IDENTIDADE, INDIVIDUALIDADE E QUASE-CONJUNTOS

Jonas Becker
Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência UFSC/CNPq
Programa de Pós-Graduação em Filosofia - UFSC

Décio Krause
Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência UFSC/CNPq
Programa de Pós-Graduação em Filosofia - UFSC

Abstract: This is an expository paper in which we present some motivations that have conduced to quasi-set theory, whose main ideas are also sketched.

Keywords: individuals, individuality, quasi-sets, philosophy of quantum mechanics.

1. Indivíduos e individualidade

Para a maioria das pessoas, os objetos com os quais nos defrontamos no dia a dia são considerados *indivíduos*, entidades que *têm identidade* e *individualidade*. Pedras, cadeiras e livros são, em geral, tomados, sem muita dúvida, como exemplos incontestáveis de indivíduos. No entanto, se fôssemos pressionados, como explicaríamos a individualidade desses objetos? A estratégia mais simples nos sugere que essa individualidade pode ser explicada em termos de propriedades possuídas pelos objetos, de modo que objetos que possuem propriedades distintas são indivíduos distintos. Adotando este tipo de explicação, temos então o problema de saber se pode ser o caso que dois objetos podem possuir as mesmas propriedades. Como garantir que estamos livres desta situação, que parece bem intuitiva? Podemos, neste caso, seguir Leibniz, e adotar um princípio que garanta que não é possível que dois objetos possuam todas as mesmas propriedades em comum sem que sejam *o mesmo* objeto. Note-se que esta abordagem ao problema da individualidade faz com que a individualidade e distingüibilidade colapsem em uma só noção; aquela é explicada em termos desta.

Por outro lado, podemos não estar satisfeitos com a resposta acima, e argumentar que, pelo menos em princípio, é possível que imaginemos dois objetos que possuem todas as mesmas propriedades, sem que no entanto sejam o mesmo. Esta hipótese metafísica foi sustentada por Leibniz em várias partes de sua obra, e é conhecida como princípio da identidade dos indiscerníveis. Ramsey e Wittgenstein foram dois importantes filósofos que defenderam essa posição no escopo da lógica atual, que incorpora a noção leibniziana vista acima de alguma forma. Ambos criticaram a definição de identidade dada nos *Principia Mathematica* (que é uma forma da identidade leibniziana) sob a alegação de que se pode supor, sem contradição, que haja objetos distintos indiscerníveis. Há mais tempo, Kant questionou o princípio de Leibniz, como se sabe, recorrendo à localização espacial e temporal dos objetos (ver mais abaixo). Como garantir a individualidade neste caso de poder haver mais de um objeto com as mesmas propriedades? Uma das soluções é apelar para alguma forma de substrato - no caso da mecânica quântica, ver (Teller 1998) -, algo que seria próprio de cada indivíduo e que, sendo subjacente a todas as suas propriedades, não poderia ser expresso em termos dessas propriedades. Neste caso, apesar de poderem compartilhar propriedades e não serem em alguns casos distinguíveis por elas, podemos ter indivíduos diferentes, já que não são as propriedades que garantem a individualidade. Todo indivíduo, nessa acepção, teria um *quid*, um "algo" que lhe conferiria identidade e que seria peculiar a ele somente. Neste caso, como se pode notar, individualidade e distingüibilidade são conceitos que permanecem distintos, sendo a distingüibilidade expressa em termos de propriedades dos objetos, e a individualidade dada por esse substrato.

Estas são apenas duas maneiras de responder à questão sobre a individualidade dos objetos do dia a dia. Se considerarmos com mais cuidado, elas envolvem elementos conceituais que visam responder às perguntas sobre o que confere individualidade e o que distingue os objetos, ou seja, como se deve considerar sua distingüibilidade. No primeiro caso, trata-se de explicar a individualidade apelando para as teorias que envolvem os chamados 'pacotes de propriedades', onde algum subconjunto de propriedades dos objetos é invocado como indicando quais seriam as propriedades *essenciais* de cada indivíduo. Em geral, será necessário, como vimos, lançar mão de um princípio que garanta que dois objetos não podem possuir todas as propriedades relevantes em comum, e nesta via, distingüibilidade e individualidade colapsarão no mesmo conceito.

2. A identidade dos indiscerníveis

O princípio que usualmente se utiliza nestes contextos é o chamado 'Princípio da Identidade dos Indiscerníveis' (PII), que pode ser considerado, informalmente, como garantindo que se dois objetos são distintos, então há pelo menos uma propriedade que os distingue. O principal problema com este princípio, que seu defensor deve qualificar, diz respeito à maneira como devemos entender o termo 'propriedades' na formulação informal dada acima. Temos 3 opções: PII1) as propriedades envolvidas são toda e qualquer propriedade, inclusive as relacionais e as propriedades que envolvem localização espaço-temporal; PII2) exclui do escopo das propriedades consideradas aquelas que são espaço-temporais; PII3) a forma mais forte do princípio, envolve apenas as propriedades chamadas monádicas (French e Krause 2006).

A versão PII1 em geral é considerada necessariamente válida, pois, argumenta-se, não é possível que dois objetos possuam todas as mesmas propriedades espaço-temporais e não sejam o mesmo objeto. Implícita nestes argumentos, no entanto, está uma suposição problemática: a chamada Hipótese da Impenetrabilidade (HI), segundo a qual dois objetos não podem ocupar o mesmo local ao mesmo tempo. Um dos problemas com HI diz respeito ao fato de que a hipótese remete a individualidade de objetos para a da individualidade dos pontos no espaço-tempo; como podemos garantir a individualidade e distingüibilidade dos pontos do espaço-tempo, aos quais apelamos para garantir nosso princípio de individualidade, sem nos envolvermos em um caso de circularidade?

