UM SISTEMA DE TABLEAUX ANALÍTICOS PARA A LÓGICA DO PLAUSÍVEL

Luiz Henrique da Cruz Silvestrini
Programa de Pós-Graduação do IFCH - UNICAMP
henriquelui@marilia.unesp.br

Abstract: The *Logic of the Plausible* was introduced in 1999 by Grácio as a particularization of a family of logical systems characterized by the inclusion of a generalized quantifier in the syntax of the classical logic of predicates, denominated the Modulated Logics. The semantical interpretation of these logics is given by a subset of the power set of the universe. In this particularization of modulated logics, it is included the quantifier of Plausible **P** that engenders the formalization of a type of inductive reasoning so that "a 'good' number of individuals possesses certain property". We introduced a new deductive system for the Logic of the Plausible, denominated **TLP**, built following the principles of the classical semantical tableaux. Besides, we sketched the equivalence of this new deductive system relative to the axiomatic system originally presented by Grácio.

Keywords: Modulated Logics; Logic of the Plausible; analytical tableaux system; induction.

1. Introdução

A lógica clássica aristotélica contempla três princípios fundamentais, a saber: (i) Princípio da Identidade – todo objeto é idêntico a si mesmo; (ii) Princípio da Não-Contradição – uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente; e (iii) Princípio do Terceiro Excluído – toda proposição é verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira possibilidade.

Entendemos por *lógicas não-clássicas*, os sistemas lógicos: (a) cuja linguagem *estende* a linguagem clássica pela introdução de novos operadores, ou por meio de novos quantificadores, distintos do universal e do existencial; ou (b) nos quais não vale, em geral, um dos princípios clássicos aristotélicos. Nesse sentido, Haack (1978) considera duas categorias principais de lógicas não-clássicas: as que são apresentadas como *complementares* da clássica e as lógicas *alternativas* a ela.

As lógicas complementares não infringem os princípios da lógica clássica aristotélica e não questionam sua validade universal, apenas ampliam e complementam seu escopo. São exemplos de lógicas complementares as lógicas modais, com os operadores modais de possibilidade e necessidade; as lógicas deônticas, as lógicas do tempo, etc. Entre estas lógicas destacamos as lógicas moduladas, caracterizadas pela inclusão de quantificadores generalizantes na linguagem clássica de primeira ordem.

Contudo, as lógicas alternativas (heterodoxas, desviantes) foram concebidas como novas lógicas, destinadas a substituir a lógica clássica em alguns domínios do saber. Dentre as lógicas alternativas, podemos citar as lógicas paracompletas, nas quais o Princípio do

Terceiro Excluído é derrogado, ou seja, podem existir fórmulas φ tais que elas e suas respectivas negações não sejam teoremas.

As lógicas intuicionistas e as lógicas polivalentes são exemplos de lógicas paracompletas; podemos citar também, como lógicas alternativas, as lógicas paraconsistentes, nas quais o Princípio da Não-Contradição pode não ser válido em geral, como ocorre nos sistemas $\mathbf{C_n}$ de Da Costa (1963); e citamos ainda as lógicas não-reflexivas, nas quais não é válido, em geral, o Princípio da Reflexividade de Identidade, como é o caso, por exemplo, das lógicas quânticas.

Enquanto sistema formal, a lógica contempla aspectos da linguagem natural, seja no uso de quantificadores como o “todo” e “algum” numa proposição categórica, ou também os conectivos “e”, “se ..., então...”, etc. Contudo, o uso exclusivo dos quantificadores existencial e universal, pela lógica clássica, distancia-se da nossa linguagem natural, que usa muitos outros quantificadores, como “a maioria”, ‘a minoria’, ‘quase todos’, ‘quase nenhum’, ‘muitos’, ‘poucos’, dentre muitos outros. Como conseqüência disso, surgiram muitas lógicas não-clássicas por meio do acréscimo de novos quantificadores à lógica de predicados clássica ou pelo acréscimo de novos operadores e regras de inferência, de modo que formalizam tipos específicos de raciocínios. Dentre essas lógicas não-clássicas, encontram-se aqueles sistemas formais dedutivos que buscam modelar um tipo de raciocínio indutivo.

O raciocínio indutivo descreve um tipo particular de inferência, a qual passa de uma relação verificada numa amostra (*Todo* cisne nesta amostra é branco) para a mesma relação no universo estudado (*Todo* cisne é branco) – que inclui casos não-observados. Este tipo de raciocínio é considerado, no campo epistemológico, como um processo inferencial não genuinamente lógico, em decorrência de não se mostrar adequado na justificação das teorias científicas (proposições universais por meio de proposições singulares), pois, para a ciência, indagar se há leis naturais sabidamente verdadeiras pode ser considerado como outra forma de indagar se há uma justificativa lógica para as inferências indutivas. Na busca por elucidar alguns princípios que fundamentam a indução, apontamos para o fato de a inferência indutiva não ser “estritamente válida”, mas gerar algum grau de confiabilidade / probabilidade, na qual a conclusão segue *provavelmente* verdadeira.

Dessa maneira, abordamos um tipo de raciocínio indutivo, segundo um sistema lógico monotônico, por meio do raciocínio genérico.

Para evidenciarmos a relevância de um sistema lógico admitir a propriedade da monotonicidade, analisamos este conceito de um ponto de vista formal.

Dizemos que um sistema lógico formal $\mathbf{S}$ é *monotônico*, quando dadas duas teorias Δ e Γ em S, com Γ uma extensão de Δ, o conjunto de conseqüências dedutivas de Δ é um subconjunto do conjunto de conseqüências de Γ, isto é, se Δ e Γ são teorias no sistema $\mathbf{S}$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, então $Th(\Delta) \subseteq Th(\Gamma)$, em que $Th(\Phi) = \{\lambda / \Phi \vdash \lambda\}$.

