pequena.*

- *Uma linha curva pode ser considerada como uma coleção de infinitos segmentos, todos de comprimento infinitesimal, ou seja, pode ser aproximada por uma linha poligonal com quantidade infinita de lados, todos de comprimento infinitesimal.*

[8] Respeitamos, nessa citação, a grafia da fonte consultada.

[9] A denominação *cálculo integral*, sugerida por Jacques Bernoulli, foi acatada por Leibniz.

Contornando mais adequadamente o problema das inconsistências do infinitésimo, a formulação de de l'Hospital deixa clara a relação que existe entre a equação da reta tangente a uma curva dada por y = f(x), num de seus pontos, e os incrementos infinitesimais considerados (dy e dx, segundo a notação introduzida por Leibniz).

Mas isso não seria suficiente para garantir a adequação dos infinitésimos como base segura para o cálculo diferencial e integral. É o que mostram matemáticos e filósofos da Academia Real de Ciências de Paris, cujas opiniões divergentes sobre o tema dariam início a um longo ciclo de discussões entre adeptos e contrários à nova teoria matemática de Newton e Leibniz. Destacam-se entre os seus simpatizantes, Pierre Varignon [1654, 1722] e Joseph Saurin [1659, 1737], e entre seus opositores, Michel Rolle [1652, 1719]. Foram estes os protagonistas dos maiores debates sobre o cálculo na Academia Real de Ciências de Paris, entre os anos de 1700 e 1706.

Varignon, por acreditar na existência real dos infinitésimos - ao que parece crendo ser esta também uma convicção de Leibniz -, apresentava uma defesa frágil contra os argumentos de Rolle, nos debates que travaram entre 1700 e 1701 (ver (Pin, 1987) e (Joven, 1997)).

Leibniz, manifestando-se junto à Academia de Paris, depois de um período um tanto longo de silêncio, declara sua descrença quanto à *extensão material dos infinitésimos*, ao considerá-los *ficções úteis*, capazes de justificar propriedades apenas de objetos com existência real. Isso desagrada bastante os adeptos de suas idéias que, como Varignon, nutriam a crença na existência real dos infinitésimos. Os debates prosseguem, então, entre 1701 e 1706, envolvendo mais diretamente Saurin e Rolle, terminando apenas após a ação conciliatória de uma comissão especialmente criada para tal fim. Rolle e seus partidários saem satisfeitos da contenda, considerando que não havia justificativa rigorosa para a existência dos infinitésimos.

Formalmente, entretanto, nada chegou a ser apresentado que justificasse que o método infinitesimal não funcionava bem na prática, razão suficiente para que Leibniz e seus seguidores não se considerassem derrotados.

Joven (1997) comenta as discussões entre Rolle e Varignon, e apresenta respostas de Leibniz a ataques contra o que se considerava falta de *rigor* e *novidade* no trato com o infinito e com os infinitésimos e suas ordens.

Do mesmo modo, Pin (1987) analisa as críticas históricas ao método das fluxões de Newton e, especialmente, às idéias de Leibniz, concluindo que a redenção deste último vem, de certo modo, através de Abraham Robinson, em sua análise não standard:

> El Análisis no-standard viene a otorgar razón a la intuición de Leibniz, a legitimar su instalación en la aporía y, al tiempo, redimile de ella, a procurar um modelo en el que dos magnitudes que difieren por una magnitud infinitamente pequena son - en el registro al menos, que interessaba a Leibniz - equiparables entre sí, sin que ello excluya a tal diferencia del concepto proprio de magnitud (p. 101).

Tendo o cálculo diferencial e integral sobrevivido às críticas e ataques iniciais, restava a tarefa de consolidá-lo, o que significava estabelecer princípios claros e rigorosos para justificar a existência e propriedades dos infinitésimos, sobre os quais fora edificado. Mas isso não seria conseguido, pelo menos no prazo desejado pelos matemáticos do século XVIII. Já com a teoria de limites despontando no horizonte matemático, Augustin-Louis Cauchy [1789, 1857] faria, sem sucesso, uma das últimas tentativas da época para conseguir esse intento, tratando os infinitésimos não mais como quantidades fixas, mas como variáveis tendendo a um limite, particularmente a zero. Concentrando-se, então, na emergente teoria de limites, Cauchy, em (Cauchy, 1821) e (Cauchy, 1826/1829), introduz importantes resultados sobre continuidade e convergência de funções, bem como sobre séries, diferenciação e integração, tornando-se, com isso, precursor do cálculo diferencial e integral moderno.

Mas os contornos definitivos desse cálculo seriam traçados por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass [1815, 1897], com sua aritmetização, através da qual problemas remanescentes dos trabalhos de Cauchy seriam sanados. Em particular, a Weierstrass são creditadas a definição rigorosa de limite através dos ε's e δ's, e as correspondentes definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins. A publicação de sua extensa obra, pela qual é considerado o pai da moderna análise, só é iniciada, no entanto, nos últimos anos de sua vida, mais precisamente em 1894. Entre os poucos artigos publicados em vida, destaca-se Weierstrass (1854), no qual introduz a teoria de *funções abelianas*. Foi através de cursos, basicamente, como os ministrados na Universidade de Berlim, nos períodos de 1859-1860 (*Introdução à análise*), e 1860-1861 (*Cálculo integral*), que divulgou grande parte de seus resultados inéditos sobre séries, funções periódicas, funções elípticas, funções abelianas, cálculo de variações, etc. Suas obras completas são editadas entre 1894 e 1927 (Weierstrass, 1894-1927), com uma reedição em 1967.

Muitos outros grandes matemáticos, além dos anteriormente citados, haviam colaborado, e outros colaborariam ainda, de forma significativa, na construção, aperfeiçoamento e consolidação do cálculo diferencial e integral com base na teoria de limites, como Leonhard Euler [1707, 1783], Jean L. R. d'Alembert [1717, 1783], Carl Friedrich Gauss [1777, 1855], Bernard Placidus J. N. Bolzano [1781, 1848], Augustus De Morgan [1806, 1871], George Boole [1815, 1864], Leopold Kronecker [1823, 1891], Georg F. B. Riemann [1826, 1866], Julius W. R. Dedekind [1831, 1916], Georg Cantor [1845, 1918] e David Hilbert [1862, 1943], entre outros. Destacamos, entre estes, Cantor, com sua teoria do infinito e resultados sobre números ordinais e cardinais, indispensáveis tanto para a lógica quanto para a matemática contemporâneas (ver (Bochenski, 1951 e 1961) e (Boyer, 1974)).

Abordagens clássicas bastante interesssantes do cálculo diferencial e integral, com o uso de infinitésimos, po-

dem ser vistas em (Keisler, 1976) (**Elementary calculus**: an infinitesimal approach) e (Bell, 1998) (**A primer of infinitesimal analysis**).

Porém, o retorno - definitivo, ao que parece -, dos infinitésimos ao cenário da matemática, dá-se com Abraham Robinson [1918, 1974], que em (Robinson, 1996) (reedição revisada da primeira edição publicada em 1966) apresenta uma nova teoria para a análise matemática, baseada nos infinitésimos e com o uso da teoria de modelos, à qual denomina *análise não-standard*. Esboçada em 1960, teve suas idéias iniciais apresentadas, em novembro do mesmo ano, em seminário realizado na Universidade de Princeton, Estados Unidos e, depois, em janeiro de 1961, no encontro anual da *Association for Symbolic Logic*, quando foi, então, publicada nos *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam*, em 1961 (ver (Robinson, 1961)), sob o título *Non-Standard Analysis*. Tendo sido editada como livro em 1966, foi revisada por Robinson em 1973, e teve sua segunda edição lançada em 1974 - versão que é reeditada em 1996 (ver (Robinson, 1996)).

O tratamento dispensado por Robinson às quantidades infinitesimais reflete de forma precisa, segundo Stroyan e Luxemburg (1976), as idéias originais de Leibniz.

A análise não standard, por ser construída sobre uma extensão do conjunto dos números reais, contendo elementos infinitesimais e elementos infinitos, pode ser considerada uma extensão da análise clássica.

Numa perspectiva distinta da de Robinson, da Costa propõe um cálculo diferencial paraconsistente, como uma das várias teorias inconsistentes, mas não-triviais, que podem ser desenvolvidas com o uso da lógica paraconsistente e da teoria paraconsistente de conjuntos, satisfazendo o assim denominado *Princípio de l'Hospital* (ver (da Costa, 2000)):

> *On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l´autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou dim inueé que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même...*[10]

Os trabalhos de Robinson e de da Costa põem em evidência a importância de se estabelecer, em bases lógicas e conjuntistas rigorosas, a linguagem sobre a qual é desenvolvida a análise, com o uso de infinitésimos. A construção de uma análise que tenha subjacentes, como no caso de da Costa, uma lógica e uma teoria de conjuntos paraconsistentes, exige ainda mais profundos cuidados.

Face a tais considerações, parece-nos conveniente a inserção de alguns fatos históricos relativos ao desenvolvimento da lógica e à criação da teoria de conjuntos e das lógicas não-clássicas.

A lógica moderna inicia-se no século XVII, com Leibniz (ver (Leibniz, 1966), (Leibniz, 1983), (Couturat, 1903), (D'Ottaviano, 1992) e (D'Ottaviano; Feitosa, 2003)).

Se os trabalhos de Leibniz não tivessem permanecido quase desconhecidos até o início do século XX, Leibniz teria sido, também, ainda no século XVII, um dos responsáveis diretos pelo desenvolvimento da lógica contemporânea, que ocorreu a partir do início do século XX.

De acordo com da Costa (1992), o século XIX foi um dos períodos áureos da matemática, e muito influenciou a cultura e o pensamento em geral do século XX, tendo contribuído, direta ou indiretamente, para o surgimento da lógica matemática e, principalmente, das lógicas não-clássicas.