No entanto, PII2 e PII3 não são menos controversos. Em geral, admite-se que possam ser apenas contingentemente verdadeiros, mas ainda assim envolvem algumas dificuldades. Note-se que PII1 e PII2, por envolverem relações, estão enredados no problema metafísico de que aparentemente, os indivíduos já estão disponíveis, de algum modo, antes de entrarem em relações, ou seja, relações pressupõem a diversidade dos objetos que estão relacionados. No caso de PII3, seu *status* depende de como se considera as propriedades monádicas. Em geral, acredita-se que formalmente todas as relações podem ser reduzidas a propriedades monádicas, mas novamente, trata-se de posição problemática, e permanece a questão de que, por exemplo, x estar na relação R com *y* não é o mesmo que *x* ter a propriedade 'estar na relação *R* com *y*', ou então de haver uma terceira relação, *H*, que estabeleceria a relação entre *x*, *y* e *R*, como sustentava Bradley. Ainda, PII2 e PII3 têm o inconveniente de que se pode, pelo menos em princípio, fornecer contra-exemplos a eles, se for possível encontrar entidades partilhando todas as propriedades relevantes sem que partilhem a mesma localização espaço-temporal.

No caso em que a individualidade é conferida por algum tipo de substrato, o que se faz é explicar a individualidade dos objetos utilizando-se de uma teoria que faz uso de algum princípio de individualidade transcendental, assim chamada pelo fato de que a individualidade, neste caso, deve ser explicada por algo que *transcende* as propriedades dos objetos. Ainda se considera a distingüibilidade como sendo estabelecida através das propriedades, mas esta noção não coincide com a de individualidade, sendo possível que dois objetos sejam absolutamente indistinguíveis, mas não sejam o mesmo indivíduo.

3. Subdeterminação da metafísica pela física

Quais são as opções neste caso? Pode-se apelar para alguma forma de *substratum* subjacente às propriedades de um indivíduo, que serviria para lhe conferir a individualidade (e a identidade) – ver (Teller 1998) e (French e Krause 2006). O grande desafio, em qualquer das abordagens que buscam um princípio de individualidade em algo que transcende os atributos dos objetos é descrever este 'algo'. Certamente, esta descrição não será feita em termos de propriedades, e assim temos uma tese metafísica bastante difícil de ser sustentada, pois não há qualquer evidência de que exista tal substrato.

Podemos alternativamente procurar entender a individualidade em termos da auto-identidade de qualquer objeto. Em algumas abordagens, ainda é incluída na noção de individualidade a possibilidade de contagem, de modo que em uma dada pluralidade, os indivíduos devem poder ser *contados* cada um deles como apenas um em meio a uma pluralidade (Lowe 1998).

Tendo exposto de maneira bastante resumida e simplificando bastante essas duas estratégias usuais para se dar conta da individualidade de objetos usuais, gostaríamos agora de considerar o mesmo problema, tomando em consideração não os objetos do dia a dia, mas os objetos fundamentais tratados pelas teorias físicas: elétrons, prótons, nêutrons, etc. Neste caso, não podemos sequer assumir logo de saída que seria consensual que estes objetos são indivíduos, pois, segundo uma abordagem que apareceu logo depois do desenvolvimento da mecânica estatística, e que teve vários defensores do calibre de Heisenberg, Schrödinger, Born e Weyl, as partículas quânticas, diferentemente dos objetos do dia a dia, não podem ser considerados indivíduos, mas antes, devem ser tomados como *não-indivíduos*. Podemos, então, considerar que estas partículas são não-indivíduos, entidades sem individualidade, e nos perguntarmos como devemos entender esta não-individualidade. Mas novamente, as coisas não são tão simples, pois há ainda a visão segundo a qual estas partículas são indivíduos, mas de um tipo bastante diferente dos indivíduos com os quais estamos acostumados, pois para sustentar essa visão é necessário introduzir uma série de restrições nos estados possíveis e nos observáveis a serem considerados.

Assim, temos em primeiro lugar, que determinar se os objetos com os quais trata a teoria que estamos usando são ou não indivíduos, e o problema é que a teoria física quântica, através do seu formalismo, não permite que se decida qual a alternativa que devemos adotar. A metafísica, neste caso, fica subdeterminada pela física, como sustentou S. French (French 1998; French e Krause 2006). Cada uma das abordagens possui suas vantagens e desvantagens. Uma das vantagens de se considerar estas partículas como indivíduos é que aparentemente poderemos manter a lógica e a matemática clássicas sem problemas, onde em particular temos versões formalizadas do Princípio da Identidade dos Indiscerníveis de Leibniz.

Por outro lado, tomando as partículas como não-indivíduos, podemos obter as estatísticas quânticas de modo mais coerente com o que se fez historicamente, mas teremos de encarar os seguintes problemas, entre outros: como entender esta não-individualidade, e ainda, como será possível manter coerentemente a lógica e a matemática clássicas neste caso? São estes problemas que pretendemos considerar agora, deixando o caso de se tomar estes objetos como indivíduos para outro trabalho.

4. Individualidade e auto-identidade

Como dissemos acima, uma das maneiras de se entender a individualidade dos objetos era através de sua auto-identidade, era isto que conferia individualidade às coisas. Mas como isto pode nos ajudar a entender a não-individualidade das partículas quânticas? Ora, uma das maneiras que temos para considerar algo como não-indivíduo é negar-lhe a auto-identidade. Isto se deve basicamente ao fato de que, se assumirmos a "propriedade" típica do objeto a, a auto-identidade de a, definida por $P_a(x) \leftrightarrow x = a$, então a expressão $\forall F\ (F(x) \leftrightarrow F(y)) \rightarrow x = y$, que expressa um versão do princípio de Leibniz, é teorema da lógica de segunda ordem. Assim, se queremos ter o antecedente dessa fórmula, que informalmente expressa a noção de *indiscernibilidade* (concordância na propriedades) sem ter o conseqüente, um modo é abandonar o conceito de identidade para certos tipos de entidade. Com isto, não queremos afirmar que um não-indivíduo é diferente de si mesmo, mas antes que a 'propriedade' de ser idêntico a si mesmo não se aplica a esse tipo de entidade.

