# *Lógicas moduladas:*
# *implicações em um fragmento da teoria da linguagem natural*

Maria Claudia Cabrini Grácio
UNESP, Faculdade de Filosofia e Ciências
cabrini@marilia.unesp.br

Hércules de Araujo Feitosa
UNESP, Faculdade de Ciências
haf@fc.unesp.br

**Resumo:** Apresentamos as lógicas moduladas e uma caracterização bastante geral dos quantificadores naturais vistos como universais constantes das linguagens naturais. Então mostramos como os quantificadores modulados podem ser abordados dentro da concepção dos universais. Finalmente, discutimos alguns aspectos dos quantificadores naturais e sua formalização.

**Palavras-chave:** quantificadores generalizados, quantificadores naturais, lógicas moduladas, linguagem natural.

## 1. Introdução

Desde a publicação, em 1957, do trabalho de A. Mostowski apontando a existência de muitos e interessantes quantificadores, denominados *quantificadores generalizados*, não definíveis em termos daqueles usuais da lógica clássica de primeira ordem, $\exists$ e $\forall$, diversos trabalhos têm sido publicados sobre o assunto, por exemplo, Keisler (1970) com o quantificador "existem incontavelmente muitos" e Sgro (1977) com um quantificador topológico.

Trabalhando também com esse assunto, Grácio (1999), a partir de perspectivas abertas em Carnielli e Veloso (1997) e Sette, Carnielli e Veloso (1999), apresentou uma ampla família de sistemas lógicos, a família das *lógicas moduladas*. Cada lógica modulada é caracterizada, sintaticamente, pela inclusão de novos quantificadores generalizados, os *quantificadores modulados*, na linguagem da lógica de primeira ordem. Semanticamente, tais quantificadores são interpretados por subconjuntos do conjunto das partes do universo.

Grácio (1999) apresentou três sistemas lógicos monotônicos, indicados para a formalização das seguintes noções de quantidades: "a maioria", "muitos" e "para uma 'boa' parte". A noção de "maioria", cuja formalização apareceu primeiramente em Rescher (1962), é centrada num quantificador modulado que é semanticamente interpretado por uma coleção de subconjuntos do universo, cujos números cardinais sejam maiores que os de seus complementos. A fim de capturar a noção de "muitos" e "para uma 'boa' parte" foram introduzidos novos quantificadores modulados, semanticamente interpretados, respectivamente, pelas noções de *família fechada superiormente* e *topologia reduzida*.

Também nos estudos sobre teorias das linguagens naturais, a questão sobre quantificação toma um papel central. Segundo Bach *et alii* (1995, p. 1),

> toda linguagem natural fornece algum meio de fazer declarações gerais. [...] investigações sobre a estrutura e significado de expressões quantificacionais têm proporcionado uma grande quantidade de evidências para teorias gerais sobre a sintaxe e a semântica da linguagem natural.

Tratando da relação entre quantificadores lógicos e linguagem natural, Montague (1974) apresentou uma teoria que unifica ou identifica expressões substantivas do inglês, como "todos os pássaros", "Maria", "ela", à noção de quantificadores generalizados. Barwise e Cooper (1981), seguindo Montague, tratam da identificação entre essa categoria sintática (expressões substantivas) da linguagem natural e os quantificadores generalizados da lógica, contribuindo para uma reaproximação entre lógica e linguagem natural.

Barwise e Cooper (1981) argumentaram que os quantificadores da lógica clássica de primeira ordem são inadequados para tratar das sentenças quantificadas da linguagem natural em pelo menos dois aspectos:

• nas linguagens naturais existem sentenças quantificadas que não podem ser expressas através dos quantificadores $\exists$ e $\forall$. Desta maneira, uma teoria semântica para a linguagem natural não pode ser baseada em uma lógica restrita ao cálculo de predicados;
• a estrutura sintática das sentenças quantificadas nas linguagens naturais é muito diferente da estrutura sintática das sentenças quantificadas na lógica clássica de primeira ordem.

Barwise e Cooper (1981) sugerem que uma teoria semântica para a linguagem natural precisa incorporar quantificadores generalizados que expressem noções tais como: "maioria", "muitos", "mais que a metade", entre outras, uma vez que as sentenças quantificadas na linguagem natural não se limitam aos usuais quantificadores universal e existencial.

Freqüentes análises das linguagens naturais consideram não apropriado o uso de linguagens artificiais, e outros componentes de formalização, para a avaliação de certos aspectos lingüísticos e, em particular, de quantificadores. Neste contexto, as lógicas moduladas podem contribuir para novos olhares sobre a natureza dos quantificadores, apresentando-se como uma possibilidade original e matematizada para a análise de questões lingüísticas.

Temos como objetivo, neste trabalho, uma análise das implicações gerais da noção de quantificadores modulados para uma teoria da linguagem natural, com ênfase numa melhor compreensão e correspondência das relações entre lógica e linguagem. Tomamos como referência as questões tratadas em Barwise e Cooper (1981). Embora Barwise e Cooper (1981) tratem, também, do relacionamento sintático entre uma lógica com quantificadores generalizados e um fragmento de uma sintaxe para o inglês, ou mais especificamente, de uma tradução dessa lógica com quantificadores generalizado no fragmento do inglês, atemo-nos ao aspecto da relação semântica entre as *lógicas moduladas* e a *linguagem natural*, tendo como motivação a perspectiva adotada por Barwise e Cooper (1981).

Na Seção 2, mostramos elementos teóricos (sintaxe, semântica e axiomatização) das lógicas moduladas e sua particularização por meio de dois exemplos destinados à formalização das noções de "muitos" e "quase todos", respectivamente. Na Seção 3, apresentamos uma síntese da teoria dos quantificadores generalizados, proposta por Barwise e Cooper (1981), e seus universais da linguagem natural. Na Seção 4, ainda sob a perspectiva de Barwise e Cooper (1981) sobre um fragmento de uma teoria para *linguagens naturais*, fazemos uma análise da contribuição das lógicas moduladas para a quantificação numa teoria da linguagem natural. Na última seção, tratamos alguns aspectos das dualidades de quantificadores numa mesma lógica.

## 2. Lógicas moduladas[1]

A família dos sistemas de *lógicas moduladas* é caracterizada pela inclusão, na linguagem da lógica de primeira ordem, de um quantificador generalizado Q, chamado de *quantificador modulado*, o qual deve ser interpretado semanticamente por um subconjunto $\mathcal{Q}$ do conjunto das partes do universo. Intuitivamente, este subconjunto $\mathcal{Q}$ representa um conjunto arbitrário de proposições sustentadas por evidências, dentro de uma base de conhecimento. A seguir apresentamos a formalização das lógicas moduladas, denotadas por $\mathcal{L}$(Q).

### 2.1 Sobre as lógicas moduladas - $\mathcal{L}$(Q)

Seja L a linguagem de primeira ordem de tipo $\tau$ contendo símbolos para predicados, funções e constantes, fechada para os operadores $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ e, também, para os quantificadores $\exists$ e $\forall$.