Podemos dizer, de uma maneira intuitiva, que, num sistema monotônico, o número de informações consideradas como verdadeiras (premissas e suas conseqüências) *aumenta* ao adicionarmos novas premissas/informações. Isso denota a impossibilidade deste tipo de sistema revisar as informações obtidas mediante as novas informações acrescidas, pois a validade da dedução deve ser preservada, ou seja:

$$\Delta \vdash \lambda \;\Rightarrow\; \Delta \cup \Gamma \vdash \lambda.$$

Dentre as propostas existentes de sistemas lógicos dedutivos como representação de formas de raciocínios sob incerteza, as mais conhecidas pela literatura são os sistemas não-monotônicos, pois a propriedade lógica da não-monotonicidade era considerada como a mais adequada para tratar do conhecimento indutivo, assim como defendia Reiter (1980), uma vez que atuando sob informação incompleta, o sistema deve fazer suposições e *revisá-las* sempre que receber mais informações.

Como sistema lógico formal não-monotônico, podemos citar a *Lógica do Padrão* (Default Logic) desenvolvida por R. Reiter (1980), caracterizada pelo acréscimo de regras ou "padrões" à lógica de primeira ordem clássica ($L^{\tau}_{\omega\omega}$). A noção de padrão se estabelece como uma ferramenta (regra do padrão), por meio da qual podemos atribuir uma propriedade a uma constante/indivíduo "na ausência de qualquer informação contrária", uma vez que, segundo Reiter, essa "ausência de informação contrária" pode ser interpretada como "é consistente assumir que". O autor considera sua regra uma representação para o quantificador "quase todos", ou "a maioria", sem fazer uso de recursos quantitativos como distribuições de freqüências ou raciocínio aproximado formalizado pelas lógicas difusas (*fuzzy logics*).

Contudo, os sistemas lógicos não-monotônicos têm sido criticados por alguns autores, dentre eles Sette, Carnielli e Veloso (1999), basicamente, sob dois pontos presentes nas abordagens não-monotônicas: o primeiro diz respeito a uma grande desvantagem computacional, diante do fato de esses sistemas precisarem "rever" as informações (regras, premissas, teoremas já demonstrados) a cada demonstração, o que pressupõe uma falta de localidade dos procedimentos de demonstração; o segundo ponto é que embora estes sistemas formalizem o raciocínio sob incerteza (noção de senso comum), eles não capturam a noção de "quase todos" ou "a maioria", pois podem existir modelos sem que necessariamente "quase todos" os indivíduos satisfaçam as proposições acreditadas. Este último ponto é de especial relevância, visto que, segundo Grácio (1999, p. 72),

> Alguns sistemas se propõem a formalizar raciocínio sob incerteza por senso comum, sem diferenciá-lo do raciocínio que generaliza proposições do tipo "quase todos" ou "a maioria". Entretanto, existe uma diferença entre a crença em determinada proposição e a quantificação de uma proposição dada por "quase todos" ou "maioria".

No sentido de superar esses entraves da lógica não-monotônica, surgiram os sistemas monotônicos destinados a formalizar o raciocínio sob incerteza.

A *Lógica dos Ultrafiltros*, introduzida por Sette, Carnielli e Veloso (1999), enquanto sistema lógico formal monotônico, mostrou-se como uma alternativa à lógica do padrão de Reiter (1980). Segundo os autores, é inadequada a identificação de "na ausência de qualquer informação contrária" com "é consistente assumir que" para tratar do problema de como atribuímos a um indivíduo genérico, uma propriedade que se mostra "quase sempre" verdadeira para os indivíduos do universo. A lógica dos ultrafiltros apresenta-se como uma extensão da lógica clássica de primeira ordem, dada pelo acréscimo de um quantificador generalizado, sendo este quantificador "quase todos" semanticamente interpretado por uma estrutura denominada ultrafiltro próprio.

2. A Lógica do Plausível

No mesmo sentido de propor um sistema monotônico para formalizar um tipo de raciocínio sob incerteza, foram introduzidas por Grácio em sua Tese de Doutorado (GRÁCIO, 1999) as Lógicas Moduladas ($L^{\tau}_{\omega\omega}(\boldsymbol{Q})$). Assim, tendo em vista que a Lógica do Plausível (LP) é um sistema modulado particular, iniciamos esta seção por explicitar aspectos gerais dos sistemas modulados para, em seguida, apresentarmos em detalhes a LP.

2.1. Aspectos Gerais das Lógicas Moduladas

As Lógicas Moduladas $L^{\tau}_{\omega\omega}(\boldsymbol{Q})$ são caracterizadas pela inclusão de um quantificador generalizado $\boldsymbol{Q}$, ou seja, um quantificador intermediário entre o universal $\forall$ e o existencial $\exists$, na sintaxe da lógica clássica de predicados de primeira ordem, cuja interpretação semântica é dada por um subconjunto do conjunto das partes do universo.

Os axiomas de $L^{\tau}_{\omega\omega}(\boldsymbol{Q})$ são os da lógica clássica $L^{\tau}_{\omega\omega}$, incluindo os axiomas da identidade, acrescentando-se os axiomas seguintes para o quantificador $\boldsymbol{Q}$:

Ax_1: $\forall x(\theta \leftrightarrow \lambda) \rightarrow (\boldsymbol{Q}x\theta \leftrightarrow \boldsymbol{Q}x\lambda)$;

Ax_2: $\boldsymbol{Q}x\theta(x) \rightarrow \boldsymbol{Q}y\theta(y)$, se y é livre para x em $\theta(x)$

Ax_3: $\forall x\theta \rightarrow \boldsymbol{Q}x\theta$;

Ax_4: $\boldsymbol{Q}x\theta \rightarrow \exists x\theta$;

As Regras de Inferências são *Modus Ponens* e Generalização.

Segundo Grácio (1999), estas lógicas (moduladas) constituem uma formalização geral para raciocínio indutivo, visto que cada sistema modulado consegue formalizar um tipo de crença indutiva por meio de seu quantificador generalizado e, assim, caracterizar uma forma particular de raciocínio indutivo. Todavia, devemos ressaltar que cada quantificador modulado (diante de uma proposição) não especifica a maneira como foi gerada determinada crença (uma vez que a proposição quantificada poderá ser premissa no sistema inferencial), apenas identifica uma crença indutiva àquela proposição e nos fornece uma estrutura que modela um conjunto de crenças indutivas, porquanto podemos dizer que

> Essa ampla família de sistemas lógicos, denominada *lógicas moduladas*, é caracterizada pela presença de um subconjunto (*q*) do conjunto das partes do universo em sua semântica, representando um conjunto arbitrário de crenças (proposições não necessariamente válidas, mas que são inferidas com base nas evidências) de uma base de conhecimento. Sintaticamente, este subconjunto *q* é representado por um quantificador generalizado (Q). Intuitivamente, estendemos a lógica clássica de primeira ordem, dotando-a de um conjunto de crenças e, conforme as propriedades que o subconjunto *q* apresenta, ele descreve uma forma particular de raciocínio indutivo, ou seja, uma particularização das lógicas moduladas (GRÁCIO, 1999, p.76).