Qual seria a motivação para uma tal hipótese? Na verdade, é inspirada na concepção de E. Schrödinger sobre as partículas elementares. Segundo Schrödinger, existirão circunstâncias em que a noção de identidade e diferença não fará sentido para estas partículas. Diz ele:

> "Quando você observa uma partícula de certo tipo, digamos um elétron, aqui e agora, isto deve ser tratado em princípio como um evento *isolado*. Mesmo que você observe uma partícula semelhante pouco tempo depois em um lugar muito próximo do primeiro, e mesmo que tenha todas as razões para assumir uma *conexão causal* entre a primeira e a segunda observação, não há nenhum sentido verdadeiro, não-ambíguo, na afirmação de que é a *mesma* partícula que você observou nos dois casos. As circunstâncias podem ser tais que tornem altamente conveniente e desejável se expressar assim, mas é apenas uma abreviação da fala; pois existem casos onde a 'igualdade' se torna inteiramente sem sentido; e não há nenhum limite preciso, nenhuma distinção clara entre eles, há uma transição gradual nos casos intermediários. E eu insisto em enfatizar isto, e rogo que você acredite: não é uma questão de estarmos aptos a afirmar a identidade em alguns casos e não estarmos aptos em outros. Está além da dúvida que a questão da 'igualdade', da identidade, real e verdadeiramente não tem sentido" (Schrödinger 1952, p. 16-18).

Assim, aparentemente, se mantivermos que o princípio que garante a individualidade é fornecido pela auto-identidade, temos uma maneira de compreender o que seriam não-indivíduos, que se coaduna com as opiniões de alguns dos principais defensores da tese de que as partículas quânticas seriam não-indivíduos. O problema, no entanto, é que para se ater a esta concepção de não-indivíduos, ao que tudo indica, teremos de abandonar parte da lógica e da matemática usual, pois, como se sabe, nestes contextos a identidade está sempre definida, e os objetos tratados por estas matemáticas são *indivíduos* em uma acepção bem precisa: podem ser nomeados, rotulados, ordenados, discernidos de outros, contados, etc. Assim, para manter a indiscernibilidade sem que ela acarrete a identidade, podemos desenvolver uma alternativa, na qual a noção de não-indivíduo figure adequadamente. Vamos argumentar que a Teoria de Quase-Conjuntos serve para estes propósitos. Antes de avançar, vamos responder a uma questão que pode estar passando pela mente do leitor: pelo que se disse acima, se usarmos os recursos da lógica e da matemática tradicionais, que acarretam que as entidades tratadas são indivíduos, como poderemos considerar as entidades quânticas como entidades destituídas de individualidade? Vamos responder isso na próxima seção.

5. Princípios de simetria

A noção de indiscernibilidade, ou indistinguibilidade, é central na física quântica. O conceito entra na física já na hipótese feita por Planck quando da derivação de sua equação sobre a radiação do corpo negro. Para deduzi-la, Planck fez a suposição de que P elementos de energia poderiam ser distribuídos em N osciladores de acordo com a fórmula

$$W_N = \frac{(N+P-1)!}{P!(N-1)!}$$

A divisão por P! implica a indiscernibilidade dos quanta. Com efeito, suponha que P = N = 2 (duas "partículas" para serem dispostas em dois "estados" possíveis). "Classicamente", ou seja, se supusermos que os objetos considerados são indivíduos, teremos quatro possibilidades, se chamarmos as configurações resultantes de A e B, e os quanta de *a* e *b*: (1) *a* e *b* estão em A; (2) ambos estão em B: (3) *a* está em A e *b* está em B e (4) *a* está em B e *b* está em A. Este modo de contar, ou "estatística", é conhecido como *estatística de Maxwell-Boltzmann*, e é característica dos objetos da física clássica. A distinção feita entre as situações (3) e (4) diz que, apesar de eles poderem ter as mesmas propriedades, são *indivíduos distintos*, uma vez que a sua permutação acarreta em "estados" diferenciados, e sua individualidade pode ser dada por alguma forma de substrato, como indicado acima. No caso da física quântica, no entanto, a situação é outra. Primeiro, todos os objetos quânticos que se conhece caem sob uma dentre duas categorias: ou são *bósons* ou são *férmions*. Bósons obedecem à "estatística" de Bose-Einstein, na qual as situações (3) e (4) acima são identificadas. Isso faz com que a rotulação das entidades em *a* e *b*, ou seja, a atribuição de nomes, perca o sentido. As situações são: (1') ambas em A, (2') ambas em B e (3') uma em A e outra em B (sem que haja diferenciação). Quanto aos férmions, devido ao fato de que devem obedecer ao chamado Princípio de Exclusão de Pauli, que informalmente diz que não podemos ter mais de um férmion em um dado estado, sobra unicamente a situação (3'). Se tomarmos N = P = 2 e fizermos o cálculo com bósons usando a fórmula de Planck acima, o resultado é exatamente o esperado, 3. Para férmions, teremos uma única possibilidade, exatamente o caso (3').

O modo pelo qual a física quântica considera indiscernibilidade é então o seguinte. Tendo em vista que a nossa linguagem é uma linguagem de objetos, formada a partir de nosso contato e experiência com o nosso contorno, que em princípio é composto por objetos individualizáveis, como vimos acima, referimo-nos a eles por nomes, ou outras formas de identificação, como coordenadas (como *a* e *b* acima), e isso não é diferente em matemática. Formalmente, a situação (1') é descrita por um vetor (ou função de onda) $\psi_A(a)\otimes\psi_A(b)$, onde $\otimes$ denota o produto tensorial entre os espaços de Hilbert relevantes (mas isso não importa para o argumento principal), (2') é descrito por

$\psi_B(a) \otimes \psi_B(b)$, mas para (3') usa-se uma função simétrica (no caso de bósons), a saber $\psi_A(a) \otimes \psi_B(b) + \psi_A(b) \otimes \psi_B(a)$ (exceto por um fator de normalização) e, para férmions, a função é anti-simétrica, a saber, $\psi_A(a) \otimes \psi_B(b) - \psi_A(b) \otimes \psi_B(a)$. A função simétrica é invariante por uma troca de partículas (ou seja, pela troca de *a* por *b* e vice-versa, o que expressa uma *permutação* entre essas entidades), e a função anti-simétrica muda de sinal.