Os passos essenciais para a introdução do método logístico e da lógica matemática foram dados por Friedrich L. G. Frege [1848, 1925] - o verdadeiro fundador da lógica moderna -, com (Frege, 1977) (**Begriffsschrift**, publicado originalmente em 1879), juntamente com Bertrand Russell [1872, 1970] e Alfred N. Whitehead [1861, 1947], com (Russell, 1908) (**Mathematical logic as based on the theory of types**) e (Whitehead; Russell 1910-1913) (**Principia mathematica**).

Seus trabalhos, juntamente com os trabalhos de Hugh McColl [1837, 1909], Jan Lukasiewicz [1878, 1956], Nicolaj A. Vasiliev [1880, 1940], Luitzen E. J. Brouwer [1881, 1966], Alfred Tarski [1902, 1983], Stanislaw Jaskowski [1906, 1965], Kurt Gödel [1906, 1978], e, bem mais recentemente, de Newton Carneiro Affonso da Costa, foram fundamentais para que se alterasse o panorama da lógica e da matemática no século XX, com a formalização da lógica clássica e o advento e multiplicação das lógicas não-clássicas.

Frege, em **Begriffsschrift**, introduz os princípios que iriam delinear a doutrina logicista, que procura reduzir a aritmética à lógica. Nesse trabalho, Frege apresenta, pela primeira vez, o cálculo proposicional, na forma lógica moderna. No entanto, se consegue alcançar com sua linguagem, apoiada essencialmente em elementos da lógica clássica, o rigor que faltava a Cantor, falha na concepção de alguns princípios, como na do *princípio da compreensão* (do qual trataremos na Seção 2), que implicava uma importante inconsistência, descoberta por Russell, e conhecida como *Paradoxo de Russell* (ver (D'Ottaviano; Feitosa, 2003)).

Com os trabalhos de Frege, Cantor e Russell, principalmente, desencadeia-se a célebre *crise dos paradoxos*, entre o final do século XIX e o início do século XX, que leva os matemáticos a se conscientizarem sobre a necessidade de uma revisão cuidadosa dos fundamentos da matemática.

[10] Simplificadamente: "duas quantidades finitas que diferem por uma quantidade infinitamente pequena, são iguais".

Russell e Whitehead, com **Principia mathematica**, consolidam a posição da corrente *logicista* - e formalizam, pela primeira vez, a lógica clássica, como proposta de solução para a chamada *crise dos fundamentos da matemática*, com enfoques distintos da corrente *formalista* de Hilbert e da corrente *intuicionista* de Brouwer.

A formalização da teoria de conjuntos de Cantor, com os trabalhos de Zermelo, Skolem, Fraenkel, von Neumann e Gödel, entre outros, também contribuiu fortemente para os fundamentos da matemática, via lógica clássica.

Alguns filósofos e matemáticos, entretanto, buscaram soluções fora do contexto clássico.

Lukasiewicz, em (Lukasiewicz, 1910) (**O Zasadzie sprzecznosci u Arystotelesa: studium krytyczne**)[11] e no artigo *Über der satz von widerspruch bei Aristoteles* (1910), discute sobre a posição central do princípio da (não-)contradição na lógica e discorre sobre a conveniência de uma revisão das leis básicas da lógica aristotélica (ver (LeBlanc, 2002)). Introduz, posteriormente, em 1920, um cálculo proposicional trivalente (L_3), que é generalizado para cálculos com uma quantidade finita qualquer de valores de verdade e, em 1922, para cálculos proposicionais com quantidades infinitas de valores de verdade (ver (Lukasiewicz; Tarski, 1930) e (Borkowski, 1970)).

Jaskowski, discípulo de Lukasiewicz, motivado por problemas diversos relativos a contradições, especialmente os concernentes às "convincing reasoning which nevertheless yield two contradictory conclusions", constrói o primeiro sistema de lógica paraconsistente (D2) em (Jaskowski, 1948) e (Jaskowski, 1949), restrito, porém, ao caso proposicional (ver (Jaskowski, 1969)).

O sistema D_2 de Jaskowski é conhecido como *lógica discussiva* ou *lógica discursiva* (ver (D'Ottavianno, 1992)).

O brasileiro da Costa, porém, é considerado o verdadeiro fundador das lógicas paraconsistentes, assim como das teorias paraconsistentes de conjuntos. Arruda (1980), da Costa e Marconi (1989), D'Ottaviano (1990 e 1992), D'Ottaviano e Epstein (1990), da Costa (1992), Carnielli (1992 e 2000), Carnielli e Marcos (2002) e Pizzi (1992), constituem referências importantes que abordam, sob variados enfoques, o processo de criação e formalização das lógicas não-clássicas – é dada especial atenção à lógica discussiva de Jaskowski e às teorias paraconsistentes introduzidas em (da Costa, 1963a, 1963b e 1974).

Se T é uma teoria (dedutiva) e L é uma lógica subjacente a T, cuja linguagem possui um símbolo de negação "$\neg$", dizemos que T é *consistente* se não apresenta como teoremas duas fórmulas da linguagem de L tais que uma seja a negação da outra, isto é, se não possui teoremas contraditórios. Caso contrário, T é *inconsistente*, isto é, encerra teoremas do tipo A e $\neg$A.

Portanto, se uma teoria T é inconsistente e em sua lógica subjacente são válidas as propriedades usuais da conjunção, então em T ocorrem contradições $A \wedge \neg A$ como teoremas, e reciprocamente.

Uma teoria T é *trivial* (ou *supercompleta*) se toda fórmula (ou toda sentença) de sua linguagem é teorema; caso contrário, T diz-se *não-trivial* (ou *não- supercompleta*).

Uma lógica é *paraconsistente* se pode servir de base para teorias inconsistentes, porém não triviais, que são ditas *teorias paraconsistentes*.

Nas lógicas paraconsistentes, o escopo do princípio da (não-)contradição é, num certo sentido, restrito. Podemos dizer, como da Costa e Marconi (1989), que se em um sistema lógico a força desse princípio é restrita, então o sistema pertence à classe das lógicas paraconsistentes. De fato, nas lógicas paraconsistentes, o princípio da (não-)contradição não é necessariamente inválido, mas em toda lógica paraconsistente, de uma fórmula e sua negação não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula.

As hierarquias de cálculos proposicionais paraconsistentes C_n, de cálculos de predicados paraconsistentes $C_n^?$ e de cálculos de predicados paraconsistentes com igualdade $C_n^=$ de da Costa, $1 \leq n \leq \omega$, foram introduzidas em (da Costa, 1963a) (ver (da Costa, 1974 e 1993)). Esses sistemas são apresentados em uma série de artigos, a partir de 1963 (ver (Arruda, 1980 e 1989), (da Costa; Marconi, 1989) e (D'Ottaviano, 1990)).

Trabalhos de lógicos, matemáticos e filósofos de vários países, entre eles discípulos e colaboradores de da Costa - como Arruda, Chuaqui, Raggio e Sette -, e o crescente interesse da comunidade científica internacional pelas lógicas não-clássicas, notadamente pelas lógicas paraconsistentes, têm contribuído para sua consolidação, bem como para o advento de novas teorias baseadas nessas lógicas - como cálculos diferenciais paraconsistentes -, e a expansão de seus campos de aplicação.

2. Os Cálculos Paraconsistentes C_n, C_n^* e $C_n^=$

[11] Sobre o princípio da contradição de Aristóteles: estudo crítico (1910).

Nesta seção, apresentamos as hierarquias de cálculos paraconsistentes de da Costa e algumas de suas propriedades, necessárias à introdução do cálculo diferencial paraconsistente.

As hierarquias de cálculos proposicionais paraconsistentes C_n, de cálculos de predicados paraconsistentes C_n^* e de cálculos de predicados paraconsistentes com igualdade $C_n^=$ de da Costa, $1 \leq n \leq \omega$, foram introduzidas em (da Costa, 1963a) (ver (da Costa, 1964a, 1964b, 1974, 1989, 1993 e 1996)). Esses sistemas são apresentados em uma série de artigos, a partir de 1963 (ver (Arruda, 1980 e 1989), (da Costa; Marconi, 1989) e (D'Ottaviano, 1990)).

2.1. O sistema proposicional C_1 e a hierarquia C_n, $1 \leq n \leq \omega$

A *linguagem* do cálculo proposicional paraconsistente C_1 de da Costa (ver (da Costa, 1963a, 1963b, 1974 e 1993)), que denotaremos por $\mathcal{L}$, tem como símbolos primitivos variáveis proposicionais (uma família enumerável) e conectivos lógicos para a negação ($\neg$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), condicional ($\rightarrow$) e símbolos auxiliares "(" e ")".

As noções sintáticas de *fórmula*, *demonstração*, *teorema*, *dedução*, etc, assim como as convenções e notações são as usuais, como em Kleene (1952).

Usaremos as letras maiúsculas do alfabeto latino A, B, C,... (com ou sem índices numéricos inferiores) como metavariáveis sobre fórmulas de $\mathcal{L}$.

Os operadores $\circ$, $\neg^*$, n, (n), $\neg^{(n)}$ e $\leftrightarrow$ são introduzidos por definição.

Definição 2.1. $A^\circ =_{def} \neg(A \wedge \neg A)$.

Definição 2.2. $\neg^* A =_{def} \neg A \wedge A^\circ$.

Definição 2.3. $A^n =_{def} A^{\circ\circ\ldots\circ}$ (n aplicações reiteradas do operador "**o**" à fórmula A), $n \geq 1$.

Definição 2.4. $A^{(n)} =_{def} A^1 \wedge \ldots \wedge A^n$, $n \geq 1$.

Definição 2.5. $\neg^{(n)} A =_{def} \neg A \wedge A^{(n)}$, $n \geq 1$.

Definição 2.6. $A \leftrightarrow B =_{def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

De acordo com as Definições 2.3 e 2.4, temos que A° coincide com A^1 e com $A^{(1)}$.

A negação Ø é a negação básica do sistema C_1, usualmente denominada "negação fraca". A negação Ø*, denominada "negação forte", desempenha, nesse sistema, papel equivalente ao da negação clássica. Lê-se ØA como "negação de A" ou "negação fraca de A", e Ø*A como "negação forte de A".