Os quantificadores formalizados pelas lógicas moduladas são os quantificadores generalizados, tais como: *a maioria*, *muitos* e *para uma boa parte*.

2.2 A sintaxe da Lógica do Plausível

A Lógica do Plausível (LP) é um tipo particular de Lógica Modulada, cuja linguagem, denotada por $L^{\tau}_{\omega\omega}(\boldsymbol{P})$, é a extensão da linguagem clássica de primeira ordem $L^{\tau}_{\omega\omega}$ dada pelo acréscimo do quantificador do plausível $\boldsymbol{P}$.

Em vista disso, as definições sintáticas, para $L^{\tau}_{\omega\omega}(\boldsymbol{P})$, como fórmula bem formada, demonstração, teorema, dentre outras, coincidem com as definições da lógica clássica. Como a lógica do plausível é apresentada num sistema axiomático, os axiomas de $L^{\tau}_{\omega\omega}(P)$ são todos aqueles da lógica clássica $L^{\tau}_{\omega\omega}$, incluindo os axiomas da igualdade (identidade), sendo adicionados axiomas para as fórmulas quantificadas com o novo quantificador generalizado P. Para isso, foram acrescidos à parte clássica os seguintes axiomas para o quantificador P:

Ax_1: $Px\theta \wedge Px\lambda \rightarrow Px(\theta \wedge \lambda)$;
Ax_2: $Px\theta \wedge Px\lambda \rightarrow Px(\theta \vee \lambda)$;
Ax_3: $\forall x\theta \rightarrow Px\theta$;
Ax_4: $Px\theta \rightarrow \exists x\theta$;
Ax_5: $\forall x(\theta \leftrightarrow \lambda) \rightarrow (Px\theta \leftrightarrow Px\lambda)$;
Ax_6: $Px\theta(x) \rightarrow Py\theta(y)$, se y é livre para x em $\theta(x)$.

No sistema axiomático de $L^{\tau}_{\omega\omega}(P)$, as regras de inferência são a *Modus Ponens* (MP) e a Generalização (Gen).

Uma observação que consideramos relevante nesta apresentação da sintaxe da lógica do plausível, diz respeito à independência do axioma Ax_5. Além disso, este axioma não poderá ser obtido a partir de $\forall x\ (\theta \rightarrow \lambda) \rightarrow (Px\theta \rightarrow Px\lambda)$, pois este é um axioma que caracteriza outro sistema de lógica modulada, a lógica dos ultrafiltros de Sette, Carnielli e Veloso (1999) que, no entanto, não é válido sempre na lógica do plausível. Uma justificativa a respeito da não validade desta tentativa de ampliar (modelos para) o axioma Ax_5 será dada na seção seguinte mediante a interpretação semântica desta lógica. Em suas considerações finais, Grácio (1999, p. 178) faz menção a este fato ao considerar a lógica do plausível como um subsistema da lógica dos ultrafiltros, uma vez que a noção de plausibilidade ("boa parte") não é expandida a superconjuntos de conjuntos plausíveis por não possuir como teorema fórmulas do seguinte tipo:

$\forall x\ (\theta \rightarrow \lambda) \rightarrow (Qx\theta \rightarrow Qx\lambda)$, em que Q denota o quantificador generalizante.

2.3 A semântica da Lógica do Plausível

Para formalizar a noção de crença presente em argumentos indutivos do tipo "para uma 'boa parte' de x, $\theta(x)$", Grácio (1999, p. 139) propõe uma estrutura matemática denominada *topologia reduzida* para tratar destes conjuntos de crenças. Segundo Grácio (1999), o conceito de topologia usual não apresenta duas noções associadas ao raciocínio indutivo, neste caso, noção de plausibilidade, a saber:

(a) na topologia usual temos que $\varnothing \in \Im$ (aqui $\Im$ denota uma topologia qualquer). Mas é sabido que não é indutivo inferirmos proposições em que nenhum indivíduo corrobore essas asserções.
(b) outra cláusula da topologia usual diz que "a reunião de uma família qualquer de abertos é um aberto". Contudo, as operações de raciocínios indutivos, sejam elas realizadas por humanos ou pela máquina, são de natureza finita.

Com relação ao item (b), pensamos que a cláusula da topologia usual que permitia uma reunião infinita de abertos, quando alterada para uma reunião finita, poderia gerar questionamentos acerca de considerarmos o *finito muito grande*. Porém, a despeito do finito ser potencialmente muito grande, apontamos para o *critério de relevância* dado quando buscamos informações no nosso conjunto de premissas e teoremas já demonstrados. Diante disso, uma cláusula é estabelecida de modo que a reunião de dois conjuntos quaisquer de $\Im$ pertença a $\Im$.

Dessa forma, Grácio define uma *topologia reduzida* como uma família $\Im$ de subconjuntos de um conjunto U, chamados de *subconjuntos abertos reduzidos*, que contemplam as cláusulas seguintes:

(i) a interseção de dois subconjuntos abertos reduzidos quaisquer é um subconjunto aberto reduzido;
(ii) a reunião de dois subconjuntos abertos reduzidos quaisquer é um subconjunto aberto reduzido;
(iii) U é um subconjunto aberto reduzido;
(iv) O subconjunto $\varnothing$ não é um aberto reduzido.

Aqui, definições análogas às de topologia são dadas para *espaço topológico reduzido* e *subconjuntos fechados*.