Nessa escolha de funções que representem as configurações de interesse, o que importa é preservar um dos postulados básicos da física quântica, chamado de Postulado da Indistinguibilidade, que diz que o valor esperado (esperança matemática) da medida de um observável qualquer Q para um sistema num estado ψ é o mesmo antes e depois de qualquer permutação entre partículas indiscerníveis que formem o sistema. Isso se expressa assim: $\langle\psi|Q|\psi\rangle = \langle P\psi|Q|P\psi\rangle$, sendo P um "operador de permutação". Ou seja, a física quântica, para dar conta da indiscernibilidade usando a linguagem da lógica e da matemática tradicionais, vê-se obrigada a postular condições de simetria, que fazem com que a *distinção* inicialmente atribuída às entidades por força das necessidades da linguagem, se perca na seqüência, ou melhor, seja mascarada: iniciamos supondo que as entidades são indivíduos, identificados por nomes, e depois usamos princípios de simetria para dizer que eles não são indivíduos, que não têm individualidade. Isso é de fato bastante artificial, mas não há como evitar coisas desse tipo, exceto de estivermos dispostos a mudar radicalmente a base lógica e matemática da teoria quântica para uma que comporte não-indivíduos desde o princípio como entidades metafisicamente aceitáveis. Do nosso ponto de vista, nada há que impeça essa possibilidade, principalmente se houver algum ganho, mesmo que conceitual ou filosófico. Esta é exatamente a função para a qual a teoria de quase-conjuntos foi desenhada (Krause 1992; French e Krause 2006), ainda que eventualmente venha a encontrar outras aplicações, como uma teoria que pode comportar de entidades sem identidade, ou que sejam "vagas" em alguma acepção.

6. Quase-conjuntos

Como podemos representar formalmente a idéia de que, considerando seu comportamento em agregados, as partículas quânticas podem se comportar como objetos desprovidos de individualidade? Podemos começar recordando que, se admitirmos que o princípio que confere individualidade a tais objetos for algum tipo de auto-identidade, então temos a sugestão imediata de como representar formalmente os objetos que não satisfazem, de algum modo, esta condição, ao restringirmos de alguma forma a aplicação do símbolo de identidade.

Antes de passarmos a considerar como se pode enfrentar este problema, convém observar como a teoria da identidade clássica, conforme utilizada na lógica e matemática clássicas, acaba se fazendo presente em certas formulações das teorias científicas e impedindo possíveis restrições na noção de identidade que nos permita tentar representar a noção de não-indivíduo, além de incorporar uma forma de definição de identidade que garante que as noções de indistinguibilidade e identidade são equivalentes. Em particular, dada essa caracterização, o PII é um teorema da matemática clássica, ainda que seu *status* tenha sido questionado na física quântica. Com efeito, apresentar uma teoria científica, segundo P. Suppes, um dos principais expoentes da abordagem semântica, significa fornecer um adequado predicado conjuntista, que deverá ser satisfeito pelos modelos da teoria (Suppes 2002). Essa visão reflete uma crença partilhada por grande parte dos filósofos de que boa parte das teorias científicas, entre elas as teorias físicas, pode ser formulada utilizando-se alguma teoria de conjuntos. Ainda que na quase totalidade das vezes não se faça referência à base lógica ou matemática de uma teoria física, podemos assumir sem perda de generalidade que se trata da teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel, ZF, e da lógica clássica. Ao adotarmos esta abordagem, a teoria da identidade adotada é para ser a teoria da identidade clássica, que faz com que todas as entidades tratadas pela teoria sejam, de certa forma, *indivíduos*.

Surge então uma maneira de se poder tentar representar não-indivíduos, usando um tipo de lógica proposta pela primeira vez por N. C. A. da Costa (da Costa 1980, p.122ss), as *lógicas de Schrödinger*. Apesar das motivações de da Costa para propor tais sistemas estarem relacionadas com os fundamentos da lógica, seu sistema pode ser útil para o que pretendemos mostrar aqui. De fato, sua tese filosófica mais geral era de que as *leis da lógica* (clássica) não são irrevogáveis, pois podemos erigir sistemas formais nos quais elas falham ou deixam de se aplicar. O papel das lógicas de Schrödinger, neste contexto, era de apresentar um caso particular desta tese, relativamente à chamada lei da identidade – tomada na formulação que garante que todo objeto é idêntico a si mesmo – mostrando como podemos erigir um sistema de lógica no qual a referida lei não seja válida sem restrições, no sentido de que não se aplique a todas as entidades com quais queremos tratar (ou seja, o princípio da identidade na forma $\forall x\ (x = x)$ não vale em geral porque a noção de identidade não é aplicável indiscriminadamente.

É interessante considerar como da Costa pretendia obter o efeito desejado – para uma exposição detalhada, ver (da Costa e Krause 1994; 1997; French e Krause 2006). Utilizando uma linguagem de primeira ordem bissortida, com um conjunto adequado de conectivos, quantificadores e símbolo de identidade, selecionou um dos tipos de termos da linguagem bissortida, o primeiro, por exemplo, para que estes termos denotassem as partículas quânticas, enquanto que os termos de segunda espécie denotariam os objetos macroscópicos usuais. Para que a identidade não se aplique com sentido aos objetos microscópicos, denotados pelos termos de primeira espécie, da Costa restringiu, na definição de fórmula, a cláusula para a formação das fórmulas atômicas envolvendo o símbolo de identidade: o símbolo de identidade somente será permitido como fórmula quando for ladeado por dois termos de segunda espécie. Assim, torna-se impossível, na linguagem para as lógicas de Schrödinger, falar na identidade ou diferença de certos objetos, visando com isso captar a idéia de que, seguindo Schrödinger, essas noções não se aplicam com sentido aos objetos denotados pelos termos de primeira espécie da linguagem. Para completar a exposição, da Costa fornecia como postulados para esta lógica um conjunto de postulados da lógica clássica, observando apenas que se devem respeitar as restrições impostas às fórmulas quando o símbolo de identidade estiver presente.