A fórmula A° é usualmente lida como "A é bem comportada" ou "A é uma fórmula regular", e o operador "o" é em geral denominado "operador bola" ou "operador de bom comportamento"; e o símbolo $\leftrightarrow$ corresponde à equivalência usual.

Os *axiomas e regras de dedução* de C_1 são os seguintes:

Axioma 1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Axioma 2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Axioma 3. $(A \wedge B) \rightarrow A$
Axioma 4. $(A \wedge B) \rightarrow B$
Axioma 5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
Axioma 6. $A \rightarrow (A \vee B)$
Axioma 7. $B \rightarrow (A \vee B)$
Axioma 8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
Axioma 9. $\neg\neg A \rightarrow A$
Axioma 10. $A \vee \neg A$
Axioma 11. $B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$
Axioma 12. $A^\circ \wedge B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ)$

Regra 1. $\dfrac{A,\ A \rightarrow B}{B}$ (*Modus Ponens* - MP).

O Axioma 11 constitui uma versão do princípio da redução ao absurdo para as fórmulas bem comportadas de C_1, e o Axioma 12 indica que o "bom comportamento" de A e B se propaga a $(A \# B)$, onde $\#$ é um dos conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ da linguagem L.

Como é bem conhecido, a lógica proposicional clássica pode ser introduzida pelos Axiomas 1-9 e MP, acrescentando-se o Princípio da Redução ao Absurdo:

Axioma 10'. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$.

A hierarquia de cálculos proposicionais $C_1, C_2, ..., C_n, ..., C_\omega$ pode ser construída a partir de C_1.

O cálculo proposicional clássico, cuja linguagem denotaremos por L, pode ser considerado como o sistema C_0 (Kleene, 1952) da hierarquia C_n, $0 \leq n \leq \omega$.

Para cada C_n, $1 \leq n \leq \omega$, o operador $\neg^{(n)}$ desempenha o papel da negação clássica, sendo que $\neg^{(1)}$ coincide com a negação $\neg^*$, de acordo com as Definições 2.2 e 2.5; A^n pode ser lida como "A é uma fórmula com o operador bola reiterado n vezes"; $A^{(n)}$ é usualmente lida como "A é uma fórmula bem comportada de grau n", ou "A é uma fórmula regular de grau n".

Os *axiomas* de C_n, $1 < n < \omega$, são os axiomas de C_1, substituindo-se os Axiomas 11 e 12 pelos seguintes:

Axioma 11'. $B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$
Axioma 12'. $A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B)^{(n)} \wedge (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)})$

A *regra de dedução* de C_n, $1< n < \omega$ é a Regra 1 (MP) de C_1.

São os seguintes os *axiomas* e a *regra de dedução* do cálculo C_ω:

Axioma 1 - Axioma 10.

Regra 1 - Modus Ponens.

Teorema 2.7. (da Costa, 1963a); (ver (da Costa, 1993)) Cada um dos cálculos da hierarquia C_n, $1 \leq n \leq \omega$, é estritamente mais forte do que os cálculos que o sucedem na hierarquia.

Teorema 2.8. (da Costa, 1974) Os sistemas C_n, $1 \leq n \leq \omega$, são consistentes.

Teorema 2.9. (Fidel, 1977) Os sistemas C_n, $1 \leq n \leq \omega$, são decidíveis.

2.2 Os sistemas C_n^*, $0 \leq n \leq \omega$

De forma análoga à construção da hierarquia dos cálculos proposicionais paraconsistentes, pode-se construir a correspondente hierarquia dos cálculos de predicados (ou cálculos quantificacionais) C_n^*, $0 \leq n \leq \omega$, em que C_0^* é o cálculo de predicados clássico, e C_n^* é paraconsistente, para todo $1 \leq n \leq \omega$.

A *linguagem* dos cálculos de predicados paraconsistentes de primeira ordem C_n^*, $1 \leq n \leq \omega$, denotada por L^*, é uma extensão da linguagem L dos cálculos proposicionais paraconsistentes C_n correspondentes, $1 \leq n \leq \omega$, acrescentando-se:

- Para cada m, $m > 0$, uma família enumerável de símbolos de predicados m-ários, $p^m, q^m, r^m, ...$;
- Para cada m, $m > 0$, uma família enumerável de símbolos de funções m-ários, $f^m, g^m, ...$, sendo os símbolos de funções 0-ários chamados *constantes individuais*, e denotados por $a, b, c, a_1, b_1, c_1, ...$;
- Quantificadores: $\forall$ (quantificador universal) e $\exists$ (quantificador existencial).

As noções de *termo*, *fórmula*, *fórmula sem variáveis (*ou *fórmula livre de variáveis)*, *escopo* de um quantificador, *ocorrência livre* e *ocorrência ligada* de uma variável em uma fórmula, *fórmula aberta*, *fórmula fechada*, etc.,

assim como as notações e convenções, são as usuais, como em Kleene (1952).

Substituições de uma variável por um termo, ou de um termo por outro termo, numa fórmula, são definidas como usualmente. Designamos por $t_x(t_1)$ o termo obtido, a partir do termo t, substituindo cada ocorrência da variável x pelo termo t_1, e designamos por $A_x(t_1)$ a fórmula obtida, a partir da fórmula A, substituindo cada ocorrência livre da variável x em A pelo termo t_1 (supondo-se que t_1 possa substituir x, isto é, que t_1 seja livre para x em A(x)).

Observamos que os operadores de negação $\neg^*$ e $\neg^{(n)}$, os operadores "n" e "(n)" e o símbolo de equivalência "$\leftrightarrow$" são introduzidos por definição, como em C_1.

Os *axiomas* e *regras de dedução* do sistema C_1^* são os de C_1, acrescidos dos seguintes:

Axioma 13. $\forall x\, A(x) \rightarrow A(t)$, com t livre para x em A(x)
Axioma 14. $A(t) \rightarrow \exists x\, A(x)$, com t livre para x em A(x)
Axioma 15. $\forall x\, (A(x))^o \rightarrow (\forall x\, A(x))^o$
Axioma 16. $\forall x\, (A(x))^o \rightarrow (\exists x\, A(x))^o$
Axioma 17. Se A e B são duas fórmulas congruentes, ou uma pode ser obtida da outra pela eliminação de quantificadores vácuos, então $A \leftrightarrow B$

Regra 2. $\dfrac{A \rightarrow B(x)}{A \rightarrow \forall x\, B(x)}$, onde x não ocorre livre em A

Regra 3. $\dfrac{A(x) \rightarrow B}{\exists x\, A(x) \rightarrow B}$, onde x não ocorre livre em B

Podemos introduzir os cálculos C_n^*, $0 \leq n \leq \omega$, como no caso da hierarquia $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$. Como no caso proposicional, o cálculo de predicados clássico pode ser considerado como o sistema C_0^* da hierarquia C_n^*, $0 \leq n \leq \omega$.

2.3 Os sistemas $C_n^=$, 0 £ n £ w

Acrescentando-se à linguagem L^* dos sistemas quantificacionais C_n^*, $0 \leq n \leq \omega$, o símbolo de predicado binário de igualdade, =, obtemos a linguagem $L^=$ dos cálculos de predicados paraconsistentes com igualdade $C_n^=$, $0 \leq n \leq \omega$.

Os *axiomas e regras de dedução* de $C_1^=$ são os de C_1^*, acrescentando-se os axiomas seguintes, com as variáveis sujeitas às restrições usuais:

Axioma 18. $\forall x\, (x = x)$
Axioma 19. $x = y \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y))$ (com y livre para x em A(x))

Os *axiomas* e *regras* de $C_n^=$, $1< n \leq \omega$, são os de C_n^*, $1 < n \leq \omega$, acrescentando-se os Axiomas 18 e 19.

3. A teoria de conjuntos CHU_1 de da Costa

A teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 pode ser vista como uma extensão da teoria de conjuntos CHU de Church (1974) - intitulada *set theory with universal set* -, que corresponde à teoria CHU_0 da hierarquia CHU_n, $0 \leq n \leq \omega$ de teorias de conjuntos de da Costa, cujas características básicas apresentamos abaixo. A relação de CHU_1 com o sistema NF de Quine e resultados sobre este sistema e a hierarquia de teorias de conjuntos paraconsistentes NF_n, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa, podem ser encontrados em (da Costa, 1964c, 1965, 1967, 1971 e 1974), (Arruda; da Costa, 1964 e 1977), (Arruda, 1964, 1970a, 1970b, 1975a, 1975b e 1980), (Rosser, 1953), (Forster, 1995), (da Costa; Béziau; Bueno, 1998) e (Carvalho, 2004).

A linguagem de CHU_0 é a linguagem $L^=$ de ZF, com o símbolo de descritor, que pode ser introduzido contextualmente, ou como símbolo primitivo da linguagem $L^=$ estendida.

Seus axiomas são os seguintes, observando-se que o Axioma da Extensionalidade, Axioma do Par e Axioma da União coincidem com os correspondentes axiomas de ZF:

Axioma 1_{CHU_0}. *Axioma da Extensionalidade*

$\forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z$

Axioma 2_{CHU_0}. *Axioma do Par*

$\exists u\, \forall x\, (x \in u \leftrightarrow (x = y \vee x = z)$

Axioma 3$_{CHU_0}$. *Axioma da União*

$\exists v\, \forall x\, (x \in v \leftrightarrow \exists y\, (y \in z \wedge x \in y)$

Axioma 4$_{CHU_0}$. *Axioma da Intersecção*

$\exists v\, (v \in z) \rightarrow \exists u\, \forall x\, (x \in u \leftrightarrow \forall y\, (y \in z \rightarrow x \in y))$

Axioma 5$_{CHU_0}$. *Axioma do Infinito*

$\exists v\, \forall x\, (x \in v \leftrightarrow$ x é ordinal finito)

Axioma 6$_{CHU_0}$. *Axioma da Escolha*

$x \neq \varnothing \rightarrow$ x possui função-escolha

Axioma 7$_{CHU_0}$. *Axioma da Separação*

$wf(v) \rightarrow \exists u\, \forall x\, (x \in u \leftrightarrow ((x \in v) \wedge F(x)))$

Axioma 8$_{CHU_0}$. *Axioma da Substituição*

$(\forall x\, \forall y\, \forall z\, (F(x, y) \wedge F(x, z) \rightarrow y = z) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (F(x, z) \wedge F(y, z) \rightarrow x = y) \wedge \forall y\, (y \in t \leftrightarrow \exists x\, F(x, y)) \wedge wf(t)) \rightarrow \exists v\, \forall x\, (x \in v \leftrightarrow \exists y\, F(x, y))$

Axioma 9$_{CHU_0}$. *Axioma do Conjunto Potência*

$wf(v) \rightarrow \exists u\, \forall x\, (x \in u \leftrightarrow x \subseteq v)$

Axioma 10$_{CHU_0}$. *Axioma do Complemento*

$\exists u\, \forall x\, (x \in u \leftrightarrow x \notin z)$.