Segundo Grácio (1999, p. 148), uma *estrutura topológica reduzida* $\boldsymbol{A}^{\Im}$ é estabelecida mediante a inclusão de uma topologia reduzida na estrutura clássica de primeira ordem, temos:

$\boldsymbol{A}^{\Im} = \langle A, \{ R_i^A \}_{i\in I}, \{ f_j^A \}_{j\in J}, \{ c_k^A \}_{k\in K}, \Im^A > = < \boldsymbol{A}, \Im^A \rangle$

Para esta estrutura consideramos os seguintes componentes:

Dado um tipo $\tau = <I, J, K, T_0, T_1>$ e uma estrutura de tipo τ indicada por

$$\boldsymbol{A} = \langle A, \{ R_i^A \}_{i\in I}, \{ f_j^A \}_{j\in J}, \{ c_k^A \}_{k\in K} \rangle$$

Em que (suposições clássicas para o alfabeto):

(i) A é um conjunto não vazio denominado o universo ou domínio de $\boldsymbol{A}$;

(ii) $\{ R_i^A \}_{i\in I}$ é uma família, para cada $i\in I$, em que R_i^A é uma relação de aridade $T_0(i)$ definida em A, ou seja, $T_0(i) = n$ e $R_i^A \subseteq A^n$;

(iii) $\{ f_j^A \}_{j\in J}$ é uma família, para cada $j\in J$, em que f_j^A é uma função de aridade $T_1(j)$ definida em A, ou seja, $T_1(j) = n$ e $f_j^A : A^n \to A$;

(iv) $\{ c_k^A \}_{k\in K}$ é uma família de constantes de A.

Uma topologia reduzida sobre A é denotada por $\Im^A$.

Em seguida, vemos definida a noção de *interpretação* dos símbolos relacionais, funcionais e constantes individuais de maneira análoga à clássica ($L^{\tau}_{\omega\omega}$ em $\boldsymbol{A}$).

Com relação à noção de *satisfação* das fórmulas de $L^{\tau}_{\omega\omega}(P)$, por meio da estrutura $\boldsymbol{A}^{\Im}$, a definição desta noção segue de modo usual por recursividade, e acrescentamos a noção de satisfação para as sentenças que apresentam o quantificador generalizado P da seguinte forma:

$\boldsymbol{A}^{\Im} \vDash Px\theta \Leftrightarrow \{b \in A / \boldsymbol{A}^{\Im} \vDash \theta(b)\} \in \Im^A.$

Outras noções semânticas usuais como as noções de modelo, validade, entre outras, são definidas da maneira clássica.

Retornemos à parte sintática, agora para interpretarmos semanticamente os axiomas descritos na Seção 2.2; na qual $[\varphi] = \{b \in A / \boldsymbol{A}^{\Im} \vDash \varphi(b)\}$. Assim, podemos verificar que:

O Ax_1 capta a noção semântica da cláusula (i) da topologia reduzida, a qual diz que se [θ] e [λ] são ambos abertos reduzidos, então $[\theta \cap \lambda]$ também é um aberto reduzido.

O Ax_2 afirma que se [θ] e [λ] são ambos abertos reduzidos, então $[\theta \cup \lambda]$ também é um aberto reduzido. Essa interpretação equivale à cláusula (ii) da topologia reduzida.

Interpretamos o Ax_3 com a cláusula (iii) da topologia reduzida: se [θ] é o universo, então ele é um aberto reduzido.

Pelo Ax_4 vemos que se [θ] é um aberto reduzido, então $[\theta] \neq \varnothing$, isto é, equivale à cláusula (iv) da topologia reduzida.

Interpretamos o Ax_5 da seguinte maneira: "se [θ] = [λ], então [θ] é um aberto reduzido, quando e somente quando [λ] também for um aberto reduzido".

Para o axioma Ax_6, a interpretação é análoga ao caso clássico.

Nesse momento, temos elementos para justificar a discussão promovida na seção anterior pelo fato da fórmula $\forall x\, (\theta \rightarrow \lambda) \rightarrow (\mathcal{P}x\theta \rightarrow \mathcal{P}x\lambda)$ não se caracterizar como um teorema válido da lógica do plausível. Admitir a fórmula anterior é afirmar que se $[\theta] \subseteq [\lambda]$ e [θ] é um aberto reduzido, então [λ] é um aberto reduzido. Facilmente percebemos que nem sempre isto é válido na lógica do plausível. Podemos considerar o contra-exemplo seguinte: Seja A = {a, b, c, d} e a topologia reduzida $\Im = \{A; \{b\}; \{a, b\}; \{b, d\}; \{a, b, d\}\}$. Temos que **[θ]** = {a, b} $\subseteq$ {a, b, c} = [λ], entretanto vemos que, embora [θ] seja um aberto reduzido, [λ] não é um aberto reduzido.

Apresentamos assim, a estrutura que formaliza a noção de crença indutiva de 'boa parte' por meio de seu quantificador generalizado $\mathcal{P}$, presente na linguagem natural. Contudo, para que possamos, com efeito, promover uma discussão sobre o tipo de raciocínio indutivo gerado por esta lógica e partir para um esboço de seus princípios indutivos, abordaremos a seguir o raciocínio genérico em $L^{\tau}_{\omega\omega}(\mathcal{P})$.

2.4 Inferências via raciocínio genérico e seus princípios indutivos

A Lógica do Plausível possibilita engendrar um tipo de raciocínio indutivo, qual seja, o *raciocínio genérico*, formalizado pela aplicação da *Teoria do Plausível* em $L^{\tau}_{\omega\omega}(\mathcal{P})$, a qual por sua vez, é definida como um conjunto de fórmulas de $L^{\tau}_{\omega\omega}(\mathcal{P})$ que se apresenta fechado sob as regras de inferências *Modus Ponens*, Generalização e uma terceira regra de inferência, definida como *Regra do Plausível* (RP).

Segundo Grácio (1999, p. 157), a regra do plausível permite inferir para um *indivíduo genérico* um comportamento (propriedade) presente em 'boa parte' dos indivíduos do universo.

A Regra do Plausível (RP) é: $\dfrac{\mathcal{P}x\theta(x)}{\theta(g)}$

em que g é um indivíduo genérico.

Definimos a Regra do Plausível em $L^{\tau'}_{\omega\omega}(\mathcal{P})$, na qual ampliamos o tipo de similaridade considerando $\tau' = \tau \cup \{g\}$, pois g é uma *nova* constante (em relação à τ), denominada uma *constante genérica*.