A extensão da lógica de primeira ordem $\mathcal{L}$, obtida pela inclusão de um quantificador generalizado Q, denominado *quantificador modulado*, é denotada por $\mathcal{L}$(Q).

As fórmulas (e sentenças) de $\mathcal{L}$(Q) são aquelas de $\mathcal{L}$ acrescidas das fórmulas geradas pela cláusula seguinte:

• se $\varphi$ é uma fórmula em $\mathcal{L}$(Q) em que x ocorre, então (Qx)$\varphi$ é uma fórmula de $\mathcal{L}$ (Q).

Os conceitos de variável livre e variável ligada, numa fórmula, são estendidos ao quantificador Q, isto é, se x é livre em $\varphi$, então x ocorre ligada em (Qx)$\varphi$.

Denotamos por $\varphi(t/x)$ o resultado da substituição de todas as ocorrências livres em $\varphi$ da variável x pelo termo t. Por simplicidade, quando não houver confusão, escrevemos apenas $\varphi(t)$ em vez de $\varphi(t/x)$.

A semântica associada às fórmulas nas lógicas moduladas é definida como segue.

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura clássica de primeira ordem, com domínio A, e $\mathcal{Q}$ um conjunto de subconjuntos de A, tal que $\varnothing \notin \mathcal{Q}$, isto é, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}$. A *estrutura modulada* para $\mathcal{L}$(Q), indicada por $\mathcal{A}^{\mathcal{Q}}$, é

[1] Para uma exposição detalhada referente às lógicas moduladas consultar Grácio (1999).

determinada pelo par ($\mathcal{A}$, $\mathcal{Q}$).

Veloso (1998) chama esse tipo de estrutura de *estrutura complexa* e Keisler (1970) de *estrutura fraca*.

A *interpretação* dos símbolos relacionais, funcionais e constantes individuais de $\mathcal{L}$(Q) é a mesma de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{A}$.

A *satisfação* de uma fórmula de $\mathcal{L}$(Q) numa estrutura $\mathcal{A}^Q$ é definida recursivamente, do modo usual, acrescentando-se a cláusula seguinte:

- seja $\varphi$ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres esteja contido em $\{x\} \cup \{y_1, ..., y_n\}$ e consideremos uma seqüência $a = (a_1, ..., a_n)$ em A. Então

$$\mathcal{A}^Q \; ? \; (Q\,x)\varphi[x, a] \text{ se, e somente se, } \{b \in A \,/\, \mathcal{A}^Q \; ? \; \varphi[b, a]\} \in \mathcal{Q}.$$

Neste caso, $\mathcal{A}^Q$ ? $\psi[e]$ denota que $\mathcal{A}^Q$ ?$_s$ $\psi$, quando as variáveis livres da fórmula $\psi$ ocorrem no conjunto $\{z_1, ..., z_n\}$, $s(z_i) = e_i$ e $e = (e_1, ..., e_n)$. Desde que $A \neq \emptyset$, então $\mathcal{A}^Q$ ? $(Qx)\varphi[a]$ se, e somente se, $\mathcal{A}^Q$ ? $\varphi[a]$ e x não ocorre livre em $\varphi$. Em particular, para uma sentença $(Qx)\sigma(x)$, temos $\mathcal{A}^Q$ ? $(Qx)\sigma(x)$ se, e somente se, $\{a \in A \,/\, \mathcal{A}^Q$ ? $\sigma(a)\} \in \mathcal{Q}$.

Conforme já mencionamos, identificando ***Q*** com estruturas matemáticas, Grácio (1999) formalizou proposições da forma "maioria", "muitos" e "para uma 'boa' parte". A lógica dos ultrafiltros, introduzida em Sette, Carnielli e Veloso (1999) e Carnielli e Veloso (1997), formaliza proposições do tipo "quase todos" ou "geralmente", e também deve ser considerada uma particularização das lógicas moduladas.

Como podemos observar, as noções de verdadeiro e falso, associadas aos quantificadores modulados não depende da lógica subjacente, mas de qual medida (quantificação) estamos usando e que "[...] deve ser incluída como parte do modelo antes que as sentenças tenham qualquer valor de verdade estabelecido" (Barwise, Cooper, 1981, p.163).

As noções semânticas usuais, tais como modelo, validade, conseqüência lógica, etc., para estes sistemas, podem ser apropriadamente adaptadas.

Os axiomas de $\mathcal{L}$(Q) são aqueles de $\mathcal{L}$ com os axiomas da identidade acrescidos dos seguintes axiomas para o quantificador Q:

($Ax_1$) $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow (Qx)\varphi(x)$

($Ax_2$) $(Qx)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\varphi(x)$

($Ax_3$) $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow ((Qx)\varphi(x) \leftrightarrow (Qx)\psi(x))$

($Ax_4$) $(Qx)\varphi(x) \leftrightarrow (Qy)\varphi(y)$.

Intuitivamente, dada uma interpretação com universo A e as fórmulas $\varphi$, $\psi$, com exatamente uma variável livre x, então para os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A \,/\, \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in A \,/\, \psi[a]\}$, o axioma ($Ax_1$) afirma que se todos os indivíduos satisfazem $\varphi$, então o universo de discurso, A, pertence à família de subconjuntos $\mathcal{Q}$ de A que interpreta Q. O axioma ($Ax_2$) afirma que o conjunto vazio não pertence a $\mathcal{Q}$. O axioma ($Ax_3$) afirma que se $[\varphi]$ e $[\psi]$ são idênticos, então um deles pertence à família $\mathcal{Q}$ que interpreta Q se, e somente se, o outro também pertence a $\mathcal{Q}$.

As regras lógicas das lógicas moduladas são as regras usuais de $\mathcal{L}$: *Modus Ponens* (MP) e Generalização (Gen).

Noções sintáticas usuais como sentença, demonstração, teorema, conseqüência lógica, consistência e outras, para $\mathcal{L}$(Q), são definidas de modo análogo aos conceitos correlatos da lógica clássica.

Propriedades e teoremas referentes ao sistema axiomático (consistência, dedução, etc.) das lógicas moduladas, assim como o teorema da correção, da completude, um resultado análogo ao teorema de Los para ultraprodutos de modelos modulados e um contra-exemplo para o problema da interpolação em $\mathcal{L}$(Q) podem ser encontrados em Grácio (1999).

Apresentamos, a seguir, uma particularização de $\mathcal{L}$(Q) para a formalização da noção de "muito".

### 2.2 Uma lógica do muito

Nesta seção, consideramos um caso particular das lógicas moduladas destinado a formalizar proposições do tipo "muitos". Consideramos que algumas propriedades da noção de "muitos" são facilmente identificadas:

(i) se muitos indivíduos do universo satisfazem a proposição $\varphi$ e $\varphi$ está contida em $\psi$, então $\psi$ também é satisfeita por muitos indivíduos do universo;

(ii) se muitos indivíduos do universo satisfazem a proposição $\varphi$, então existe alguém que satisfaz $\varphi$;

(iii) o conjunto universo contém muitos indivíduos.

Desse modo, a noção vaga de “muitos”, aqui discutida, está associada ao conceito de um conjunto grande de evidências, mas não necessariamente associada à noção cardinal de “maior parte” ou à noção de limite invariante de grandeza (no sentido de não mudar de um modelo para o outro).