Podemos, a partir deste ponto, elaborar uma semântica conjuntista para as lógicas de Schrödinger, demonstrando resultados como completude e correção relativamente a esta semântica. No entanto, é aqui que surge o primeiro problema com esta sugestão para se encarar o problema de se representar formalmente não-indivíduos. Como o próprio da Costa notou, ao utilizarmos uma teoria de conjuntos clássica na metalinguagem, como Zermelo-Fraenkel, estamos novamente, através da metalinguagem, nos comprometendo com objetos para os quais a identidade ou diferença sempre fazem sentido, pois nestas teorias, a identidade se aplica de modo irrestrito. A solução, sugerida por da Costa, foi que se erigisse uma teoria de *quase-conjuntos*. Nesta teoria, disse ele, coleções de objetos para os quais a identidade e diferença não se aplicam deveriam poder ser formadas, e ainda, estas seriam apenas um dos tipos de coleções permitidas por esta teoria, que teria também coleções no sentido de alguma teoria usual de conjuntos, como por exemplo ZF com átomos. Uma teoria quase-conjuntos dessa índole (aqui chamada de $\mathfrak{Q}$) foi apresentada em Krause (1990), e aperfeiçoada posteriormente, como por exemplo, em French e Krause 2006, Krause 2007, já não mais para unicamente servir de metamatemática para as lógicas de Schrödinger, mas para poder ser aplicada em questões relacionadas aos fundamentos da física quântica.

7. Aspectos gerais da teoria

Como vimos, uma das motivações iniciais para a criação de uma teoria de quase-conjuntos foi a necessidade de se estabelecer uma semântica que fosse mais condizente com as intuições que motivaram a lógica de Schrödinger. No entanto, há ainda outra forte motivação independente da primeira para esta teoria: a necessidade de uma linguagem adequada para tratar com coleções de objetos indistinguíveis, conforme apresentados pelas novas teorias físicas, e para o qual as teorias usuais de conjuntos se mostram inadequadas, pelo menos de um ponto de vista filosófico, em particular por ser válida, nestas teorias, a definição de identidade de Leibniz, que impede que mantenhamos os conceitos de identidade e indistinguibilidade separados.

Esta segunda motivação foi sugerida pelo matemático Yuri Manin em um congresso realizado em 1974 pela American Mathematical Society. O objetivo desse encontro era avaliar o avanço feito até a época com relação à resolução dos 23 problemas da matemática apresentados por David Hilbert, em 1900, no Congresso Internacional de Paris, problemas que segundo Hilbert deveriam servir como uma espécie de guia para as pesquisas dos matemáticos no século XX. Além disso, no congresso de 1974, uma nova lista com novos problemas foi apresentada, e um destes problemas versava sobre fundamentos da matemática; era o problema proposto por Manin, ao qual estamos nos referindo.

De acordo com Manin, um dos novos rumos a se seguir nas pesquisas sobre os fundamentos da matemática seria a busca por novas teorias do infinito, ou seja, novas teorias de conjuntos, nas quais se possa tratar das particularidades de certas entidades envolvidas nas atuais teorias físicas, como principalmente o fato de serem indistinguíveis. De acordo com Manin, a teoria de conjuntos usual, mais do que uma extrapolação das noções finitas, é uma extrapolação das noções da física clássica, onde os objetos podem ser contados e ordenados, e assim, mostra-se inadequada para o tratamento de coleções de algumas das entidades que se apresentam nas novas teorias físicas.

A teoria de quase-conjuntos que delinearemos aqui é uma tentativa de se elaborar uma teoria do infinito que dê conta de algumas destas peculiares características dos objetos que figuram nas novas teorias físicas e que sirva para formalizar a noção de não-indivíduos: A teoria de quase-conjuntos é uma maneira de considerar coleções de objetos indistinguíveis, mas não idênticos. A teoria foi proposta precisamente para prover uma ferramenta matemática para descrever coleções de objetos cuja indistinguibilidade é considerada *ab initio*, e não feita a *posteriori* como ocorre usualmente com a introdução de certos princípios de simetria.

A lógica subjacente à teoria da qual trataremos é a lógica clássica *sem* o símbolo de identidade. A linguagem da teoria é composta dos seguintes símbolos primitivos:

1) Dois símbolos de predicados unários m e M, tais que se t é um termo qualquer, $m(t)$ e $M(t)$ podem ser lidos intuitivamente como 't é um micro-átomo' e 't é um macro-átomo', respectivamente; e ainda outro símbolo de predicado unário, Z, tal que $Z(t)$ indica que t é um *conjunto* (essas entidades coincidirão com os conjuntos usuais da teoria Zermelo-Fraenkel com átomos, ZFU);

2) Dois símbolos de relações binárias, $\in$ (pertinência) e $\equiv$ (indistinguibilidade), este último lê-se '... é indistinguível de __', onde os espaços são ocupados por termos individuais;

3) Um símbolo funcional de aridade 1, *qc*, tal que $qc(t)$ denotará o *quase-cardinal* de t, cujos axiomas servem para garantir que a noção usual de cardinal pode ser aplicada em quase-conjuntos em geral.