Nesse raciocínio, o quantificador do plausível $\mathcal{P}$ é um generalizador (não torna a proposição universal) e formaliza a crença indutiva de "boa parte". Nesse sistema lógico poderão existir sentenças do tipo: "boa parte das aves voa" e "existem aves que não voam".

Essas sentenças não tornariam o sistema inconsistente. Todavia, se substituirmos a sentença "boa parte das aves voa" por "todas as aves voam", então ao universalizar a primeira sentença, ocorreria inconsistência com a segunda proposição, a qual afirma a existência de aves que não voam.

Ainda neste raciocínio, a regra RP permite deduzir que um indivíduo genérico "g" tenha a propriedade θ, diante da informação / premissa que "boa parte de x, θ (x)", e tendo em vista que, por definição, g é uma constante nova, assim não haverá informação contrária sobre este indivíduo. Por exemplo, se "g" é uma constante genérica em $L^{\tau}_{\omega\omega}(\mathcal{P})$ e se em Γ (conjunto de premissas) existir $\mathcal{P}x\theta(x)$, então podemos deduzir θ(g), por meio da RP. Todavia, quando $\Gamma = \{\mathcal{P}x\theta(x), \neg\theta(g)\}$, temos que θ(g) não é uma *conseqüência genérica* de Γ, pelo uso da RP, pois "g" já faz parte do conjunto de constantes e, por isso não podemos aplicar a regra. Esse fato justifica a não inconsistência de um sistema que afirma que 'boa parte' dos indivíduos apresenta determinada propriedade e que existem indivíduos neste universo que não apresentam igual propriedade. Conjecturemos, apenas como ilustração, que $\mathcal{P}x\theta(x)$ afirme intuitivamente que "uma boa parte das aves voa" e ¬θ(a) denote que "a ave avestruz não voa". A conjunção dessas proposições não seria contraditória.

De fato, o quantificador generalizante do plausível $\mathcal{P}$ será o responsável por expressar as crenças obtidas pelas evidências favoráveis, e, assim, destacamos o princípio indutivo desta lógica e relacionamos com o método científico como segue.

> [...] a presença de instâncias negando as crenças apresentadas não necessariamente as derrubam [falsificam] [...]. Enquanto Popper [e toda a ciência] estava preocupado com proposições universais obtidas com base na experiência, nós estamos basicamente preocupados com proposições que afirmam fatos que apresentem evidências positivas a seu favor, mas não necessariamente certos (GRÁCIO, 1999, p. 179).

A lógica do plausível, proposta por Grácio para formalizar um tipo de raciocínio indutivo, surge não como uma "solução" para o problema epistemológico da indução, pois como colocado acima, este raciocínio genérico não se preocupa com asserções universais. Ao contrário, este sistema contribui para a discussão dos princípios próprios da indução, a qual infere proposições prováveis num ambiente de informações incompletas (incerteza) e casos não-observados e, nesse sentido, este tipo de inferência está racionalmente justificado.

Esse sistema "não depende da noção de conjunto grande, mas está vinculada à noção de um conjunto suficiente de evidências para a inferência da crença indutiva" (GRÁCIO, p. 177) e, além disso, contempla os requisitos de avaliação da lógica clássica, como os teoremas da dedução, da consistência, da correção e da completude. Podemos, diante disso, dizer que a lógica do plausível fornece alguns mecanismos dedutivos para justificar racionalmente um tipo de indução, enquanto processo lógico.

Porém, a despeito de se ter caracterizado uma fundamentação racional (ou lógica) para um tipo particular de indução, ainda não conseguimos sobrepujar o problema epistemológico da indução, visto que a ciência busca fundamentar-se em princípios inabaláveis, isto é, necessariamente certos, o que de nenhum modo a indução é capaz de fornecer como ferramenta lógica para instaurar tais asserções.

3. Apresentando a Lógica do plausível num sistema de Tableaux Semânticos

Apresentamos a LP através de um sistema de tableaux semânticos, que constitui uma versão distinta do sistema hilbertiano introduzido originalmente por Grácio. A relevância desta proposta dá-se pelas possibilidades de aplicação computacional, visto o tableau como um provador automático de teoremas, e ainda, por este sistema contemplamos o "critério de relevância", abordado na Seção 2.3, no sentido de manipular uma reunião finita de proposições plausíveis (abertos reduzidos).

3.1 Sobre os Tableaux Analíticos

O termo *tableaux analíticos* foi introduzido por Raymond M. Smullyan em 1968. Encontramos em Fitting (1999, p. 7) um histórico detalhado sobre o surgimento desse método, no qual o sistema de tableaux de Smullyan é apontado como uma variante dos *tableaux semânticos* de Zbigniew Lis (1960), que por sua vez desenvolve os trabalhos de E. W. Beth (1959).

Beth utiliza o *princípio de subfórmula*, que diz que se uma fórmula tem uma demonstração, então ela tem uma demonstração na qual ocorrem apenas subfórmulas da fórmula inicial.

As subfórmulas, que também são fórmulas, são partes de fórmulas anteriormente estabelecidas. O aspecto *semântico* para Beth seria o de poder estabelecer a validade de fórmulas, caracterizada pela busca sistemática de contra-exemplos; na ausência de qualquer contra-exemplo, a fórmula é válida. Isto vale, ao menos, para a lógica proposicional, tendo em vista a indecidibilidade da lógica de predicados de primeira-ordem.

O aspecto *analítico* para Smullyan (1968) deve-se ao fato de ele não seguir à risca o princípio das subfórmulas, mas exigir menos restrições, ou seja, para Smullyan, dada uma fórmula inicial, vamos às partes fundamentais desta ou de alguma fórmula equivalente a ela, para que diminuamos seu grau. Para Smullyan (1968, p. 8), o *grau* de uma fórmula é definido pelo número de ocorrências de conectivos lógicos. Desse modo, uma variável proposicional tem grau zero e, assim, pelo princípio de indução, ele define os demais casos.

Desde logo, é inteiramente lícito afirmarmos que a proposta de Smullyan constitui-se num eficiente procedimento de prova, ou ainda, num procedimento de decisão para as fórmulas válidas das lógicas clássicas proposicional e de predicados. Esta proposta pode, da mesma forma, ser considerada uma variante dos métodos de K. J. J. Hintikka (1955), como destaca Smullyan (1968, p. 15).