A noção de “muitos”, apresentada acima, pode ser capturada pelo conceito matemático de *família própria fechada superiormente*, definida, em um universo A, como uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos do universo A tal que:

(i) se $B \in \mathcal{F}$ e $B \subseteq C$, então $C \in \mathcal{F}$;

(ii) $A \in \mathcal{F}$;

(iii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Sintaticamente, definimos um quantificador modulado G, denominado *quantificador do muito*, na linguagem das lógicas moduladas, dado por $(Gx)\varphi(x)$ e com o seguinte significado “para muitos x, $\varphi(x)$”.

A linguagem de $\mathcal{L}(G)$ é obtida ao identificarmos em $\mathcal{L}(Q)$ o quantificador Q com *quantificador do muito* - G. A interpretação semântica das fórmulas de $\mathcal{L}(G)$ é obtida a partir das estruturas moduladas, quando o conjunto $Q$ é identificado com uma família própria fechada superiormente.

Formalmente, uma estrutura modulada para $\mathcal{L}(G)$, dominada *estrutura de família própria fechada superiormente,* é determinada pela construção em $\mathcal{A}$ de uma família própria fechada superiormente $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, indicada por:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{F}} = (\mathcal{A}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}}).$$

A noção de satisfação de uma fórmula do tipo $(Gx)\varphi$, cujas variáveis livres estejam contidas em $\{y_1, ..., y_n\}$, por uma seqüência $a = (a_1, ..., a_n)$ em A é definida por:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{F}} \, ? \; (Gx)\varphi[x, a] \text{ se, e somente se, } [\varphi] = \{b \in A \,/\, \mathcal{A}^{\mathcal{F}} \, ? \; \varphi[b, a]\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}},$$

em que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ é uma família própria fechada superiormente sobre $\mathcal{A}$.

Em termos intuitivos, $(Gx)\varphi(x)$ é verdadeira, isto é, $[\varphi]$ é membro de $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ se, e somente se, muitos indivíduos de $\mathcal{A}$ satisfazem $\varphi$ (em outras palavras, se $[\varphi]$ contém muitos indivíduos). Assim, $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ é uma coleção de conjuntos que contêm muitos elementos.

Sintaticamente, os axiomas para $\mathcal{L}(G)$ são aqueles de $\mathcal{L}(Q)$, acrescidos pelo seguinte axioma específico para o quantificador G:

$(Ax_5)$ $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x)) \to ((Gx)\varphi(x) \to (Gx)\psi(x))$.

Intuitivamente, dadas as fórmulas $\varphi$, $\psi$, com exatamente uma variável livre x, e uma interpretação com universo A, então para os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A \,/\, \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in A \,/\, \psi[a]\}$, o axioma $(Ax_5)$ afirma que: se $[\varphi]$ contém muitos indivíduos e $[\varphi]$ é um subconjunto de $[\psi]$, então $[\psi]$ também contém muitos indivíduos.

Os exemplos seguintes ilustram proposições que podem ser naturalmente formalizadas em $\mathcal{L}(G)$.

Sejam P(x), I(x) e M(x, y) símbolos relacionais em $\mathcal{L}(G)$, expressando “x é par”, “x é ímpar” e “x é maior que y”, respectivamente, e consideremos como universo o conjunto dos números naturais. Assim, podemos representar as proposições:
(a) “muitos números naturais são pares” por: (Gx)P(x);
(b) “muitos números naturais são ímpares” por: (Gx)I(x);
(c) “para cada número natural, muitos números naturais são maiores que ele” por: $(\forall y)(Gx)M(x, y)$.

Sejam V(x) e G(x) símbolos de predicados de $\mathcal{L}(G)$ que expressam “x usa vestido” e “x usa gravata”, respectivamente. Considerando o universo dos brasileiros, podemos representar as proposições:
(d) “muitas brasileiras usam vestido” por: (Gx)V(x);
(e) “muitos brasileiros usam gravata” por: (Gx)G(x).

Em Grácio (1999), estão mais detalhes sobre as propriedades da *lógica do muito*, bem como uma demonstração que ela é correta e completa com respeito às estruturas de família própria fechada superiormente.

Apresentamos, a seguir, uma outra particularização das lógicas moduladas, a qual formaliza a noção de “quase todos”, denominada por Sette, Carnielli e Veloso (1999) de *lógica dos ultrafiltros*.

Como veremos a seguir, embora a lógica dos ultrafiltros[2] tenha motivado inicialmente o surgimento das lógicas moduladas, ela pode ser caracterizada como uma particularização das lógicas moduladas.

### 2.3 A lógica dos ultrafiltros

Este sistema procura formalizar alguma intuição para "quase sempre" ou "quase todos", através da inclusão do quantificador $\nabla$ na lógica clássica de primeira ordem. A idéia central nesta abordagem é a atribuição semântica do quantificador $\nabla$ destinado interpretar o conceito de "quase todos" através de uma estrutura de ultrafiltros.

A linguagem de $L(\nabla)$ pode ser obtida identificando o quantificador Q em $L(Q)$ com o quantificador $\nabla$. A interpretação semântica das fórmulas em $L(\nabla)$ pode ser obtida a partir das estruturas moduladas, quando o conjunto $Q$ é identificado a um ultrafiltro (filtro próprio e primo).

Formalmente, uma estrutura modulada para $L(\nabla)$ é construída dotando $A$ de um ultrafiltro $U^A$ sobre A e indicada por $A^U = (A, U^A)$.

A noção de satisfação de uma fórmula da forma $(\nabla x)\varphi$, cujas variáveis livres estejam em $\{y_1, ..., y_n\}$, por uma seqüência $a = (a_1, ..., a_n)$ em A, é definida por:

$$A^U \models (\nabla x)\varphi[x, a] \text{ se, e somente se, } [\varphi] = \{b \in A \,/\, A^U \models \varphi[b, a]\} \in U^A,$$

em que $U^A$ um ultrafiltro próprio sobre $A$.

Em termos intuitivos, $(\nabla x)\varphi(x)$ é verdadeiro em $A^U$ se, e somente se, quase todos indivíduos de $A$ satisfazem $\varphi(x)$. Além disso, quase todos indivíduos de $A$ satisfazem $\varphi(x)$ se, e somente se, $[\varphi]$ pertence ao ultrafiltro $U^A$.

Os axiomas de $L(\nabla)$ são aqueles estabelecidos em $L(Q)$, acrescidos dos seguintes axiomas específicos para o quantificador $\nabla$:

$(Ax_5)$ $(\nabla x)(\varphi(x) \to \psi(x)) \to ((\nabla x)\varphi(x) \to (\nabla x)\psi(x))$;

$(Ax_6)$ $((\nabla x)\varphi(x) \wedge (\nabla x)\psi(x)) \to (\nabla x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$;

$(Ax_7)$ $(\nabla x)\varphi(x) \vee (\nabla x)\neg\varphi(x)$.