A teoria de quase-conjuntos é baseada em axiomas semelhantes aos da teoria ZF com átomos, mas admite dois tipos de átomos, distinguidos pelos predicados apresentados no item 1 acima. Intuitivamente, temos os macro-átomos, que chamaremos também *M-átomos,* que se comportam como os átomos de ZFU, ou seja, são como os átomos clássicos, e os micro-átomos, que chamaremos também *m-átomos*, destinados aos objetos que podem se relacionar através da relação de indistinguibilidade, mas aos quais a identidade e a diferença não se aplicam. Intuitivamente, em nossa interpretação pretendida, queremos que os *m*-átomos representem as partículas indistinguíveis com as quais trata a mecânica quântica. A relação de indistinguibilidade, quando aplicada aos *M*-átomos formalmente coincide com a identidade usual (a identidade extensional, apresentada abaixo). Além destes dois tipos de átomos, temos também os *quase-conjuntos* (que chamaremos também de q-sets), que são distinguidos pelo predicado unário Q, introduzido por definição seguinte:

$$Q(t) =_{\mathrm{D}} \neg m(t) \vee \neg M(t).$$

Assim, os q-sets são os objetos da teoria que não são átomos, de modo semelhante ao que ocorre em ZFU, onde há átomos e objetos que não são átomos, os conjuntos de ZFU propriamente ditos. Os q-sets, por sua vez, podem ser 'classificados' de acordo com os tipos de elementos que ocorrem neles. Podemos ter q-sets dos seguintes tipos:

a) puros: contêm apenas *m*-átomos;

b) clássicos: estes são os q-sets cujo fecho transitivo não contém *m*-átomos, comportam-se como um conjunto clássico de ZFU, correspondendo aos q-sets que recebem o predicado Z da linguagem apresentada acima, podendo por isso ser chamados apenas 'conjuntos';

c) mistos: pode conter *m*-átomos, *M*-átomos e outros q-sets como elementos.

Os q-sets puros, no item a), são tais que seus elementos são apenas *m*-átomos. Não postulamos na axiomática da teoria de quase-conjuntos que devem existir *m*-átomos, nem mesmo que deve existir mais de um tipo de *m*-átomos, ou seja, objetos x e y que satisfazem o predicado m e tais que não é o caso que $x \equiv y$. A teoria, como é usual nas apresentações de teorias de conjuntos com átomos, é compatível com a sua existência, mas estas características ficam dependendo do modelo (da aplicação) que se adota. Em geral, define-se um q-set puro como um q-set cujos elementos são todos *m*-átomos indistinguíveis, mas preferimos deixar aberta a possibilidade de que exista mais de um tipo de *m*-átomo em um q-set puro.

É importante notar também que os q-sets que chamamos acima de 'clássicos' funcionam como 'cópias' de conjuntos de ZFU na teoria de quase-conjuntos, ou seja, é possível se estabelecer uma tradução da linguagem de ZFU na teoria de quase-conjuntos, onde os conjuntos de ZFU são representados por objetos que satisfazem o predicado Z. Assim, podemos dizer que de certo modo a teoria de quase-conjuntos que apresentamos aqui 'contém' a teoria ZFU, toda a matemática que pode ser desenvolvida em ZFU pode ser também desenvolvida na teoria $\mathcal{Q}$ que estamos considerando.

Quanto ao símbolo primitivo '$\equiv$', que está pela relação de indistinguibilidade, postula-se que possui as propriedades de uma relação de equivalência que não é compatível com a pertinência, ou seja, podemos ter, por exemplo, que $x \equiv y$, e para algum z, segue que $x \in z$, mas não necessariamente que $y \in z$. No geral, o fato de que a relação de indistinguibilidade não é compatível com a pertinência, enquanto que a identidade extensional, que apresentaremos abaixo é, quando aplicada aos objetos clássicos, garante que estas duas relações não coincidam formalmente. Assim, temos que alguns objetos podem ser indistinguíveis, sem que sejam idênticos. Para os propósitos das aplicações filosóficas da teoria, podemos compreender a relação de indistinguibilidade atuando como uma relação de equivalência, no sentido lato, que separa os vários tipos de átomos em classes de objetos indistinguíveis.

Como dissemos, o símbolo de identidade não faz parte de nossa linguagem, ou seja, não é um dos símbolos primitivos. Com isto, podemos impedir que, por exemplo, a expressão $x = y$ faça sentido para objetos que são *m*-átomos. Para tanto, definir em $\mathcal{Q}$ uma relação de identidade que não se aplique a tais átomos, introduzindo o símbolo '$=_E$', da *igualdade extensional*, fazendo com que se aplique a *M*-átomos que pertencem a todos os mesmos q-sets ou a quase-conjuntos que possuam os 'mesmos' elementos, do seguinte modo:

$$`A =_E B\text{'} =_D [Q(A) \wedge Q(B) \wedge \forall z\,(z \in A \leftrightarrow z \in B)] \vee [M(A) \wedge M(B) \wedge \forall z\,(A \in z \leftrightarrow B \in z)].$$

A igualdade extensional tem as mesmas propriedades da identidade clássica para os 'objetos clássicos' da teoria como, por exemplo, a substituição (indistinguibilidade dos idênticos). É importante enfatizar isto: a lógica subjacente à teoria de quase-conjuntos é a lógica clássica *sem* identidade. Assim, o único tipo de igualdade que se pode afirmar nesta teoria é a igualdade extensional, que não se aplica aos *m*-átomos e que no caso de conjuntos clássicos ou *M*-átomos, prova-se que funciona exatamente como a igualdade clássica. Além disso, para os objetos clássicos, segue-se dos axiomas da teoria que se eles estão na relação de indistinguibilidade, então serão extensionalmente idênticos, e reciprocamente, ou seja, identidade e indistinguibilidade são relações equivalentes para os objetos clássicos da teoria, como ocorre nas teorias de conjuntos clássicas. Neste caso, para os objetos clássicos, como vemos, vale uma forma da identidade de Leibniz.