Observação. Denominamos *conjunto regular* a todo conjunto x tal que wf(x).

A seguir, algumas definições básicas de CHU_0.

Definições 3.1.

(i) $\overline{x} =_{def} \{y: \neg(y \in x)\}$

(ii) $\iota?x =_{def} \{x\}$

(iii) $\{x_1, x_2, ..., x_n\} =_{def} \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup ... \cup \{x_n\}$

(iv) $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle =_{def}$ n-upla ordenada de Kuratowski

(v) $\Sigma?x =_{def} \iota u\, \forall y\, (y \in u \leftrightarrow \exists z\, (z \in x \wedge y \in z))$

(vi) $\Pi?x =_{def} \iota u\, \forall y\, (y \in u \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \rightarrow y \in z))$

(vii) $\wp?(x) =_{def} \{y: y \subseteq x\}$

(viii) $trans(x) =_{def} \forall y\, (y \in x \rightarrow y \subseteq x)$ (x é um conjunto transitivo)

(ix) $con(x) =_{def} \forall u\ \forall v\ ((u \in x \wedge v \in x) \rightarrow (u \in v \vee v \in u \vee u = v))$ (x é um conjunto conexo, em relação à pertinência)

(x) $wf(x) =_{def} x \neq \varnothing \rightarrow \exists y\ (y \in x \wedge \forall z\,(z \in x \rightarrow y \cap z = \varnothing))$ (x é um conjunto bem-fundado, em relação à pertinência)

(xi) $ord(x) =_{def} trans(x) \wedge con(x) \wedge wf(x)$ (x é um ordinal).

A lógica subjacente à teoria de conjuntos CHU_1 é a lógica paraconsistente $C_1^{=}$. Os axiomas da teoria CHU_1 são os mesmos da teoria CHU_0, nos quais a negação usual $\neg$ é substituída pela negação forte $\neg^*$ de $C_1^{=}$, acrescidos de um axioma que assegura a existência do *complemento fraco* e um axioma que assegura a existência das relações de Russell em CHU_1:

Axioma 11$_{CHU1}$ *Axioma do complemento fraco*

$\exists v\ \forall x\ (x \in v \leftrightarrow x \notin z)$[12]

Axioma 12$_{CHU1}$ *Axioma da Separação Paraconsistente (SP)*

$\exists y\ \forall x_1\ \forall x_2 ... \forall x_n\ (\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle \in y \leftrightarrow \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle \notin x_i)$, com $1 \leq n \leq \omega$

Em CHU_1 temos, portanto, dois complementos para cada conjunto x:

- $\overline{x} =_{def} \{y: y \notin x\}$ (*complemento, complemento relativo*, ou *complemento fraco de um conjunto x*)
- $\overline{x}^{?} =_{def} \{y: y \notin^* x\}$ *(complemento forte de um conjunto x*).

Da mesma forma que, em CHU_1, temos dois complementos para um conjunto qualquer, podemos definir a diferença de dois conjuntos quaisquer, de duas formas distintas.

- $x - y =_{def} x \cap \overline{y}$ (*diferença, diferença fraca,* ou *diferença relativa* entre x e y)

e

- $x -^* y =_{def} x \cap \overline{y}^*$ (*diferença forte* entre x e y).

Os teoremas seguintes expressam propriedades fundamentais de CHU_1.

Teorema 3.2. (da Costa, 1986) CHU_1 é inconsistente (mas aparentemente não-trivial).

Teorema 3.3. (da Costa, 1986) CHU_0 é consistente se, e somente se, CHU_1 é não-trivial.

4. O cálculo diferencial paraconsistente de da Costa

Para o desenvolvimento de um cálculo diferencial paraconsistente satisfazendo o Princípio de l'Hospital - ver (Carvalho, 2004) -, adotamos como teoria de conjuntos subjacente a teoria CHU_1 de da Costa, com sua lógica subjacente $C_1^{=}$, como introduzido por da Costa em pré-publicação de 1996, intitulada *Paraconsistent Mathematics*, e em (da Costa, 2000) (ver (da Costa; Béziau; Bueno, 1998).

O passo inicial para a obtenção desse cálculo, do qual apresentamos alguns resultados, é a construção da extensão algébrica $\mathbf{A}$ para o anel $\mathbb{R}$ dos números reais, denominada um *hiperanel*, com o acréscimo de elementos infinitesimais aos elementos de $\mathbb{R}$; e de uma outra extensão algébrica para $\mathbb{R}$, $\mathbf{A}^*$, incluindo, além dos elementos de $\mathbf{A}$, também elementos infinitos. $\mathbf{A}^*$, por satisfazer apenas parcialmente as propriedades de um anel, é denominada um *quase anel*.

[12] A notação x Ï z é uma forma simplificada para representar Ø(x Î z), da mesma forma como x ∉* z é uma forma simplificada para representar ¬* (x ∈ z).

Os elementos de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{A}^*$ são denominados números hiper-reais, reais generalizados, ou, simplesmente, g-reais, dentre os quais incluem-se os números reais usuais: $\mathbb{R} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{A}^*$.

Para a construção de superestruturas paraconsistentes sobre o hiperanel $\mathbf{A}$, e o quase anel $\mathbf{A}^*$ - requisitos essenciais para a introdução de um Teorema de Transferência entre o cálculo diferencial clássico e o cálculo diferencial paraconsistente -, introduzidas em (Carvalho, 2004), buscamos motivação na análise *não standard*[13], introduzida por Robinson (1996) (reedição revisada da primeira edição, publicada em 1966), bem como em (Robinson; Zakon, 1967) e (Stroyan; Luxemburg, 1976).

Estendemos o anel $\mathbb{R}$ dos números reais ao hiperanel $\mathbf{A}$ dos números hiper-reais, através da introdução das variáveis infinitesimais e dos infinitésimos.

Sejam I, $I \subseteq \mathbb{R}$, um intervalo real fixado e a, $a \in I$, um elemento do interior de I.

Definição 4.1. Fixados o intervalo real I e o ponto a pertencente ao interior de I, definimos uma *variável infinitesimal* como uma função real $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$[14].

Com o conjunto das variáveis infinitesimais, que denotaremos por $\mathbb{V}$, podemos definir o conjunto dos números hiper-reais.

Definição 4.2. Fixado o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$, o *conjunto dos números hiper-reais*, denotado por $\mathbf{A}$, é assim definido:

$\mathbf{A} =_{def} \{\langle r, f\rangle : r \in \mathbb{R} \text{ e } f \in \mathbb{V}\}$.

Na definição acima, quando a variável infinitesimal f é a função nula, o hiper-real correspondente, $\langle r, 0\rangle$, pode ser identificado com o real standard r.

Definição 4.3. Chama-se *infinitésimo* a todo número hiper-real da forma $\langle 0, f\rangle$, em que f é uma variável infinitesimal.

Denotamos um infinitésimo $\langle 0, f\rangle$ por letras gregas minúsculas ε, δ ... .

Definição 4.4. A *igualdade*, ou *identidade*, de dois números hiper-reais de $\mathbf{A}$, $\langle r, f\rangle$ e $\langle s, g\rangle$, denotada por =, é assim definida:

$\langle r, f\rangle = \langle s, g\rangle$ se, e somente se, r = s e f = g.

Definição 4.5. A *ordem* de um infinitésimo qualquer, $\langle 0, g\rangle$, relativamente a um infinitésimo $\langle 0, f\rangle$, é definida por:

a) $\langle 0, f\rangle$ e $\langle 0, g\rangle$ possuem *mesma ordem* se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$, com b um número real standard diferente de zero;

b) A ordem de $\langle 0, f\rangle$ é *superior* à de $\langle 0, g\rangle$ se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

c) $\langle 0, f\rangle$ é de *ordem k* relativamente a $\langle 0, g\rangle$ se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{[g(x)]^k} = b$, para b um número real standard diferente de zero.

Dois infinitésimos $\langle 0, f\rangle$ e $\langle 0, g\rangle$ são ditos *equivalentes* quando $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Definição 4.6. A *adição* (+) e a *multiplicação* (´) de dois números hiper-reais de $\mathbf{A}$, são definidas por:

(i) $\langle r, f\rangle + \langle s, g\rangle =_{def} \langle r + s,\ f + g\rangle$;

[13] Em geral, utilizaremos as expressões *standard* e *não standard* sem maiores ressalvas, para nos referirmos à análise clássica usual e à análise de Robinson, respectivamente.

[14] Igualmente podem ser usados limites laterais na definição das variáveis infinitesimais, observando-se que o conceito de limite aqui utilizado é o clássico.

(ii) $\langle r, f\rangle \times \langle s, g\rangle =_{def} \langle rs, rg + fs + fg\rangle$.

Observemos que as operações + e × acima, entre números hiper-reais, são definidas a partir das operações usuais de soma e produto de números reais, e das correspondentes operações envolvendo funções e números reais.

Definição 4.7. Uma *variável infinita* é uma função v, $v: I \subseteq R \rightarrow R$, tal que $\lim_{x\to a} v(x) = \infty$.

Definição 4.8. Um *número hiper-real infinito*, ou simplesmente um *g-real infinito*, é um par da forma $\langle v, 0\rangle$, em que v é uma variável infinita.