Consideremos uma interpretação com universo A e as fórmulas $\varphi$ e $\psi$, com exatamente uma variável livre. Então para os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A \,/\, \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in A \,/\, \psi(a)\}$, intuitivamente, os axiomas $(Ax_5)$ - $(Ax_7)$ afirmam, conforme (Sette, Carnielli, Veloso, 1999, p.138), que:

$(Ax_5)$ se $[\varphi] \subset [\psi]$ e $[\varphi]$ é grande (admite quase todos os indivíduos de A), então $[\psi]$ também é grande (contém quase todos os indivíduos de A);

$(Ax_6)$ se $[\varphi]$ e $[\psi]$ são grandes, então $[\varphi] \cap [\psi]$ também é grande;

$(Ax_7)$ exatamente um dentre $[\varphi]$ e $[\neg\varphi]$ é grande.

Diversas propriedades da *lógica dos ultrafiltros* foram demonstradas, como os teoremas da dedução, da correção, da completude, da compacidade e de Löwenheim-Skolem (ver Carnielli, Veloso, 1997). Outros resultados obtidos para este sistema são: formas normais prenex (Sette, Carnielli e Veloso, 1999), independência dos axiomas (Veloso, 1999a), e o desenvolvimento de um sistema de dedução natural para a *lógica dos ultrafiltros* (Rentería *et alii*, 2003).

Além disso, foi mostrado como a *lógica dos ultrafiltros* pode também sustentar o raciocínio genérico (Veloso, 1998), (Carnielli, Veloso,1997) e (Veloso, Carnielli, 1997).

Carnielli e Veloso (1997) apresentam uma abordagem multi-sortida da lógica dos ultrafiltros para tratar noções distintas de conjuntos "grandes". A idéia central é considerar "tipos multi-sortidos em que os símbolos extra-lógicos sejam classificados de acordo com as classes (sortes) dos seus argumentos e resultados" (Carnielli; Veloso, 1997, p. 46).

Com base nessa versão, os quantificadores são relativizados para as classes (sortes), como expressado pela regra (Carnielli; Veloso, 1997, p. 46):

- Para cada variável x sobre a classe (ou sorte) s, se $\varphi$ é uma fórmula de $L(\nabla)$, então $(\nabla x : s)\varphi$, $(\exists x : s)\varphi$ e $(\forall x : s)\varphi$ também são fórmulas de $L(\nabla)$.

Os autores lembram que "uma estrutura multi-sortida atribui para cada classe (sorte) um conjunto não-vazio como seu universo" (Carnielli; Veloso, 1997, p. 46).

[2] Para uma exposição detalhada concernente à Lógica dos Ultrafiltros, ver (Sette *et alii*, 1999), (Carnielli, Veloso, 1997) ou (Veloso, Carnielli, 1997).

De acordo com essa versão, os axiomas[3] de ultrafiltros tornam-se sortidos:

$(\nabla\exists{:}s)$ $\quad(\nabla x : s)\psi \rightarrow (\exists x : s)\psi$;
$(\nabla\wedge{:}s)$ $\quad((\nabla x : s)\varphi \wedge (\nabla x : s)\psi) \rightarrow (\nabla x : s)(\varphi \wedge \psi)$;
$(\nabla\neg{:}s)$ $\quad(\nabla x : s)\varphi \vee (\nabla x : s)\neg\varphi$.

Carnielli e Veloso (1997, p. 47) afirmam que a "lógica multi-sortida se reduz à lógica não-sortida com predicados de relativização". Assim, é possível a adaptação da correção e da completude da versão não-sortida para a versão sortida.

Diversos outros trabalhos sobre lógica dos ultrafiltros têm sido desenvolvidos, por exemplo, Veloso (1999b), Veloso (2001a) e Veloso (2001b).

## 3. A teoria dos quantificadores generalizados de Barwise e Cooper e seus universais da linguagem natural

Partindo do pressuposto de que uma teoria semântica para a linguagem natural precisa incorporar quantificadores generalizados que expressem noções como "maioria", "muitos", "alguns", "poucos", entre outras, Barwise e Cooper (1981) apresentam aspectos sintáticos e semânticos de uma lógica contendo quantificadores generalizados[4]. Contudo, os autores não se ocuparam com a formalização dessa lógica, uma vez que tinham por objetivo discutir a natureza dos quantificadores e seu relacionamento com um fragmento da teoria da linguagem natural.

Denominam *quantificador* a junção de um determinador (D), como os termos "maioria", "muitos", "poucos", etc., com um determinador de conjunto, como "pessoas", "estrelas", "pássaros", etc. Representam graficamente a estrutura de um quantificador pela figura:

Quantificador
? ?
Determinador Expressão de conjunto
? ?
Maioria das pessoas

Desse modo, como podemos observar pelo esquema acima, para os autores, a expressão substantiva "maioria das pessoas" é que constitui um quantificador.

Defendem que a estrutura de um quantificador corresponde precisamente à estrutura das Expressões Substantivas (ES) do Inglês, como representado em:

ES
? ?
Determinador Substantivo
? ?
Maioria das pessoas

Os autores afirmam que as "expressões substantivas atuam semanticamente como os quantificadores generalizados dos lógicos" (Barwise, Cooper, 1981, p. 166).

Em seu sistema para quantificadores generalizados, L(GQ)[5], diferenciam os quantificadores entre lógicos e não-lógicos. Exemplificando, afirmam que a diferença entre "todos os homens" e "a maioria dos homens" é que a interpretação de "maioria" e "homem" depende do modelo, ao passo que a interpretação de "todos" é a mesma para todos os modelos. O quantificador "todos" ao contrário de "maioria", "muitos", "poucos", etc, é um quantificador lógico.

As noções lógicas desenvolvidas por Barwise e Cooper (1981) não apresentam símbolos básicos

[3] Neste trabalho, Carnielli e Veloso afirmam que os axiomas $(\nabla\exists{:}s)$, $(\nabla\wedge{:}s)$ e $(\nabla\neg{:}s)$ podem substituir a formulação original (($Ax_5$), ($Ax_6$) e ($Ax_7$)), uma vez que o axioma ($Ax_5$) pode ser derivado dos outros.

[4] Barwise e Cooper (1981) restringem a análise a expressões substantivas simples do inglês que representem quantificadores generalizados de contagem, isto é, que envolvam determinadores discretos, que combinados com substantivos quantificam entidades do tipo objetos (coisas). Em vários autores, por exemplo Partee (1995), encontramos a terminologia D-quantificação para a Quantificação a partir de determinadores e A-quantificação para advérbios de quantificação (sempre, usualmente, geralmente, maioria do tempo, etc).

[5] Barwise e Cooper (1981, p.167) denominam a lógica desenvolvida com quantificadores generalizados por L(GQ).

para quantificadores, pois os quantificadores são constituídos pela aplicação de algum símbolo de determinador (D) para algum termo de conjunto ($\eta$).

Os símbolos lógicos incluem:

conectivos proposicionais: $\wedge, \vee, \neg$
variáveis: x, y, z,...
parênteses, colchetes e o símbolo ^
um símbolo de igualdade: =
um termo de conjunto distinguido: *thing*
alguns dos determinadores lógicos: existe, todos, nenhum, ambos, 1, 1!, 2, ... .