Ainda, introduz-se axiomas para o símbolo funcional *qc* que designa o quase-cardinal. Este conceito estende a noção usual de cardinal de um conjunto para um quase-conjunto *t*, e formaliza a noção intuitiva de "quantidade de elementos" do quase-conjunto *t*. A razão para se introduzir este conceito axiomaticamente é que não se pode defini-lo da maneira usual, a partir do conceito de ordinal, para todos os quase-conjuntos. Intuitivamente, o problema é que a coleções que contenham *m*-átomos não poderemos associar um ordinal da maneira usual, pois, apesar de podermos definir algumas relações de ordem nestes casos, em geral, diante da indistinguibilidade dos *m*-átomos, não poderemos apontar, por exemplo, para o menor elemento do q-set relativamente a esta relação, nem mesmo decidir quando determinado elemento precede outro. No entanto, assim como se pode fazer com partículas, por exemplo, em um condensado de Bose-Einstein, podemos agregar os *m*-átomos em coleções com mais de um elemento, e a princípio, pelo menos em certas ocasiões, saber exatamente quantos deles há, e a noção de quase-cardinal serve para formalizar esta idéia. Assim, em $\mathcal{Q}$ podemos refletir o fato intuitivo de certas situações da física nas quais certas coleções de objetos possuem um determinado cardinal, mas não possuem um ordinal associado.

Os axiomas da teoria também permitem que, dados dois objetos x e y, formemos o *par fraco* de x e y, denotado por $[x, y]_z$, com o índice z indicando que o par foi *separado* do q-set z que contém x e y como elementos (a existência de pelo menos um tal z, que contém x e y como elementos, para quaisquer x e y, é garantida pelos axiomas da teoria). Se x e y forem 'clássicos', denota-se o par da maneira usual $\{x, y\}$, e o índice z torna-se desnecessário. Intuitivamente, $[x, y]_z$ é o q-set cujos elementos são indistinguíveis de x ou de y e pertencem a z, e por este motivo, pode ser que seu quase-cardinal seja maior que 2, ou seja, pode acontecer que contenha outros elementos além de x e y. Ainda, define-se o *unitário fraco* $[x]_z$ como $[x, x]_z$, que contém os indistinguíveis de x em z, ou seja, novamente pode ser que seu quase-cardinal seja maior que 1. Por fim, podemos também formar o *unitário forte* de x, denotado por x', que é o q-set cujo *único* (seu quase-cardinal é 1) elemento é um indistinguível de x, mas os axiomas não permitem dizer se é o próprio x ou não, pois para isso a identidade teria de fazer sentido. Quando não corrermos risco de ambigüidade, em geral abandonamos o índice z na notação dos pares e unitários.

A partir dos pares, podemos definir uma versão de pares 'ordenados' na teoria de quase-conjuntos da seguinte maneira:

$$\langle x, y\rangle_z =_{\mathrm{D}} [[x]_z, [x, y]_z].$$

Esta idéia pode ser generalizada para se formar triplas ordenadas da maneira usual: $\langle x, y, w\rangle =_{\mathrm{D}} \langle\langle x, y\rangle, w\rangle$, e assim por diante, para n-uplas. Daí segue-se também de maneira usual a definição de produto cartesiano:

$$X \times Y =_{\mathrm{D}}[\langle x, y\rangle_{X\cup Y} : x \in X \text{ e } y \in Y].$$

Como é usual, abreviaremos por X^n ao produto $X \times X \times \cdots \times X$, com a operação aplicada a n vezes o q-set X. Pode-se definir também uma quase-relação binária como um quase-conjunto de pares ordenados, no sentido explicado, e esta definição pode ser generalizada como no caso usual para relações n-árias.

Para reforçarmos o que dissemos acima, sobre a impossibilidade de definirmos certas relações de ordem em geral, notemos que, por exemplo, uma relação R de ordem parcial envolve a condição de anti-simetria, ou seja, se xRy e yRx, então $x = y$. Como é imediato, se definíssemos esta relação em um q-set com m-átomos, teríamos que fazer sentido da identidade dos objetos relacionados, o que é impossível neste caso, uma vez que a identidade extensional não se aplica a m-átomos. A noção de função das teorias de conjuntos usuais é generalizada para uma *q-função*: dados q-sets A e B, uma q-função de A em B é uma relação que atribui a cada $x \in A$ um $y \in B$, e satisfaz a condição de que, dados $x, x_1 \in A$ e $y, y_1 \in B$, se a q-função atribui x a y e x_1 a y_1 e $x \equiv x_1$, então $y \equiv y_1$. Esta definição é tal que quando o domínio e contradomínio forem q-sets clássicos (conjuntos) então recai-se no caso usual de função como nas teorias de conjuntos usuais.

Um dos postulados da teoria de quase-conjuntos nos permite introduzir a operação de quase-conjunto potência de um q-set t, que denotaremos $\wp(t)$, e os axiomas para a operação de quase-cardinal permitem estabelecer que, dado qualquer q-set t, seu quase-conjunto potência terá $2^{qc(t)}$ elementos. Deve-se notar que isto não significa que poderemos então formar sempre os q-sets unitários de elementos de t de maneira não ambígua. Intuitivamente, sabemos apenas que $qc(t)$ denota o número de q-sets unitários e nada mais, pois quando se trata de q-sets com m-átomos, não se pode distinguir os q-sets unitários dos m-átomos, exceto metamatematicamente.

Dizemos que os q-sets t e r são *similares* se não forem vazios e se cada elemento de t é indistinguível de cada elemento de r. Ainda, q-sets similares que possuem o mesmo quase-cardinal são ditos *q-similares*. Com isto, podemos enunciar o *axioma da extensionalidade fraca*: dados q-sets A e B, se para cada x em A, temos em B um y tal que $y\backslash\equiv$ e $x\backslash\equiv$ (os q-sets quocientes pela relação de indistinguibilidade) são q-similares, e, dado y qualquer em B, existe um x em A tal que $x\backslash\equiv$ e $y\backslash\equiv$ são q-similares, então A e B são indistinguíveis, e reciprocamente. Este axioma nos diz, intuitivamente, que, dois q-sets A e B serão indistinguíveis se e somente se possuírem *a mesma quantidade* (expressa por meio de quase-cardinais) de elementos do mesmo tipo.