Definição 4.9. O *conjunto dos números hiper-reais estendidos*, denotado por $\mathbf{A}^*$, é definido por

$\mathbf{A}^* = \{a: a \in \mathbf{A}$ ou a é um hiper-real infinito$\}$.

Podemos estender as operações de adição e multiplicação e a relação de igualdade (identidade) de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{A}^*$, de modo que a nova estrutura $\langle \mathbf{A}^*, +, \times, 0, 1\rangle$ conserve algumas das propriedades importantes do hiperanel $\langle \mathbf{A}, +, \times, 0, 1\rangle$.

Utilizando a estrutura clássica $\mathbf{A}^*$, desenvolvemos o cálculo diferencial paraconsistente **P** proposto por da Costa.

A linguagem **L** de **P** é a linguagem de $C_1^{=}$, estendida à linguagem de CHU_1, com símbolos funcionais; constantes especiais para nomear os indivíduos da estrutura $\mathbf{A}^*$; o predicado <; as operações de $\mathbf{A}^*$; e três espécies de variáveis individuais, para denotarem, respectivamente, hiper-reais finitos - r, s, ... -, infinitésimos - δ, ε, ... -, e infinitos - u, v.

A lógica subjacente a **P** é o cálculo paraconsistente de predicados de primeira ordem com igualdade $C_1^{=}$, e a teoria de conjuntos subjacente é a teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 de da Costa.

Introduzimos em **L**, por definição, o predicado ≡, que representa um predicado de "igualdade", necessário para compararmos números que diferem apenas infinitesimalmente.

Definição 4.10. O predicado de *igualdade generalizada*, ou *identidade generalizada*, denotado por ^{o}, é definido por:

$t_1 \equiv t_2 =_{def} t_1 - t_2 = \varepsilon$,

com t_1 e t_2 termos da linguagem, ε infinitésimo, e = o predicado primitivo de igualdade de **L**.

Além disso, definimos $\neg(t_1 \equiv t_2)$ por:

$t_1 \; ? \; t_2 =_{def} t_1 \neq t_2$.

Um conceito de valoração paraconsistente pode ser, então, introduzido para a linguagem **L**.

Definição 4.11. Uma valoração para **L** é uma função **v**, do conjunto das fórmulas fechadas de **L** em {0, 1}, satisfazendo:

(1) As cláusulas da definição de valoração para $C_1^{=}$ de da Costa, Béziau e Bueno (1998, Capítulo 3):

(i) Para cada constante $c \in C(L^{=})$ existe um único nome b de $i(c) \in D$, tal que, para qualquer sentença A(c) de $L^{=}(D)$, $v_D(A(c)) = v_D(A(b))$. Diz-se, então, que c denota b, segundo v_D;

(ii) Se a e b são nomes distintos, isto é, tais que $i(a) \neq i(b)$, então $v_D(a \neq b) = 1$;

(iii) Se p^m é um símbolo de predicado m-ário de $L^{=}$, então $v_D(p^m(t_1,...,t_m)) = 1$ se, e somente se, $(i(t_1),...,i(t_m)) \in p_D^m$;

(iv) Se $v_D(A) = 0$, então $v_D(\neg A) = 1$;

(v) Se $v_D(\neg\neg A) = 1$, então $v_D(A) = 1$;

(vi) $v_D(A \wedge B) = 1$ se,e somente se, $v_D(A) = 1$ e $v_D(B) = 1$;

(vii) $v_D(A \vee B) = 1$ se, e somente se, $v_D(A)$ 1 ou $v_D(B) = 1$;

(viii) $v_D(A \rightarrow B) = 1$ se, e somente se, $v_D(A) = 0$ ou $v_D(B) = 1$;

(ix) Se $v_D(B^o) = v_D(A \rightarrow B) = v_D(A \rightarrow \neg B) = 1$, então $v_D(\neg A) = 1$;

(x) $v_D(A^o \wedge B^o) = 1 \Rightarrow v_D((A \rightarrow B)^o \wedge (A \wedge B)^o \wedge (A \vee B)^o) = 1$;

(xi) v_D assume o valor 1 para todo axioma quantificacional ou de igualdade, no caso de $L^{=}$;

(xii) $v_D(\forall x\, A(x)) = 1$ se, e somente se, para toda constante c de $L^{=}(D)$, $v_D(A(c)) = 1$;

(xiii) $v_D(\exists x\, A(x)) = 1$ se, e somente se, existe c, constante de $L^{=}(D)$, tal que $v_D(A(c)) = 1$;

(xiv) Se v_D confere o valor 1 às premissas de uma regra primitiva de dedução, então a conclusão também tem valor 1.

(2) Para sentenças atômicas da forma $t_1 = t_2$,

$V(t_1 = t_2) = 1$, se $t_1 = t_2$ é válida em $\mathbf{A}^*$

e

$V(t_1 = t_2) = 0$, em caso contrário;

(3) Para uma sentença qualquer **P** da linguagem considerada, o valor $V(P)$ é dado pela adequada combinação das propriedades anteriores.

De acordo com a definição anterior, temos que:

(i) Para sentenças da forma $t_1 < t_2$,

$V(t_1 < t_2) = 1$, se $t_1 < t_2$ é válida em $\mathbf{A}^*$

e

$V(t_1 < t_2) = 0$, em caso contrário;

(ii) Para sentenças da forma $t_1 \equiv t_2$,

$V(t_1 \equiv t_2) = 1$, se $t_1 - t_2 = \varepsilon$ é válida em $\mathbf{A}^*$, com ε infinitesimal

e

$V(t_1 \equiv t_2) = 0$, em caso contrário;

(iii) Para sentenças da forma $t_1 \not\equiv t_2$

$V(t_1 \not\equiv t_2) = 1$, se $t_1 \neq t_2$ (isto é, $\neg(t_1 = t_2)$) é válida em $\mathbf{A}^*$

e

$V(t_1 \not\equiv t_2) = 0$, em caso contrário.

Essa definição de valoração, além de ser compatível com o Princípio de l'Hospital, possibilita a verificação do caráter inconsistente de certas sentenças do cálculo paraconsistente, como $t_1 \equiv t_2$, no caso da ocorrência conjunta de $V(t_1 \equiv t_2) = 1$ e $V(\neg(t_1 \equiv t_2)) = 1$. Além disso, é fundamental, para que estabeleçamos, em **P**, resultados equivalentes e extensões de resultados clássicos, como ilustram os resultados a seguir.

A definição de limite de uma função hiper-real, quando x tende a um número real standard, é a usual.

Definição 4.12. Dada uma hiper-função f: $B \subseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$ e números reais standard r e b:

$\lim_{x \to r} f(x) = b$ se, e somente se, $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x)(0 < |x - r| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Teorema 4.13. (Carvalho, 2004, p. 97) Dada uma função hiper-real f: $B \subseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$,

$\lim_{x \to r} f(x) = k$ se, e somente se, $(\forall x)\ (x \in B)\ ((x \equiv r) \rightarrow (f(x) \equiv k))$.

Definição 4.14. (Carvalho, 2004, p.97) Dada uma função hiper-real f: $B \subseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$ e um hiper-real standard r:

$\lim_{x \to r} f(x) = \langle u, 0 \rangle$ se, e somente se, $(\exists \langle v, 0 \rangle \in \mathbf{A}^*)\ (\forall x)\ (x \equiv r \rightarrow (|f(x)| > |\langle v, 0 \rangle|))$.

Definição 4.15. (Carvalho, 2004, p. 105) Uma função f: $U \subseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$ é *contínua* em um hiper-real $\langle r, g \rangle \in U$ se, e somente se:

$(\forall \langle s, h \rangle \in U)\ (\langle r, g \rangle \equiv \langle s, h \rangle \rightarrow f(\langle r, g \rangle) \equiv f(\langle s, h \rangle))$.

Caso contrário, f é *descontínua* em $\langle r, g \rangle$.

Definição 4.16. (Carvalho, 2004, p.104) Uma relação definida em um subconjunto U de $\mathbf{A}$, f: $U \subseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$, é chamada uma *quase-função*, ou uma *parafunção* de U em $\mathbf{A}^*$ quando associa a cada elemento do domínio U um único elemento de $\mathbf{A}^*$, exceto em um conjunto discreto $Q = \{u_k\}_{k \in N}$ de pontos de U, a cujos elementos u_k, a relação f associa mais de uma *imagem*, $v_k^1, v_k^2, ..., v_k^{n_k}$, $n_k > 1$, de tal modo que $v_k^i \neq v_k^j$, mas $v_k^i \equiv v_k^j$, ?, $j \in \{1, 2, ..., n_k\}$, $i \neq j$.
Notação: f: $U \subseteq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$

$$\begin{cases} f(x) = x, \text{ se } x \in U - Q \\ f(u_k) = v_k^i, \text{ se } u_k \in Q,\ i = 1, 2, \ldots, n_k. \end{cases}$$

A derivada de uma função hiper-real f: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$ em um número real standard r, pode ser definida de forma semelhante à definição clássica de derivada.

Definição 4.17. (Carvalho, 2004, p.109) A *derivada* de uma função hiper-real f: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$, em um número real standard r, denotada por f'(r), é um número real standard, tal que

$$f(r + \varepsilon) - f(r) = f'(r) \times \varepsilon + \delta,$$

em que ε é um infinitésimo arbitrário, e δ é um infinitésimo que depende de ε, com ordem superior à de ε.

Observação. De acordo com a definição anterior, D será o valor da derivada de f em um número real standard r, isto é, D = f '(r), se tivermos:

$$f(r + \varepsilon) - f(r) \equiv D \times \varepsilon.$$

Verificamos que os principais teoremas do cálculo usual clássico podem ser estendidos ao cálculo paraconsistente. Demonstramos, em (Carvalho, 2004), vários deles, tais como o Teorema de Weierstrass, Teorema de Rolle, Teorema do Valor Intermediário e Teorema do Valor Médio, entre outros.

Apresentamos, ainda, em (Carvalho, 2004, p.127), uma proposta de definição para a integral definida paraconsistente.