Todos estes trabalhos foram, de algum modo, inspirados em Gerhard Gentzen (1935), que introduziu os *sistemas de provas* que eram caracterizados por admitir o princípio das subfórmulas. Além disso, a *Teoria da Prova* desenvolvida por Gentzen consistia em demonstrar a validade de um argumento de uma maneira usualmente mais rápida, apenas trabalhando com regras em métodos finitários. Esses sistemas de provas são hoje conhecidos como *Dedução Natural* e *Cálculo de Seqüentes*.

Atualmente, a Teoria da Prova consolida-se como uma rica subárea da Teoria da Computação. Como um tópico avançado de lógica, a Teoria da Prova pode ser compreendida como *demonstração automática* de teoremas e, daí, o interesse da Ciência da Computação em dominá-la. O estudo das propriedades estruturais de provas formais constitui o cerne da pesquisa relacionada à Teoria da Prova, que por sua vez está relacionada com o conceito de decidibilidade desde os tempos de David Hilbert. Um resultado bastante importante sobre as propriedades estruturais de provas formais é o *Teorema da Eliminação do Corte* para o cálculo de seqüentes, introduzido por Gentzen, em 1935, conhecido como o teorema *Hauptsatz*. Este teorema garante que, se existe uma prova para uma dada fórmula, então existe uma outra prova, *normal* ou *sem cortes*, a qual tem forma e propriedades determinadas. Podemos estabelecer, a partir disso, limites para o tamanho da prova de uma fórmula dada. Os "provadores automáticos" de teoremas e da programação em lógica têm sido desenvolvidos com o avanço de tais resultados.

Smullyan (1968), ao introduzir o sistema de prova denominado tableaux analíticos, buscou estabelecer as relações deste com os métodos originais de Gentzen. Para termos conhecimento da multiplicidade dessas relações, Castro (2004, p. 9) aponta para o fato de que o *sistema de dedução natural*, desenvolvido por Lis (1960), visto como uma reestruturação a partir das formulações de Gentzen, pode ser hoje identificado com *sistemas de tableaux não-assinalados*.

A proposta de Smullyan (1968) foi apresentar os sistemas de *tableaux* assinalados e não-assinalados, além de se preocupar com questões como a consistência e a completude desses sistemas, aspectos em que Gentzen não se deteve em seu trabalho. Talvez, por isso mesmo muitos têm estudado os sistemas de Gentzen na tentativa de contemplarem tais aspectos.

Ademais, um sistema de tableaux analíticos constitui-se num sistema de prova automática de teoremas, caracterizando-se como um algoritmo. Por isso, grosso modo, pode ser visto como um método de decisão para as fórmulas válidas de uma lógica específica, assim como as *tabelas de verdade* o são para a lógica proposicional clássica. Evidentemente, este método possui limitações decorrentes da indecidibilidade das lógicas de predicados de primeira ordem.

3.2 O sistema de tableaux analíticos TLP para a lógica do plausível

Conforme abordada acima, a Lógica do Plausível é uma extensão da lógica clássica de primeira ordem, pelo acréscimo do quantificador $\mathcal{P}$. Desse modo, vamos preservar toda a estrutura formalizada para o cálculo de predicados de primeira ordem clássico, mantendo todas as definições clássicas (ver Smullyan, 1968, p. 24), exceto a definição de ramo fechado, cujas cláusulas para o fechamento dos ramos serão ampliadas para o novo quantificador $\mathcal{P}$.

Definição 3. 2. 1. Um ramo no sistema **TLP** é *fechado* quando ocorre no ramo:

i) φ e $\neg\varphi$;
ii) $\mathcal{P}x\theta$ e $\neg\, \mathcal{P}y\theta$, em que y é livre para x em $\theta(x)$;
iii) $\mathcal{P}x\theta$ e $\mathcal{P}x\neg\theta$.

Observação 3. 2. 2. Simbolizamos o ramo fechado colocando o símbolo '$\times$' no final do ramo.

Regras de Expansão 3. 2. 3. As regras de expansão utilizadas no sistema **TLP** são todas as regras clássicas *à la* Smullyan (1968), acrescidas de regras para o quantificador $\mathcal{P}$. As regras adicionais são as seguintes:

Nome da regra	Regra	Nome da regra	Regra
P	$\dfrac{\mathcal{P}x\theta}{\theta[x/a]}$ em que ‘a’ é uma constante nova no ramo.	$\neg$P	$\dfrac{\neg\,\mathcal{P}x\theta}{\neg\theta[x/a]}$ em que ‘a’ é uma constante nova no ramo.
$\wedge$P	$\dfrac{\begin{array}{c}Qx\theta\\ \mathcal{P}x\lambda\end{array}}{\begin{array}{c}\mathcal{P}x(\theta\wedge\lambda)\\ \mathcal{P}x(\theta\vee\lambda)\end{array}}$	P$\neq$	$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}x\theta\\ \neg\,\mathcal{P}x\lambda\end{array}}{\neg\forall x\,(\theta\leftrightarrow\lambda)}$

Restrições às Regras:

Na regra $\wedge$P: • Aqui, $\lambda \neq \neg\theta$, e o símbolo Q denota a ocorrência de um dentre os dois quantificadores “universal” ou “plausível”, isto é, ou $Q = \forall$ ou $Q = \mathcal{P}$.

Na regra P$\neq$: • $\lambda \neq \theta$.

Ademais, comentamos acerca de alguns aspectos na aplicação das regras $\wedge$P e P$\neq$ para tornar essa aplicação um procedimento algorítmico.

Se ao aplicarmos a regra $\wedge$P não obtemos uma inconsistência, então podemos, para cada uma das premissas da regra, aplicar a regra (P) ou a regra clássica ($\forall$), quando for o caso. Na aplicação da regra P$\neq$, se nenhuma inconsistência é estabelecida, então podemos aplicar a regra (P) ou ($\neg$P), quando for o caso.