Os símbolos não-lógicos dessa lógica incluem:

símbolos de constantes: c, d,...
símbolos relacionais n-ários, para n = 1, 2, ...
um conjunto de determinadores não-lógicos, que pode incluir: maioria, muitos, poucos, alguns, etc.

Estes autores apresentam seis regras de formação sintática, definindo três tipos de expressões para essa lógica:

**termos de conjunto:**

**$R_1$:** todo símbolo de predicado é um termo de conjunto;
**$R_2$:** se $\varphi$ é uma fórmula e u é uma variável, então u[$\varphi$] é um termo de conjunto.

**quantificadores:**

**$R_3$:** Se D é um determinador e $\eta$ é um termo de conjunto, então D($\eta$) é um quantificador.

**fórmulas:**

**$R_4$:** a composição usual das fórmulas atômicas;
**$R_5$:** se Q é um quantificador e $\eta$ é um termo de conjunto, então Q($\eta$) é uma fórmula;
**$R_6$:** vale o fechamento para os conectivos proposicionais.

Apresentam, também, a semântica para essa lógica, na qual atribuem para coisa (*thing*) o conjunto universo E do modelo, para os símbolos relacionais, variáveis e constantes a interpretação é a usual da lógica clássica. Para cada determinador D, a interpretação do quantificador (D)A, em que A é uma expressão de conjunto, é determinada pela "família de conjuntos Q com a propriedade que X $\in$ Q se, e somente se, (X$\cap$A) $\in$ Q" (Barwise, Cooper, 1981, p. 170).

Formalmente, os quantificadores são usados "para denotar a família de conjuntos para a qual eles produzem o valor 'verdadeiro'. A verdade de uma sentença (Qy)[$\varphi$(y)] é então determinada quando, ou não, o conjunto y[$\varphi$(y)] é um membro da denotação do quantificador" (Barwise, Cooper, 1981, p. 164).

Assim, por exemplo, as sentenças "muitas pessoas gostam de chocolate", "a maioria das mulheres gosta de chocolate" e "todas as crianças gostam de chocolate" serão verdadeiras exatamente nos casos em que o conjunto dos indivíduos que gostam de chocolate, representado por y[chocolate(y)], contiver muitas pessoas, a maioria das mulheres ou todas as crianças, respectivamente.

Para os demais símbolos, a noção de satisfação é a usual.

Com base nesta teoria dos quantificadores generalizados, sugerem dez potências *universais da linguagem natural*, definidos como "fatos que se conservam para todas as linguagens humanas naturais e que as distinguem de outras linguagens logicamente possíveis" (Barwise, Cooper, 1981, p. 176).

Embora apresentem dez universais, uma vez que nesta seção apresentamos somente uma síntese do desenvolvimento de Barwise e Cooper (1981) e que o objetivo do trabalho é avaliar a contribuição das *lógicas moduladas* para um tratamento de um fragmento da teoria das linguagens naturais, expomos, aqui, apenas aqueles que admitem uma análise no âmbito dos quantificadores modulados[6].

Sob a justificativa de que existe uma forte intuição de que toda linguagem natural tem uma categoria sintática, rotulada por NP, a qual inclui nomes próprios e determinadores tais como "todos", "maioria", "um"; mas que não existe um modo simples de dar uma definição sintática universal para NP, afirmam os autores que, nessa situação, a semântica pode contribuir para a teoria sintática e que a semântica sugerida permite propor o seguinte universal.

**Universal do NP-quantificador:** toda linguagem natural tem constituintes sintáticos, chamados expressões substantivas, cuja função semântica é expressar quantificadores generalizados sobre o domínio do

[6] Apresentamos uma análise específica para os quantificadores modulados; os universais não apresentados nesta seção podem ser vistos no texto indicado.

universo (Barwise, Cooper, 1981, p. 177).

Sobre este universal[7], Barwise e Cooper afirmam que, embora seja provavelmente errado reivindicar que as expressões substantivas caracterizem os únicos quantificadores em linguagem natural, parece razoável "reivindicar que as expressões substantivas de uma linguagem são todos e únicos quantificadores sobre o domínio de discurso, isto é, o conjunto E de coisas proporcionadas pelo modelo" (Barwise, Cooper, 1981, p. 177).

Ainda, os autores defendem que o estabelecimento do Universal do Quantificador não só permite que estabeleçamos fatos que podem ser verdadeiros para todas as linguagens naturais, mas que "também servem para distinguir linguagens naturais de algumas outras linguagens - como a formulação padrão do cálculo de predicados de primeira ordem" (Barwise, Cooper, 1981, p. 177).

Definem também nesse trabalho, a propriedade "*vive de*", de um quantificador Q, do seguinte modo: sob a interpretação dos quantificadores como famílias de subconjuntos do domínio E, em um modelo para L(GQ), um quantificador Q *vive de* um conjunto $A \subseteq E$, se Q é um conjunto de subconjuntos de E com a propriedade que, para qualquer $X \subseteq E$:

$$X \in Q \text{ se, e somente se, } X \cap A \in Q.$$

Com base nessa definição, apresentam o próximo universal.

**Universal do determinador:** toda linguagem natural contém expressões básicas, chamadas determinadores, cuja função semântica é atribuir a denotações de substantivos de contagem comum (conjuntos) A, um quantificador que vive de A (Barwise, Cooper, 1981, p. 179).

Definem, a seguir, um quantificador Q como *próprio* ou *crivo* se Q é um subconjunto próprio não-vazio de $P$(E). Chamam a atenção do leitor para o fato de que esta é uma propriedade semântica e mostram, por meio de uma tabela, as situações sob as quais diversos quantificadores podem falhar em representar um crivo (ser próprio) e as condições sob as quais eles os denotam.

Apresentam também uma divisão semântica dos determinadores em *fraco* e *forte*[8]. Definem um determinador D como *forte positivo* (ou *forte negativo*) quando para todo modelo M = (E, || ||[9]) e todo $A \subseteq E$, se o quantificador ||D||(A) está definido, então $A \in$ ||D||(A) (ou $A \notin$ ||D||(A)). Segundo os autores, se D não é *forte*, então D é *fraco*.

Para classificar um determinador D como (i) forte positivo, (ii) forte negativo ou (iii) fraco, Barwise e Cooper (1981, p.182) afirmam que devemos formar uma sentença simples do tipo

'DN é um N / são Ns'

e ver se ela é julgada (i) automaticamente válida, (ii) contraditória ou (iii) contingente sobre a interpretação sugerida.

Seguindo esta definição, apresentam um quadro para o qual os determinadores "alguns", "muitos" e "poucos", entre outros, são classificados como fracos e os quantificadores "maioria", "todos" e "ambos", entre outros, são apresentados como fortes.

Definem, ainda, um quantificador Q como *monotônico crescente* se $X \in Q$ e $X \subseteq Y \subseteq E$, implica que $Y \in Q$; e afirmam que Q é *monotônico decrescente* se $X \in Q$ e $Y \subseteq X \subseteq E$, implica $Y \in Q$. Para os autores, um determinador D é *monotônico crescente* (ou *decrescente*) se ele sempre dá origem a um quantificador monotônico crescente (ou decrescente) ||D||(A).