5. Um Teorema de Transferência

Nesta seção, apresentamos o conceito e propriedades de *superestrutura paraconsistente* e *monomorfismo* entre superestruturas, com o objetivo de introduzir um Teorema de Transferência do cálculo diferencial clássico para o cálculo diferencial paraconsistente.

Definição 5.1 (Stroyan; Luxemburg, 1976). Seja X um conjunto (classicamente não vazio) infinito de indivíduos de CHU_1. Definimos o conjunto X indutivamente:

$X_0 = X$,
$X_1 = \wp(X_0)$,
$X_2 = \wp(X_0 \cup X_1)$,
...
$X_{n+1} = \wp(\bigcup_{k=0}^{n} X_k)$, n = 0, 1, 2,...

$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$.

Os elementos de X são ditos *entidades* de X, sendo que os elementos (átomos) de X são denominados *indivíduos* de X. Se $a \in X$, não podemos escrever "$x \in a$", qualquer que seja x. Denotamos indistintamente, por letras minúsculas ou letras maiúsculas, as entidades em geral; os indivíduos, em particular, são denotados exclusivamente por letras minúsculas.

Adaptando a definição de superestrutura de Stroyan e Luxemburg (1976), ao cálculo paraconsistente, definimos uma superestrutura paraconsistente como toda superestrutura cuja teoria de conjuntos subjacente é paraconsistente - no nosso caso CHU_1 -, tendo, portanto, como lógica subjacente, uma lógica paraconsistente - no nosso caso, $C_1^{=}$ -, estendida pela linguagem **L** introduzida no Capítulo 2, Seção 3 de (Carvalho, 2004).

Definição 5.2. (Carvalho, 2004, p. 143) Denominamos *superestrutura paraconsistente* sobre um conjunto X de átomos de CHU_1, X classicamente não vazio e infinito, à estrutura $\langle X, =, \in, <, \equiv\rangle$, com X como introduzido na definição anterior.

Assim, se $X = R$, temos a superestrutura R, cujo universo tem como conjunto básico o conjunto dos números reais standard, que são os indivíduos de R, e cujas entidades são todos os elementos de R.

Se $X = \mathbf{A}^*$ e se denotamos por S^* o universo construído a partir do conjunto $\mathbf{A}^*$ dos números hiper-reais, que são os indivíduos de S^*, temos a superestrutura paraconsistente $\langle S^*, =, \in, <, \equiv\rangle$.

Definição 5.3. (Carvalho, 2004, p.145) Sejam X e Y superestruturas paraconsistentes. Uma função injetiva $\blacklozenge: X \to Y$ é um *monomorfismo* se satisfaz as condições a seguir, nas quais, para todo conjunto A de CHU_1, a notação $^{\blacklozenge}A$ é usada para representar $\blacklozenge(A)$ (ou $\blacklozenge[A]$) de forma simplificada:

i) Se $x = y$, então $^{\blacklozenge}x = {}^{\blacklozenge}y$ ($\blacklozenge$ preserva a relação de igualdade "=");

ii) Se $x \equiv y$, então $^{\blacklozenge}x \equiv {}^{\blacklozenge}y$ ($\blacklozenge$ preserva a relação de identidade paraconsistente "$\equiv$");

iii) Se $x < y$, então $^{\blacklozenge}x < {}^{\blacklozenge}y$ ($\blacklozenge$ preserva a relação de desigualdade "$<$");

iv) $^{\blacklozenge}\{x\} = \{^{\blacklozenge}x\}$ ($\blacklozenge$ preserva conjuntos unitários);

v) $^{\blacklozenge}(A -^{*} B) = {}^{\blacklozenge}A -^{*} {}^{\blacklozenge}B$ ($\blacklozenge$ preserva a diferença usual, ou diferença forte de conjuntos);

vi) $^{\blacklozenge}(A - B) = {}^{\blacklozenge}A - {}^{\blacklozenge}B$ ($\blacklozenge$ preserva a diferença fraca de conjuntos);

vii) $^{\blacklozenge}(A \times B) = {}^{\blacklozenge}A \times {}^{\blacklozenge}B$ ($\blacklozenge$ preserva o produto cartesiano de conjuntos);

viii) $^{\blacklozenge}(\tau \text{ o } F) = \tau(^{\blacklozenge}F)$, onde τ é uma permutação de n elementos e F é uma relação n-ária ($\blacklozenge$ comuta com permutações de variáveis);

ix) $^{\blacklozenge}(F^{-1}) = (^{\blacklozenge}F)^{-1}$ ($\blacklozenge$ comuta com a relação inversa);

x) Quando F é uma relação binária, $^{\blacklozenge}(\text{Dom}(F)) = \text{Dom}(^{\blacklozenge}F)$ e $^{\blacklozenge}(\text{Im}(F)) = \text{Im}(^{\blacklozenge}F)$ ($\blacklozenge$ preserva o domínio e a imagem de relações);

xi) $^{\blacklozenge}(A \cup B) = {}^{\blacklozenge}A \cup {}^{\blacklozenge}B$ ($\blacklozenge$ preserva a união de conjuntos);

xii) Dado $A \in X$, $^{\blacklozenge}\{(x_1, x_2,...,x_n, y) : (x_1, x_2,...,x_n) \in y \in A\} = \{(z_1, z_2,...,z_n, w) : (z_1, z_2,...,z_n) \in w \in {}^{\blacklozenge}A\}$ ($\blacklozenge$ preserva a definição standard de conjuntos).

xiii) $\blacklozenge$ produz uma extensão $^{\blacklozenge}A$ de $\sigma(A)$, $\sigma(A) \subseteq {}^{\blacklozenge}A$, tal que vale a igualdade $\sigma(A) = {}^{\blacklozenge}A$ se, e somente se, A é um conjunto finito[15].

[15] Dada uma "extensão" $\blacklozenge: X \to Y$, definimos uma função σ no conjunto Ent(X) das entidades de X por: $\sigma(A) = \{^{\blacklozenge}a: a \in A\}$.

Verificamos, pelas propriedades que caracterizam um monomorfismo, que a imagem $^{\blacklozenge}X$ de uma superestrutura X é uma superestrutura.

A definição de *conjunto interno* de uma superestrutura paraconsistente, dada a seguir, corresponde à definição de Robinson e Zakon (1967) para a análise não-standard.

Definição 5.4. Dado um monomorfismo $\blacklozenge: X \to Y$, entre as superestruturas paraconsistentes X e Y, definimos os *elementos internos* de Y como os elementos de $^{\blacklozenge}X = \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^{\blacklozenge}X_n$, com X_0 o conjunto de indivíduos de X.

Os elementos de Y que não são internos são ditos *externos.*

Observações. Em decorrência da Definição 5.3-xiii, pela qual podemos definir uma função $\sigma: Ent(X) \to Y$, das entidades de X em Y, tal que, para uma entidade **A** qualquer de X, $\sigma(A) =_{def} \{{}^{\blacklozenge}x : x \in A\}$, e da Definição 5.4, temos:

- Um elemento y de $^{\blacklozenge}X$ é elemento interno de Y se existe k tal que $y \in {}^{\blacklozenge}X_k$, ou seja, se existe x em X tal que $y \in {}^{\blacklozenge}x$.

- No caso em que $X_0 = R$, R conjunto dos números reais standard, temos que $\sigma(R)$ é uma cópia (standard) de R em Y, com $\sigma(R) \subseteq {}^{\blacklozenge}(R) = {}^{\blacklozenge}R$.

- Se $x \in X_0 = R$, então $^{\blacklozenge}x \in {}^{\blacklozenge}X_0 = {}^{\blacklozenge}R \subseteq {}^{\blacklozenge}R$, de onde temos que todo indivíduo y de $^{\blacklozenge}R$ é interno.

- No caso em que a superestrutura $X = R = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$ é construída sobre $R_0 = R$, e a superestrutura Y é construída sobre uma extensão Y_0 de R contendo números infinitesimais e números infinitos, temos que os conjuntos desses números infinitesimais e infinitos não são internos.

Os conjuntos internos são particularmente importantes porque, analogamente ao que ocorre na análise não-standard de Robinson, dada uma fórmula α de **L** interpretada em uma superestrutura paraconsistente R construída sobre R, as variáveis quantificadas de sua transformada $\blacklozenge(^{i}\alpha)$, ou $^{\blacklozenge\,i}\alpha$, variam apenas sobre conjuntos internos de extensões Y de R, construídas sobre extensões de R. Espera-se, assim, que quando as variáveis livres de $^{\blacklozenge\,i}\alpha$ estejam definidas para variar apenas sobre objetos internos de uma extensão Y de R, os valores de verdade de α em R sejam os mesmos valores de sua transformada em $^{\blacklozenge}R \subseteq {}^{\blacklozenge}Y$.

Definição 5.5. Uma função de *interpretação* da linguagem **L** em uma superestrutura paraconsistente M, construída sobre R ou uma extensão de R, é uma função $i: A \subseteq C(\mathbf{L}) \to M$, injetora, com A um subconjunto do conjunto C(**L**) das constantes da linguagem **L**.

No diagrama a seguir, temos representados os objetos necessários ao Teorema de Transferência de uma superestrutura R, construída sobre o conjunto R dos números reais, para uma superestrutura S, construída sobre uma extensão do quase anel $\mathbf{A}^*$. Trata-se de um teorema fundamental, segundo o qual uma fórmula T é um teorema do cálculo clássico se, e somente se, existe uma interpretação de T que é um teorema do cálculo paraconsistente. Restrito às fórmulas do cálculo diferencial clássico, esse teorema desempenha papel semelhante ao do Teorema de Transferência de Robinson, do cálculo clássico para a análise não-standard (ver (Stroyan; Luxemburg, 1976) e (Robinson; Zakon, 1967)).