Observação 3. 2. 4. Vemos que as condições para o fechamento de um ramo no sistema **TLP** não são apenas as condições clássicas. Por exemplo, para a cláusula (iii), caso tenhamos $\mathcal{P}x\theta \wedge \mathcal{P}x\neg\theta$, estamos afirmando que os conjuntos $[\theta]$ e $[\neg\theta]$ são abertos reduzidos, e, de acordo com a topologia reduzida, a intersecção de dois abertos reduzidos necessariamente deverá ser um aberto reduzido. Entretanto, vemos que a intersecção desses conjuntos, que são complementares entre si, é vazia, e desta forma o vazio seria um aberto reduzido, contrariando a definição de topologia reduzida, em que $\varnothing \notin \Im$ ($\Im$ é uma topologia reduzida). Por esta mesma razão, na lógica do Plausível temos o seguinte teorema: $\mathcal{P}x\theta \rightarrow \neg\,\mathcal{P}x\neg\theta$.

Por outro lado, a inconsistência gerada ao assumirmos $(\mathcal{P}x\theta) \wedge (\mathcal{P}x\neg\theta)$, não é intuitiva em algumas aplicações da Lógica do Plausível, o que nos exige uma clarificação acerca da noção de “boa parte” que este quantificador $\mathcal{P}$ formaliza.

Consideremos, então, o aspecto da aplicação da Lógica do Plausível mediante a comparação de outros quantificadores modulados. Nossa comparação será feita em caráter intuitivo, dispensando assim uma apresentação formal da lógica desenvolvida para cada um destes outros quantificadores, determinada pelas lógicas moduladas. Sejam as proposições:

P_1. "muitos" dos brasileiros tomam vinho e "muitos" não tomam.

P_2. "boa parte" dos brasileiros toma vinho e uma "boa parte" não toma.

P_3. "a maioria" dos brasileiros toma vinho e "a maioria" não toma.

Desses exemplos, é intuitiva a conjunção (P_1), pois o conjunto que satisfaz a proposição (aqueles que tomam vinho) sob o escopo de "muitos" não exige que seu complementar (aqueles que não tomam) seja pequeno.

A conjunção (P_3) é um contra-senso, pois se "a maioria toma vinho", não é razoável aceitarmos, ao mesmo tempo, que "a maioria não toma", pois o conjunto que satisfaz a proposição sob o escopo de "a maioria" exige que seu complementar não a satisfaça.

A noção intuitiva de "boa parte", presente em (P_2), é mais vaga que as noções de "muitos" e "a maioria" e por isso mesmo, tendemos a aceitar a conjunção (P_2) como não sendo contraditória. Contudo, este tipo de conjunção ($\mathcal{P}x\theta$ e $\mathcal{P}x\neg\theta$) é inviável sob a noção de "boa parte", formalizada pelo quantificador $\mathcal{P}$ ("p é plausível" ou "p é acreditado").

Sabemos, também, que a fórmula $(\mathcal{P}x\varphi \wedge \mathcal{P}x\lambda) \rightarrow \exists x(\varphi \wedge \lambda)$ é teorema da Lógica do Plausível, o que justifica a impossibilidade de admitirmos (P_2), sob a noção de "boa parte" desta lógica, pois em (P2) temos que $\lambda = \neg\varphi$.

A estrutura de "topologia reduzida" que semanticamente esta lógica apresenta, evidencia o fato de que "$\mathcal{P}x\theta$ possa ser interpretado como $\theta(x)$ é ser ubíquo" (Grácio, 1999, p. 143), isto é, "θ vale em quase toda parte".

A Lógica do Plausível independe da noção de conjunto grande, isto é,

> [...] estamos preocupados em observar a presença ou ausência de plausibilidade de uma inferência, mas não com o grau de plausibilidade. (...) O conceito que desejamos formalizar está, desse modo, desvinculado da noção de cardinalidade do conjunto de confirmações ou evidências. (GRÁCIO, 1999, p. 133).

Em vista disso, o quantificador do plausível está vinculado à noção de um conjunto suficiente de evidências para a inferência da crença indutiva.

A inconsistência encontrada em (P_2) pode ser apontada pela seguinte inquirição: Como pode ser plausível a crença em θ, se consideramos plausível a crença em $\sim\theta$, e vice-versa?

4. A equivalência entre o sistema hilbertiano $L^{\tau}_{\omega\omega}(\mathcal{P})$ e o sistema de tableaux TLP

A partir deste momento, nos propomos a demonstrar a equivalência entre o sistema hilbertiano de $L^{\tau}_{\omega\omega}(\mathcal{P})$, abordado na Seção 2, e o sistema de tableaux **TLP** introduzido na Seção 3.

Denotamos que a fórmula φ é conseqüência analítica de Γ por $\Gamma \Vdash \varphi$. No sistema hilbertiano da Lógica do Plausível, representamos, respectivamente, φ uma conseqüência lógica (sintática) de Γ e φ uma conseqüência semântica de Γ, por $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vDash \varphi$.

Ao demonstrarmos que $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \varphi$, estaremos estabelecendo a equivalência entre as conseqüências lógicas de cada sistema dedutivo abordado e, uma vez que em Grácio (1999, p. 149) está demonstrada a correção e completude do sistema axiomático de $L^{\tau}_{\omega\omega}(P)$, nosso sistema de tableaux **TLP** também será correto e completo.

Para os teoremas seguintes será admitida a completude forte do tableau clássico de primeira ordem. Uma demonstração do teorema da completude para o sistema de tableaux clássico de primeira ordem pode ser encontrada em Smullyan (1968, p. 60), ou em Bell e Machover (1997, p. 88).

Teorema 1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demonstração: (ver Silvestrini, 2005, p. 109) ■

Teorema 2. Se $\Gamma \Vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstração: (ver Silvestrini, 2005, p. 118) ■

Desse modo, estabelecemos, pelos Teoremas 1 e 2, a equivalência entre o sistema axiomático $L(P)$ e o sistema de tableaux **TLP**. Além disso, como observado acima, ao estabelecermos a equivalência desses sistemas para a lógica do plausível $L(P)$, também mostramos que o sistema de tableaux **TLP** é correto e completo relativo à semântica de estruturas topológicas reduzidas.

Um sistema de tableaux é visto como uma apresentação distinta de dedução indireta, ou seja, este sistema é visto como um *método de prova de validade* de um argumento, ou ainda, como um método de refutação, pois busca encontrar situações (ramos) em que é possível supor a negação da tese, sem gerar inconsistência alguma (ramos abertos), refutando assim o argumento.