Com base nessa definição, apresentam os determinadores: "maioria", "muitos", "alguns" e "diversos", entre outros, como determinadores monotônicos crescentes e os determinadores "nenhum" e "poucos", entre outros, como monotônicos decrescentes.

Para uma comparação entre quantificadores monotônicos crescentes e monotônicos decrescentes, definem para um quantificador Q sobre E, os quantificadores:

$$\sim Q = \{X \subseteq E \,/\, X \notin Q\}$$
$$Q\sim = \{X \subseteq E \,/\, E - X \in Q\}$$

Com base nesta definição, os autores demonstram que se Q é um quantificador monotônico cres-

---

[7] Segundo Bach *et alii* (1995, p. 9), diversos artigos "providenciam evidência clara contra a forma forte do universal do NP-Quantificador de Barwise e Cooper". Alguns autores afirmam que este universal precisa ser aparado por meio de uma versão menos forte, uma vez que contra-exemplos da sua universalidade têm aparecido na literatura sobre teorias da linguagem natural, com a apresentação de linguagens particulares que não possuem quantificadores construídos a partir de determinadores, somente quantificadores adverbiais.

[8] Segundo Hoop (1995, p. 422), esses termos são emprestados de Milsark (1977), o qual "argumenta que determinadores fracos são *cardinais*, ao passo que determinadores fortes são *quantificacionais*".

[9] || || representa a função interpretação da lógica no modelo M com universo E.

cente, então ~Q e Q~ são quantificadores monotônicos decrescentes e se Q é um quantificador monotônico decrescente, então ~Q e Q~ são quantificadores monotônicos crescentes. Introduzem, então, o seguinte universal da linguagem.

**Universal da correspondência de monotonicidade:** existe uma expressão substantiva simples que expressa o quantificador monotônico decrescente ~Q se, e somente se, existe uma expressão substantiva simples com um determinador fraco não-cardinal que expressa o quantificador monotônico crescente Q (Barwise, Cooper, 1981, p. 186).

Segundo Barwise e Cooper, este universal apresenta aspectos significantes pelo fato de retrair o conjunto de determinadores básicos das linguagens naturais e por podermos analisá-los em termos semânticos, sem termos que assumir a equivalência entre expressões sintáticas das linguagens naturais.

Ainda sobre a propriedade da monotonicidade, apresentam os próximos dois universais.

**Universal do retraimento:** as expressões substantivas simples de qualquer linguagem natural expressam quantificadores monotônicos ou conjunções de quantificadores monotônicos (Barwise, Cooper, 1981, p.187).

Este universal, segundo os autores, tem o efeito de excluir muitos quantificadores logicamente possíveis como denotações de NP simples.

**Retraimento do determinador forte:** em linguagens naturais, determinadores fortes positivos são monotônicos crescentes. Determinadores fortes negativos são monotônicos decrescentes (Barwise, Cooper, 1981, p. 188).

Apresentam, ainda, outra distinção entre quantificadores relacionada à monotonicidade - a definição de determinador persistente. Um determinador D é *persistente* se para todo modelo M = (E, || ||) e todos $A \subseteq B \subseteq E$, se $X \in ||D||(A)$, então $X \in ||D||(B)$ (Barwise, Cooper, 1981, p.193).

Segundo os autores, a idéia central é que "se D é persistente, então uma vez conhecido que $X \in ||D||(A)$, então é sabido que $X \in ||D||(B)$ para qualquer conjunto B que contenha A" (Barwise, Cooper, 1981, p. 193).

Sob esta definição, os autores apresentam como exemplos de determinadores persistentes, os determinadores lógicos "alguns", "pelo menos n", "infinitamente muitos" e afirmam que os determinadores "muitos" e "diversos" parecem funcionar como persistentes.

**Universal do determinador persistente:** todo determinador persistente da linguagem humana é monotônico crescente e fraco (Barwise, Cooper, 1981, p. 193).

Finalizando as propriedades da sua teoria, Barwise e Cooper tratam da noção de dualidade de um quantificador, definindo o dual de um quantificador Q, em E, como o quantificador $Q^* = \{X \subseteq E \mid E–X \notin Q\} = \sim(Q\sim) = (\sim Q)\sim$.

Para essa propriedade, Barwise e Cooper propõem dois universais (Barwise, Cooper, 1981, Anexo A) não apresentados aqui, pois ainda não podemos analisar o impacto desses para as *lógicas moduladas*, pois ainda não temos desenvolvimento de trabalhos sobre a questão da dualidade nesses sistemas.

## 4. Lógicas moduladas e a teoria da linguagem natural

Retornando às lógicas moduladas, observamos que podemos facilmente fornecer uma formalização alternativa à sua sintaxe e semântica, apoiada nas noções de determinadores e expressões de conjuntos, propostas por Barwise e Cooper (1981). Particularmente, para a lógica dos ultrafiltros, Carnielli e Veloso (1997) e Veloso (1999) apresentam uma versão desta lógica, tratando com variáveis sortidas, o que caracteriza uma aproximação à abordagem fornecida por Barwise e Cooper. Tal proposta pode ser facilmente estendida para as outras particularizações das lógicas moduladas.

Quando trabalhamos com versões das lógicas moduladas com variáveis sortidas, tais variáveis fazem o papel de termo de conjunto e de expressão de conjunto nas definições sintática e semântica, respectivamente, de um quantificador (ou de substantivo – no nível sintático das expressões substantivas das linguagens naturais). Particularmente, na definição da propriedade "vive de", as variáveis sortidas podem ser traduzidas como o conjunto A sobre o qual o quantificador Q "vive de".

Com base nesta formalização usando variáveis sortidas, podemos observar as implicações gerais da noção de quantificadores modulados para a teoria da linguagem natural, tomando como referencial os universais propostos por Barwise e Cooper.

Assumindo a legitimidade do *universal do NP-quantificador* para uma teoria de linguagens naturais e considerando que os quantificadores modulados podem ser vistos como quantificadores generalizados sob a perspectiva de Barwise e Cooper (1981), estes podem ser entendidos como interpretações de expressões substantivas das linguagens naturais. A presente constatação, que se contrapõe à afirmação de Barwise e Cooper de que esse universal determina uma distinção entre linguagens naturais e outras linguagens artificiais, permite-nos, para este universal, considerar a linguagem das lógicas moduladas como uma possível formalização para um fragmento das linguagens naturais que trate das quantificações sobre contagem.

Também sob a égide do *universal do determinador*, as expressões "quase todos", "muito", "maioria" e "uma 'boa' parte", tratadas nas lógicas moduladas (Grácio, 1999), podem ser consideradas como parte de toda linguagem natural. Isto se configura, semanticamente, a partir de uma versão em sortes das lógicas moduladas, em que esses quantificadores denotam famílias de subconjuntos do universo de discurso, definidas pelas variáveis sortidas em questão.