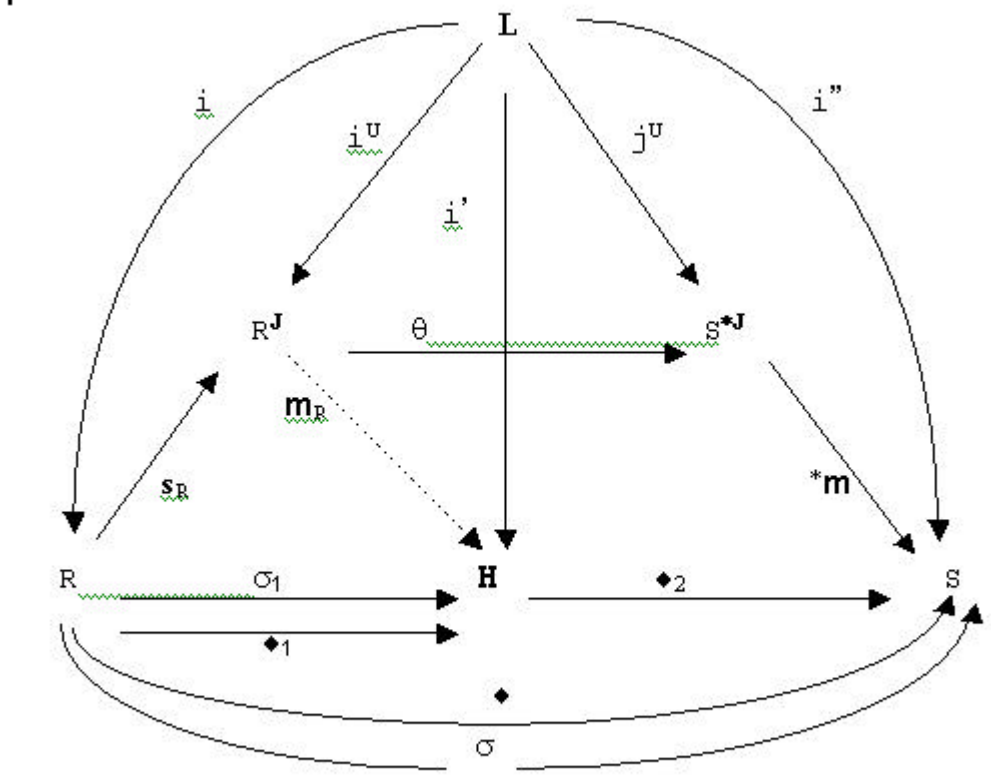

Figura: Teorema de Transferência

- $\mathbf{i}, \mathbf{i}', \mathbf{i}'', \mathbf{i}^U, \mathbf{j}^U$:- funções de interpretação, com domínio em subconjuntos A, B, C, D e E do conjunto C(**L**) das constantes de **L** e contradomínios iguais a, respectivamente, R, H, S, R^J e S^{*J};

- $\mathbf{s}_R$: $R \rightarrow R^J$: mergulho de R em R^J, que identifica cada constante r ou variável x, de R, com uma seqüência constante (r,...,r,...) ou uma sequência $(x_1, x_2,...)$ de R^J;

- q: $R^J \rightarrow S^{*J}$: mergulho de R^J em S^{*J}, pelo qual toda seqüência da forma $(x_1, x_2,...,x_n,...)$ é associada a uma seqüência da forma $(\langle x_1, 0\rangle, \langle x_2, 0\rangle,\ldots,\langle x_n, 0\rangle,...)$ de números hiper-reais finitos, eventualmente constantes;

- $\mathbf{m}_R$: $R^J \rightarrow H$: mergulho de R^J em H, que leva sequências (x_j) de R^J em classes $[(y_j)]$ de H, sendo $[(y_j)] = \{(z_n) \in R^J : (z_j) =_u (y_j)\}$;

- $^*\mathbf{m}$: $Fin(S^{*J}) \rightarrow S$: função que associa seqüências de elementos finitos de S^{*J}, (x_j), a classes $[(x_j)]$, em S;

- $\blacklozenge_1$ (ou $^\blacklozenge_1$) : monomorfismo entre R e H, que pode ser construído nos moldes de Stroyan e Luxemburg (1976), Definição 3.10.1, p. 44.

- $\blacklozenge_2$ (ou $^\blacklozenge_2$): mergulho de H em S, que leva classes $[(x_j)]$ de H em classes $[(\langle x_j, 0\rangle)]$ de S:
  $\blacklozenge_2([(x_j)]) = \blacklozenge_2(\{(y_j): x_j =_u y_j)\}) = \blacklozenge_2(\{(y_j): \{ j: x_j = y_j \} \in U\}) = \{(\langle y_j, f\rangle): \langle y_j, f\rangle \equiv_u \langle x_j, 0\rangle\} = [(\langle x_j, 0\rangle)]$;

- $\blacklozenge$(ou $^\blacklozenge$) : monomorfismo entre R e S;

- s_1: C(R) $\rightarrow$ H : função com domínio no conjunto das constantes de R, pela qual uma cópia standard $\sigma_1(R) = \{^\blacklozenge{}^1x : x \in R\}$ da base R de R é produzida em H;

- s : C(R) $\rightarrow$ S : função que determina uma cópia de R em S, tal que $^\sigma R \subset {}^\bullet R$.

Teorema 5.6. *Teorema de Transferência* (Carvalho, 2004, p.190). Dados as superestruturas $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{S}$, as funções de interpretação i e i'', e o monomorfismo $\blacklozenge$, como introduzidos acima, seja $T(x_1, x_2,...,x_n)$ uma fórmula de **L**, cujas variáveis livres estão entre $x_1, x_2,...,x_n$. Nessas condições, $T(x_1, x_2,...,x_n)$ é válida em $\mathfrak{R}$ segundo a valoração V_i se, e somente se, $\blacklozenge(T(x_1, x_2,...,x_n))$ é válida em $\mathfrak{S}$ segundo a valoração $V_{i''}$.

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre o comprimento de T: mostramos que, para toda fórmula T de **L**, $V_i(T) = 1$ se, e somente se, $V_{i''}(\blacklozenge(T)) = 1$.

Considerações Finais

Dentre diversas questões suscitadas pelos resultados por nós obtidos, destacamos algumas.

Como caracterizar um número hiper-natural infinito, tendo em vista que nossos números hiper-reais infinitos são funções que tendem ao infinito quando x tende a um número real a?

Como estender o domínio de funções hiper-reais para o quase-anel $\mathbf{A}^*$?

Consideramos, naturalmente, a possibilidade de estender o trabalho desenvolvido em (Carvalho, 2004) ao cálculo integral.

Consideramos, ainda, que uma análise das relações entre o cálculo diferencial clássico e o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa, sob o enfoque da teoria de traduções desenvolvida por Feitosa e D'Ottaviano (ver (Feitosa, 1997) e (D'Ottaviano; Feitosa, 2000)), pode conduzir a resultados interessantes.

Pretendemos estudar essas questões em trabalhos futuros.

ABSTRACT

In this paper we present some historical notes concerning the notion of infinitesimal, from the birth of Leibniz's and Newton's differential and integral calculus to Robinson's non-standard analysis. We introduce da Costa's paraconsistent differential calculus and some of its main results, concluding with a Transfer Theorem from the classical differential calculus into the paraconsistent differential calculus.

Keywords: *Paraconsistent logic, paraconsistent set theory, infinitesimal, paraconsistent differential calculus, transference theorem.*

Referências:

ARCHIMEDES. *Works of Archimedes*. Capítulos introdutórios por T. L. Heath. New York: Dover, 1950. Com o suplemento: The method of Archimedes

ARISTOTLE. De interpretatione. Trad. E. M. Edghill. In: HUTCHINS, R. M. (ed.). *Great books of the western world*. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1978. v. 8, p. 23-36.

_____. Analytica priora. Trad. E. M. Edghill. In: HUTCHINS, R. M. (ed.). *Great books of the western world*. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1978. v. 8, p. 37-93.

ARRUDA, A. I. *Considerações sobre os sistemas formais NF_n*. 1964. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 1964.

_____. Sur les systèmes formels NF_i de da Costa. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.270A, p. 1081-1084, 1970a.

_____. Sur le système NF_ω. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 270A, p. 1137-1139, 1970b.

_____. Remarques sur les systèmes C_n. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 280-A, p. 1253-1256, 1975a.

_____. Le schéma de la séparation dans les systèmes NF_n. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 280A, p. 1341-1344, 1975b.

_____. A survey of paraconsistent logic. In: LATIN AMERICAN SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL LOGIC, 4, 1978, Santiago, Chile. *Mathematical logic in Latin America*: proceedings. Editado por A. I. Arruda, N. C. A. da Costa e R. Chuaqui. Amsterdam: North Holland, 1980. p. 1-41.

_____. Aspects of the historical development of paraconsistent logic. In: G. PRIEST, R. ROUTLEY and J. NORMAN (eds). *Paraconsistent Logic*: essays on the inconsistent. Philosophia Verlag, 1989.

ARRUDA, A. I., da COSTA, N. C. A. Sur une hiérarchie de systèmes formels. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 259, p. 2943-2945, 1964.

_____. Une sémantique pour le calcul $C_1^{=}$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 284A, p. 279-282, 1977.

BARON, M. E. *The origins of the infinitesimal calculus*. Hungary: Pergamon Press, 1969.

BARROW, I. *Lectiones geometricae*. London: John Collins (ed.), 1670.

BELL, J. L. *A primer of infinitesimal analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

BERKELEY, G. *The analyst*. London: printed for J. Tonson, 1734.

BERNOULLI, J. *Opera*. Genevae: Cramer & Philibert (ed.), 1744.

BOCHENSKI, I. M. *Ancient formal logic*. Amsterdam: North-Holland, 1951.

_____. *A history of formal logic*. New York: Chelsea Publishing Co., 1961.

BORKOWSKI, L. *Selected works of J. Lukaziewicz*. Amsterdam: North Holland, 1970.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de E. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, EDUSP, 1974.

CARNIELLI, W. A. Lógicas não-clássicas, teoria da informação e inteligência artificial. In: ÉVORA, F. (ed.). *Século XX*: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Unicamp/CLE, 1992. p.101-110. (Coleção CLE, v.11)

_____. Possible translations semantics for paraconsistent logics. In: I WORLD CONGRESS ON PARACONSISTENCY, 1998, Ghent, Belgium. *Frontiers in paraconsistent logic*: proceedings. Editado por D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. van Bendegen. London: King's College Publications, 2000. p. 116-139.