Para discutirmos o que seria refutar um argumento baseado numa forma particular de raciocínio indutivo, engendrado pela lógica do plausível, destacamos dois argumentos desta lógica e promovemos uma análise por meio de tableaux.

Ao construirmos o tableau para o argumento $Px\theta, \neg\theta(a) \Vdash \exists x\theta$, obtemos:

1.	$Px\theta$	
2.	$\neg\theta(a)$	
3.	$\neg\exists x\theta$	
4.	$\theta(b)$	P, 1
5.	$\neg\theta(b)$	$\neg\exists$, 3
6.	$\times$	

Na tentativa de refutar o argumento, mantendo as premissas e negando a conclusão, chegamos a uma contradição, o que indica que o argumento é válido, isto é, não conseguimos obter contra-exemplo. Podemos ilustrar o argumento da seguinte maneira. Se "Boa parte das aves voa" e "o pingüim não voa", então "existe ave que voa". Daí, se supormos o contrário, ou seja, que não existe ave que voa, geramos uma contradição, indicando que nossa suposição de negar a conclusão do argumento está errada.

Para um argumento da forma $Px\theta \Vdash \neg\exists x\theta$, temos o tableau seguinte:

1.	$\mathcal{P}x\theta$	
2.	$\neg\neg\exists x\theta$	
3.	$\exists x\theta$	DN, 2
4.	$\theta(a)$	P, 1
5.	$\theta(b)$	$\exists$, 3

Obtemos um tableau no qual seu único ramo não é fechado, e isso indica que a tentativa de refutar o argumento teve êxito, pois inicialmente foi suposto a negação da tese e, admitindo-se a premissa, nenhuma inconsistência foi encontrada. Nessas condições, dizemos que o argumento não é válido. No seu único ramo devemos notar que o tableau constrói um contra-exemplo, isto é, a suposição de que a negação da conclusão pudesse ocorrer não gerou contradição. Podemos exemplificar a refutação deste argumento na linguagem natural da seguinte maneira: "Não é verdade que não existem aves que voam, pois sabemos que as araras sendo aves voam, que as águias voam, etc".

Dessa forma, se considerarmos a proposição "não existem aves que voam" como uma hipótese ou conjectura, o tableau atuará como uma ferramenta para testar se diante das premissas existentes (proposições de observações), temos tal hipótese falseada ou validada.

5. Considerações Finais

Caminhamos por um tipo de lógica dedutiva monotônica que formaliza um raciocínio genérico indutivo, isto é, por meio da Lógica do Plausível formulamos proposições que expressam comportamentos generalizados, não universais, como para "'boa parte' dos casos..." Construídos desta maneira para adequarem-se às proposições singulares observadas, ou pelas evidências positivas encontradas. Dessa forma, este raciocínio genérico não gera inconsistência ao receber um contra-exemplo da proposição generalizada e, neste caso, as inferências realizadas são consideradas como "a melhor opção" baseando-nos nas informações disponíveis (e de certa forma incertas).

Ao introduzirmos o sistema **TLP**, o qual se mostrou um sistema dedutivo equivalente ao sistema hilbertiano, para a Lógica do Plausível, pudemos observá-lo como um método dedutivo de prova (validade) e evidenciar a existência de casos desfavoráveis (contra-exemplos da forma $\mathcal{P}x\theta$ e $\neg\theta(a)$) sem, entretanto, causar inconsistência ao sistema.

Na Seção 3.2, apontamos para um distanciamento do quantificador "boa parte" e sua noção intuitiva da linguagem natural, pois, por exemplo, a fórmula $\mathcal{P}x\theta \wedge \mathcal{P}x\neg\theta$ não é um teorema da lógica do plausível, contudo se considerarmos como universo de discurso a população brasileira, parece-nos ser inteiramente lícita a afirmação de que uma "boa parte" dos brasileiros gosta de futebol e uma "boa parte" não gosta desta modalidade de esporte. Outro inconveniente dado pela escolha da Topologia Reduzida para modelar este tipo de raciocínio é que podemos ter um aberto reduzido constituindo-se de exatamente um elemento (isto é, apenas um indivíduo satisfazendo determinada propriedade), o que nos parece, também, distanciar da noção intuitiva de "boa parte", ao considerar que "'boa parte' dos indivíduos possui tal propriedade".

Mediante o contexto, pensamos que é pertinente o estabelecimento de uma nova estrutura matemática para modelar esta noção de "boa parte", de maneira que se torne mais próxima da linguagem natural. Além disso, seria interessante experimentar o desenvolvimento de sistemas de tableaux para outros sistemas de lógicas moduladas.

Agradecimento

Agradecemos a CAPES pelo apoio dado a esta pesquisa.

Referências:

BELL, J. L.; MACHOVER, M. *A course in mathematical logic*. Amsterdam: North-Holand, 1977.

CASTRO, M. A. *Hierarquias de sistemas de dedução natural e de sistemas de tableaux analíticos para os sistemas de Cn de Da Costa*. Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004.

DA COSTA, N. C. A. *Sistemas formais Inconsistentes*. Tese de doutorado – Universidade Federal do Paraná, 1963.

FITTING, M. C. Introduction. In: D´AGOSTINO, M; GABBAY, D.V.; HAHNLE, R.; POSEGGA, J. (Eds.). *Handbook of Tableaux Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. p. 1- 43.

GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische Schlieben. *Mathematische Zeitschrift*, v. 39. 1935.

GRÁCIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1999.

HAACK, S. *Philosophy of logics*. Cambridge University Press. 1978.

HINTIKKA, J. Form and content in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica*, v. 8. 1955.

LIS, Z. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica*, v. 10. 1960.

REITER, R. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*. v. 13, p. 81-132, 1980.

SETTE, A. M., CARNIELLI, W. A., VELOSO, P. An alternative view of default reasoning and its logic. In: HAUESLER, E. H.; PEREIRA, L. C. (Ed.) *Pratica: Proofs, types and categories*. Rio de Janeiro: PUC-RJ, Brazil, p. 127-158, 1999.

SILVESTRINI, L. H. C. *Tableaux e indução na lógica do plausível*. Dissertação de mestrado (Mestrado em Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista. Marília, 2005.

SMULLYAN, R. M. *First-order logic*. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.