Dentre as propriedades definidas na teoria da quantificação generalizada, proposta por Barwise e Cooper, a propriedade semântica de ser fraco ou forte não é identificada para os quantificadores modulados. Para Barwise e Cooper, segundo a definição proposta, o quantificador "muitos" é fraco. Contudo, em contraposição à Barwise e Cooper, todos os determinadores das lógicas moduladas são fortes, desde que o domínio de discurso sempre pertence à família de conjuntos definida pelo quantificador, o que está formalizado pelo $Ax_1$.

Os quantificadores modulados são todos próprios segundo a propriedade de ser próprio ou "crivo", apresentada por Barwise e Cooper, como podemos constatar pela presença dos axiomas $Ax_1$ e $Ax_2$. Nem precisamos levar em consideração aqueles específicos de cada particularização.

A propriedade da monotonicidade, em concordância com a categorização proposta por Barwise e Cooper, está presente nos sistemas particularizados das lógicas moduladas investigadas em (Grácio, 1999) da seguinte maneira: os quantificadores "muitos" e "quase todos" (Sette, Carnielli, Veloso 1999) são monotônicos crescentes; o quantificador "uma 'boa' parte" é não-monotônico, devido a sua axiomática e interpretação dada pelas estruturas de topologias reduzidas,.

Assumindo a legitimidade do *universal da correspondência de monotonicidade* para um fragmento de uma teoria das linguagens naturais, e que os quantificadores modulados são todos fortes, não podemos garantir a existência de expressões substantivas simples que expressem a negação desses quantificadores e que sejam monotônicos decrescentes. Ainda, a expressão "não muitos", enquanto expressando um quantificador monotônico decrescente, não possui equivalência com a expressão substantiva simples "muitos" formalizada pelo quantificador modulado "muitos", com interpretação dada pela família própria fechada superiormente.

Agora, assumindo os *universais do retraimento* e *do determinador forte*, e o fato que os quantificadores modulados são fortes positivos e monotônicos crescentes, então estes quantificadores podem ser considerados determinadores, ou expressões substantivas simples, de qualquer linguagem natural.

O *universal do determinador persistente*, dentre os determinadores apresentados por Barwise e Cooper, admitiria uma análise do determinador "muitos" que, conforme os autores, poderia ser categorizado como fraco. Considerando que, segundo a interpretação definida para o quantificador modulado "muitos", através do conceito de família própria fechada superiormente, ele é forte positivo, temos, como conseqüência, que o quantificador modulado "muitos" não é persistente, bem como os demais quantificadores modulados, pois todos são fortes positivos. Entretanto, Barwise e Cooper não asseguram, mas apenas suspeitam que tal determinador parece comportar-se como persistente.

## 5. Quantificadores naturais e modelação matemática

Característica central das lógicas moduladas é a tentativa de modelação de alguns quantificadores naturais dentro de estruturas matemáticas apropriadas. Apesar das limitações inerentes de tal formalização, reconhecemos que alguns aspectos podem ser atingidos com as lógicas moduladas.

Desejamos, nesta seção, discutir conotações desta modelação matemática, com ênfase no aspecto dual dos muitos quantificadores naturais.

Sempre que tratamos de um quantificador natural como "maioria", "quase todos", "boa parte", "muitos", entre outros, devemos reconhecer a existência de um dual como "minoria", "quase nenhum", "pequena parte", "poucos', etc. Se matematicamente modelamos um tal conceito, o seu dual deveria também ser contemplado matematicamente, por um conceito dual (complementar). Além disso, por se tratarem de quantificadores em uma linguagem lógica, certas propriedades dos quantificadores lógicos usuais deveriam ser preservadas, mas dada a novidade, nem sempre é muito simples a extensão conceitual dos novos quantificadores, e escolhas devem ser feitas para preservar uma ou outra característica que se julgue mais relevante.

Avaliaremos algumas tais escolhas.

Por questão de simplicidade, imaginemos uma lógica acrescida por dois quantificadores generalizados: um para “muito”, M, e outro para “pouco”, P. Não trataremos das estruturas matemáticas apropriadas, mas desenvolvemos algumas reflexões envolvendo esta lógica.

Inicialmente, dentro do contexto das lógicas moduladas, parece que deve valer a seguinte cadeia de leis:

$$\forall x\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ \varphi(x) \rightarrow Px\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x).$$

Se excluirmos o quantificador M, temos apenas um caso particular de modularidade. Como o muito, numa situação extrema, pode coincidir com o todo; o pouco, por outro lado, pode coincidir com o existencial e ser satisfeito por apenas um indivíduo do universo de discurso.

Para cada estrutura matemática que interpreta um dentre estes dois quantificadores, deve ser possível uma estrutura dual para o outro quantificador. Mas, é imediato o condicional (*) $Mx\ \varphi(x) \rightarrow Px\ \varphi(x)$? Cremos que não e esta lei deve ser incluída como um novo axioma, pois não temos garantia de sua validade.

Vejamos algumas noções que estão neste entorno. Na lógica clássica, sabemos que podemos definir um dentre os dois quantificadores clássicos a partir do outro:

$$(\forall x)\varphi(x) =_{df} \neg(\exists x)\neg\varphi(x)$$
$$(\exists x)\varphi(x) =_{df} \neg(\forall x)\neg\varphi(x).$$

Seria então razoável definirmos:

$$\text{(i) } (Mx)\varphi(x) =_{df} \neg(Px)\neg\varphi(x)$$
$$\text{(ii) } (Px)\varphi(x) =_{df} \neg(Mx)\neg\varphi(x)?$$

Entendemos que não, pois não parece semanticamente claro e sintaticamente temos algo não aceitável. Desde que nesta lógica valem todas as leis clássicas, então quando uma lei $\varphi(x)$ vale, temos por Gen que $(\forall x)\varphi(x)$ também vale e, daí:

1. $\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$
2. $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow (Mx)\varphi(x)$
3. $\varphi(x) \rightarrow (Mx)\varphi(x)$
4. $\neg\varphi(x) \rightarrow (Mx)\neg\varphi(x)$
5. $\neg(Mx)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg\neg\varphi(x)$
6. $(Px)\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$.

Naturalmente, também (ii) não é apropriada.

Poderíamos então definir:

(iii) $(Mx)\varphi(x) =_{df} \neg(Px)\varphi(x)$

(iv) $(Mx)\varphi(x) =_{df} (Px)\neg\varphi(x)$

(v) $(Px)\varphi(x) =_{df} \neg(Mx)\varphi(x)$

(vi) $(Px)\varphi(x) =_{df} (Mx)\neg\varphi(x)$?

Sintaticamente podemos ver que também não são definições sensatas:

Para (iii):

1. $\varphi(x) \rightarrow (Px)\varphi(x)$
2. $\neg(Px)\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(x)$
3. $(Mx)\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(x)$.

Para (vi):

1. $\neg\varphi(x) \rightarrow (Mx)\neg\varphi(x)$
2. $(Mx)\neg\varphi(x) \rightarrow (Px)\varphi(x)$
3. $\neg\varphi(x) \rightarrow (Px)\varphi(x)$.