CARNIELLI, W. A., MARCOS, J. A taxonomy of C-systems. In: CARNIELLI, W.A., CONIGLIO, M.E., D'OTTAVIANO, I.M.L. (eds). *Paraconsistency*: the logical way to the inconsistent. New York: Marcel Dekker, 2002. p. 01-94. (Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, v.228)

CARVALHO, T. F. *Sobre o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa*. 2004. 200 p. Tese (Doutorado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

CAUCHY, A. L. Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique: 1er. partie (analyse algébrique). In: _____. *Oeuvres complètes 2*. Paris: Gauthier-Villars, 1821. v.3.

_____. Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal: leçons sur le calcul différentiel. In: _____. *Oeuvres complètes 2*. Paris: Gauthier-Villars, 1826 /1829. v.4.

CAVALIERI, B. *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*. Lucio Lombardo-Radice (ed.). Torino: Unione Tipografico - Editorice Torinese, 1966. Tradução para o Italiano da edição original, em latim, de 1635, e da versão póstuma, aperfeiçoada, de 1653 – Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.

CHURCH, A. A formulation of the simple theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, v. 5, p. 56-68, 1974.

COUTURAT, L. (ed.) *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*. Paris, 1903.

DA COSTA, N. C. A. *Sistemas formais inconsistentes*. 1963a. 68 p. Tese (Cátedra de Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1963a.

_____. Calculs propositionels pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 257, p. 3790-3793, 1963b.

_____. Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p. 27-29, 1964a.

_____. Calculs de prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p. 1111-1113, 1964b.

_____. Sur un système inconsistant de théorie des ensembles. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 258, p. 3144-3147, 1964c.

_____. Sur les systèmes formels C_1, C_1^*, $C_1^=$, D_i et NF_i. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 260, p. 5427-5430, 1965.

_____. Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistantes. *Publications du Département de Mathématiques.* Université de Lyon, n. 4, p. 2-8, 1967.

_____. Remarques sur le système NF_1. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 272A, p. 1149-1151, 1971.

_____. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 15, n. 4, p. 497-510, 1974.

_____. On paraconsistent set theory. *Logique et Analyse*, v. 115, p. 361-371, 1986.

_____. Matemática e paraconsistência. Curitiba: UFPR, 1989. (Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática, v. 7).

_____. O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX. In: ÉVORA, F. (ed.). *Século XIX*: o nascimento da ciência contemporânea**.** Campinas: Unicamp/CLE, 1992. p. 59-65. (Coleção CLE, v. 11)

_____. *Sistemas formais inconsistentes*. Curitiba: Ed. UFPR, 1993.

_____. Paraconsistent mathematics. In: I WORLD CONGRESS ON PARACONSISTENCY, 1998, Ghent, Belgium. *Frontiers in paraconsistent logic*: proceedings. Editado por D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. van Bendegen. London: King's College Publications, 2000. p. 165-179.

DA COSTA, N. C. A., BÉZIAU, J. Y., BUENO, O. *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos.* Campinas: Unicamp / CLE, 1998. (Coleção CLE, v.23)

DA COSTA, N. C. A., MARCONI, D. An overview of paraconsistent logics in the 80's. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.6, n.1, p. 5-31, 1989.

DE l'HOSPITAL, G. F. A. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: Imprimerie Royale, 1696.

DESCARTES, R. *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Leyde: Jean Maire (ed.), 1637.

_____. *La géométrie*. Paris: Hermann, 1686 (1.ed. 1637, 2.ed. 1659-1661).

D'OTTAVIANO, I. M. L. On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 7, p. 89-152, 1990.

_____. A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: ÉVORA, F. (ed.). *Século XIX*: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Unicamp / CLE, 1992. p. 65-93. (Coleção CLE, v. 11)

D'OTTAVIANO, I. M. L., EPSTEIN, R. L. A paraconsistent many-valued propositional logic: J_3. In: EPSTEIN, R. L, *The semantic foundations of logic*. Com a colaboração de W. A. Carnielli, I. M. L. D'Ottaviano, S. Krajewski and R.D. Maddux. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. v.1: Propositional Logics, p. 263-287.

D'OTTAVIANO, I. M. L., FEITOSA, H. A. Paraconsistent logics and translations. *Synthese*, v. 125, n. 1/2, p. 77-95, 2000.

_____. História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: NOBRE, S. (org.). *Coleção História da Matemática para Professores*. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003. Preprint.

FEITOSA, H. A. *Traduções conservativas*. 1997. 161 p. Tese (Doutorado em Lógica) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

FERMAT, P. *Varia opera mathematica*. Editor D. Petri Fermat. Tolosae (Tolouse): Apud Joannem Pech, 1679.

_____. *Oeuvres de Fermat*. Editadas por Paul Tannery et Charles Henry. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1891-1922.

FIDEL, M. The decidability of the calculi C_n. *Reports on Mathematical Logic*, n. 8, p. 31-40, 1977.

FORSTER, T. E. *Set theory with a universal set*. Oxford: Clarendon Press, 1995.

FREGE, G. *Begriffsschriff*: eine der arithmetischen nach gebildete Formelsprache des reinen Denkens. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1977. (Publicado originalmente em 1879).

GALILEI, G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Leida: Louis Elsevier (ed.), 1638. Tradução para o italiano da primeira edição, em latim, de 1635.

_____. *Le opere di Galileo Galilei*. Edizione Nazionale. Firenze: Tip. di G. Barbera, 1890-1909.

JASKOWSKI, S. Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sectio A, I, p. 55-77, 1948.

_____. O konjuncji dyskusyjnej w rachunsku zdán dla systemów dedukcyjnych sprzeczcych, *Studia Societatis Torunensis*, Sectio A, I, p. 171-172, 1949.

_____. Propositional calculus for contradictory deductive systems, *Studia Logica*, n. 24, p. 143-157, 1969.

JOVEN, F. Los infinitesimales como ficciones utiles para Leibniz: la polémica en la Academia de Paris. *Theoria*, segunda época, v. 12, n. 2, p. 257-279, 1997.

JURIN, J. *Geometry no friend to infidelity...* . Cambridge: T. Cooper (ed.), 1734.

_____. *The minute mathematician...* . London: T. Cooper (ed.), 1735.

KEISLER, H. J. *Elementary calculus*: an infinitesimal approach. 1. ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

KEPLER, J. *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Lincii: J. Pancvs, 1615.

KLEENE, S. C. *Introduction to metamathematics*. Amsterdam: North Holland; New York: Van Nostrand, 1952.

LeBLANC, O. Lukasiewicz, Aristotle and contradiction. *Polish Philosophy Page*. Disponível em: http://www.fmag.unict.it/PolPhil/Lukas/LeBlanc.html. Acesso em: 03 jan. 2002.

LEIBNIZ, G. W. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1684.

_____. De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum. *Acta Eruditorum*. Leipzig, 1686.

_____. *Logical papers*. Trad. G. H. R. Parkinson. Oxford: Clarendon Press, 1966.

_____. *Oeuvre concernant le calcul infinitésimal*. Trad. J. Peyroux. Bordeaux: A. Blanchard, 1983.

LINTZ, R. *História da Matemática*. Blumenau: Editora da FURB, 1999. v. 1.

LUKASIEWICZ, J. *O Zasadzie sprzecznosci u Arystotelesa*: studium krytyczne. Kraków: Akademia Umiejetnosci, 1910.

_____. Über den satz von widerspruchs bei Aristoteles. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*: Classe d'Histoire de Philosophie, p. 15-38, 1910. Tradução para o inglês em (Borkowski, 1970).

LUKASIEWICZ, J., TARSKI, A. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*. Classe III, v. 23, p. 30-50, 1930. Tradução para o inglês em (Borkowski, 1970).

MORTENSEN, C. *Inconsistent mathematics*. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. (Mathematics and its Applications, v. 312)

NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. London: Royal Society, 1687.

_____. *De analysi per aequationies numero terminorum infinitas*. London: William Jones (ed.), 1711.

_____. *The method of fluxions and infinite series*. Ed. John Colson. London, 1736. (De methodus fluxionumet serierum infinitarum, 1671).

_____. *The mathematical papers of Isaac Newton*. Ed. D. T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press, 1967-1981. 8 v.

PAIS, A. *Sutil é o Senhor*: a ciência e a vida de Einstein. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1995.

PIN, V. G. Ontologia e história del calculus (la tarea de Abraham Robinson). *Theoria*, segunda época, v. 2, p. 97-119, 1987.

PIZZI, C. Considerações sobre as lógicas não-clássicas. In: ÉVORA, F. (ed.). *Século XX*: O nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Unicamp / CLE, 1992. (Coleção CLE, v. 11, p. 95-99)

ROBINS, B. A. *A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios*. London: W. Innys & R. Manby, 1735.

ROBINSON, A. Non-standard analysis. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences*, ser. A, n. 64, p. 432-440. Amsterdam: 1961.

_____. *Non-standard analysis*. (Edição revisada da 1. ed. de 1966) Princeton: Princeton University Press, 1996.

ROBINSON, A., ZAKON, E. A set theoretical characterization of enlargements. *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*. C.I.T., Holt, Rinehart and Winston, p. 109-122, 1967.

ROSSER, J. B. *Logic for mathematicians*. New York: McGraw-Hill, 1953.

RUSSELL, B. Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*, v. 30, p. 222-262. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1908.

STROYAN, K. D., LUXEMBURG, W. A. J. *Introduction to the theory of infinitesimals*. New York: Academic Press (1. ed.), 1976.

TORRICELLI, E. *Opera geometrica*. Amatore Massa & Laurenzo di Landi. Firenze, 1644.

WALLIS, J. *Johannis Wallis opera mathematica*. (3 v.). Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1693.

WEIERSTRASS, K. T. Z. Zur theorie der abelschen functionen. *Crelle's Journal*. Berlin, 1854.

_____. *Mathematische werke von Karl Weierstrass*. Berlin: Mayer & Müller, 1894-1927.

WHITEHEAD, A. N., RUSSELL, B. *Principia mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.