Usando noções das lógicas modais, podemos traduzir estes dois quantificadores em dois operadores modais e verificar que estes dois operadores são independentes, ou seja, não são interdefiníveis. Temos assim, uma lógica bimodal em que precisamos de dois operadores primitivos e distintos.

Com isto, a lei (*) é primitiva no sistema e se acoplarmos outros quantificadores, precisaremos de mais e mais quantificadores mediando suas ações. Não apenas axiomas para mediar os quantificadores, mas também a interação entre os diversos quantificadores. Isto atribui a estas lógicas um aspecto fortemente contextual o que as distancia das características universais pretendidas pela lógica clássica.

Por outro lado, temos uma maior proximidade com entre lógica e linguagem natural e quando dispomos de uma estrutura matemática capaz de gerir algumas das propriedades dos quantificadores, temos meios concretos de proceder suas modelações o que para os propósitos computacionais (computação inteligente) são bastante promissores.

## Considerações finais

As lógicas moduladas apresentam interessantes possibilidades para a análise de questões lingüísticas uma vez que os quantificadores modulados rompem com a noção equivocada de "que o significado de um quantificador deve ser construído dentro da lógica e que ele não pode, então, variar de um modelo para outro" (Barwise, Cooper, 1981, p. 162).

Ainda, os quantificadores modulados podem contribuir para a discussão de alguns pontos sobre a análise da linguagem natural, uma vez que apresentam uma correspondência mais próxima entre as expressões substantivas e os quantificadores tratados em sistemas lógicos.

Alguns investigadores da teoria da linguagem natural têm manifestado a necessidade de se enfraquecer o *universal do NP-quantificador*; por exemplo, para o universal afirmando "todas as linguagens têm expressões substantivas e todas as expressões substantivas podem ser analisadas como quantificadores generalizados" (Partee, 1995, p. 542). Mesmo em tais circunstâncias, as lógicas moduladas apresentam-se como alternativas possíveis de aproximação entre a lógica e as linguagens naturais.

Observamos que as *lógicas moduladas* se colocam como caminho possível e formalizável à manifestação de Barwise e Cooper quanto à inadequação sintática e semântica das linguagens lógicas para inúmeras situações das linguagens naturais.

Desse modo, assumindo a perspectiva de Barwise e Cooper (1981) sobre um fragmento de uma teoria para as *linguagens naturais*, observamos que as *lógicas moduladas* podem contribuir para uma avaliação semântica das *linguagens naturais*, uma vez que podem representar uma formalização para a teoria da quantificação de Barwise e Cooper, com axiomáticas e interpretações determinadas por estruturas matemáticas para os quantificadores generalizados. Em alguns casos, tais modelos são adequados (corretos e completos).

Concluindo, as lógicas moduladas podem constituir aspectos de modelação semântica para as linguagens naturais, tratadas na perspectivas de modelos matemáticos, além do interesse próprio de tais lógicas como elementos teóricos intrínsecos.

## Agradecimento:

Agradecemos a Fapesp pelo apoio à pesquisa que nos tem sido destinado através dos processos 2005/00408-3 e 2004/14107-2.

**Abstract:** We give the definition of modulated logics and a general characterization of natural quantifiers as universals present in any natural language. So we show how the modulated quantifiers can be investigated inside the view of those universals. Finally we discuss some aspects of the natural quantifiers and its formalization.

**Keywords:** generalized quantifiers, natural quantifiers, modulated logics, natural language.

## Bibliografia:

BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. ***Linguistics and Philosophy***, v. 4, p. 159-219, 1981.

BACH, E.; JELINEK, E.; KRATZER, A.; PARTEE, B. H. Introduction. IN: BACH, E.; JELINEK, E.; KRATZER, A.; PARTEE, B. H. (Ed.) ***Quantification in natural languages***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p. 1-11, 1995.

CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. A. S. Ultrafilter logic and generic reasoning. IN: ***Computational Logic and Proof Theory, Lecture Notes in Computer Science*** 1289, (Proceedings of the 5th Kurt Gödel Colloquium, editors G. Gottlob, A. Leitsch, M. Mundici), Springer-Verlag, p. 34-53, 1997.

GRÁCIO, M. C. C. **Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza**. Campinas, 1999. 193 p. Tese (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas.

HOOP, H. On the characterization of weak-strong distinction. IN: BACH, E.; JELINEK, E.; KRATZER, A.; PARTEE, B. H. (Ed.) ***Quantification in natural languages***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p. 421-450, 1995.

KEISLER, H. J. Logic with the quantifier "there exist uncountably many". ***Annals of Mathematical Logic***, v. 1, p. 1-93, 1970.

MILSARK, G. L. Toward an explanation of certain peculiarities of the existential construction in English. ***Linguistic analysis***, v.3, p. 1-29, 1977.

MONTAGUE, R. Formal Philosophy. In: THOMASON, R. H. (Ed.) **Formal philosophy.** Selected Pa-

pers. New Haven: Yale University Press, 1974.
MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. ***Fund. Mathematical***, v. 44, p. 12-36, 1957.
PARTEE, B. H. Quantificational Structures and compositionality. IN: BACH, E.; JELINEK, E.; KRATZER, A.; PARTEE, B. H. (Ed.) ***Quantification in natural languages***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p. 541-602, 1995.
RENTERÍA, C. J.; HAEUSLER, E. H.; VELOSO, P. A. S. *NUL*: Natural deduction for ultrafilter logic. ***Bulletin of the Section of Logic***, v. 32, p. 191-199, 2003.
RESCHER, N. Plurality-quantification. ***The Journal of Symbolic Logic***, v .27, p. 373-4, 1962.
SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. An alternative view of default reasoning and its logic. In: HAUESLER, E. H.; PEREIRA, L. C. (Ed.) ***Pratica:*** **Proofs, types and categories**. Rio de Janeiro: PUC-RJ, Brazil. p. 127-158, 1999.
SGRO, J. Completeness theorems for topological models. ***Annals of Mathematical Logic***, v. 11, p. 173-193, 1977.
VELOSO, P. A. S. On ultrafilter logic as a logic for 'almost all' and 'generic reasoning'. ***Res. Rept.*** *ES - 488/98*, COPPE – UFRJ, Rio de Janeiro, 1998.
VELOSO, P. A. S. On ultrafilter logic and a missing axiom. ***Bulletin of Sect. Logic***, v. 28, p. 17-26, 1999a.
VELOSO, P. A. S. On 'amost all' and some presuppositions. IN: Pereira, L. C. P. D., Wrigley, M. B. (eds.). *Logic, Language and Knowledge: essays in honour of Oswaldo Chateaubriand Filho,* ***Manuscrito*** XXII, 1999b, p. 469-505.
VELOSO, P. A. S. On some meanings for 'generally' and 'rarely'. IN: *Proc. Second Principia International Symposium*, Florianópolis, 2001a.
VELOSO, P. A. S. On justifying induction: a logical appraisal. IN: *Proc. Second Principia International Symposium*, Florianópolis, 2001b.
VELOSO, P. A. S., CARNIELLI, W. A. An ultrafilter logic for generic reasoning and some applications. *Res. Rept. ESES* – 437/97, COPPE – UFRJ, Rio de Janeiro, Abril 1997.