Um resultado importante que se pode demonstrar em $\mathcal{Q}$ com auxílio do axioma da extensionalidade fraca é que, dado um q-set A, com x, y, z, w em A, se $x \equiv z$ e $y \equiv w$

então $\langle x, y\rangle_A \equiv \langle z, w\rangle_A$, podendo-se generalizar para n-uplas em geral. O importante aqui é que se compreenda que objetos indistinguíveis vão gerar *n*-uplas indistinguíveis. Se tomarmos em consideração neste caso apenas $x \equiv z$, temos que $\langle x, z\rangle_A \equiv \langle z ,x\rangle_A$, ou seja, como enfatizamos anteriormente, é impossível efetuar, da maneira usual, a ordenação de elementos indistinguíveis, pois não podemos determinar a precedência de um elemento sobre outro. Ainda temos que, em geral, o teorema que enuncia a propriedade fundamental para os pares ordenados deve ser adaptado para o seguinte: se $\langle x, y\rangle_A \equiv \langle z, w\rangle_A$ então $x \equiv z$ e $y \equiv w$. A prova deste resultado também utiliza o axioma da extensionalidade fraca, e recai no caso usual quando os objetos forem clássicos.

Outra conseqüência importante do axioma da extensionalidade fraca em $\mathcal{Q}$ expressa um fato central da física quântica, conforme refletido nas estatísticas: a permutação de partículas idênticas não dá origem a estados distintos, ou seja, permutações não são observáveis. Temos:

[Permutações não são observáveis] Seja x um q-set, z um *m*-átomo tal que $z \in x$. Se w é um *m*-átomo tal que $w \notin x$, então $(x - z') \cup w' \equiv x$, onde z' e w' denotam unitários fortes de z e w respectivamente.

Intuitivamente, o que o teorema nos diz é que, dado um q-set x e um *m*-átomo z que pertence a x, se w for um m-átomo tal que $z \equiv w$ e $w \notin x$, então, podemos *substituir* z por w e obteremos um q-set indistinguível de x. O que nos interessa aqui é notar que este tipo de operação não pode ser realizada nas teorias usuais de conjuntos, pois, por força do axioma da extensionalidade, e devido à validade da teoria da identidade clássica, que faz com que indistinguibilidade e identidade coincidam, apenas podemos obter um conjunto indistinguível (ou seja idêntico) do original 'substituindo' um elemento por ele mesmo, ou seja, não realizando realmente permutação nenhuma, caso contrário, se trocarmos em ZF, por exemplo, em um conjunto x um elemento z por algum w, teremos $(x - \{z\}) \cup \{w\} = x$ se e somente se $z = w$.

8. Perspectivas

Em vários artigos, temos apontado para aplicações da teoria de quase-conjuntos em questões relacionadas aos fundamentos filosóficos e lógicos da teoria quântica, e vários pesquisadores de diversas partes têm se referido a ela como possibilitando análises interessantes - nossas Referências indicam alguns artigos e livros nos quais se encontram referências à teoria, como (Bitbol 1996, Dalla Chiara et al. 2004, Lowe 1998). Qual o verdadeiro papel que tal desenvolvimento pode desempenhar?

Werner Heisenberg e Niels Bohr são os dois principais representantes daquela que ficou conhecida como Escola de Copenhague de física quântica. No entanto, suas opiniões não convergiam totalmente. Para Bohr, a mecânica quântica (e a ciência em geral) nada mais visaria do que predizer resultados de experimentos, que segundo ele deveriam ser sempre expressos na linguagem da física clássica. Ou seja, Bohr argumentava a favor da indispensabilidade dos conceitos clássicos, mesmo em física quântica. Heisenberg concordava quanto ao papel da teoria quântica, mas acreditava que novas experiências e a evolução da ciência poderiam sugerir que devêssemos abandonar os conceitos das teorias predecessoras. Como comenta Bokulich, Heisenberg criticou alguns dos fundadores da teoria quântica, que "não foram capazes de dar o outro passo que poderia ter sido absolutamente necessário para ir adiante e dispensar (*to throw away*) a física antiga, o que significa dispensar os conceitos clássicos e substituí-los por novos" (Heisenberg, in Bokulich 2006). Em seu célebre livro *Física e Filosofia*, Heisenberg comenta, no final do Capítulo 10, que o esquema da teoria quântica poderia ser combinado "com uma linguagem que faça uso de uma lógica modificada, ou mesmo que não utilize nenhuma lógica bem definida" (Heisenberg 1989, p. 174).

Sem pretender uma revisão mais abrangente, citamos unicamente Schrödinger, que também fez referências a uma possível mudança de linguagem para se falar das entidades quânticas; em seu artigo "What is an elementary particle?", ele comenta que o conceito partícula e a linguagem vinda da física clássica são inadequados, pois "constantemente dirigem nossa mente a procurar informações que obviamente não têm significado" (Schrödinger 1998) e Yuri Manin, que fez observações de mesmo teor (Manin 1976). Para discussões e referências mais detalhadas, ver (French e Krause 2006).

A teoria de quase-conjuntos pode servir para propósitos desse tipo. Além das aplicações na filosofia da física que a discussão da identidade e da individualidade pode proporcionar, seja para o melhor entendimento desses conceitos no contexto em questão, seja para proporcionar um panorama no qual uma semântica sensata para uma possível linguagem quântica possa ser fundada (da Costa e Krause 1997, 1999, 2007; da Costa et al. 1992; Krause 1994, 2005; Krause et al. 1999), ou então para o tratamento de objetos vagos (French e Krause 1995, 1996, 2003; Krause 2000, 2007), a teoria pode servir para uma fundamentação alternativa propriamente dita dessa física. Talvez a primeira tentativa de se fundar a mecânica quântica (de início, a não relativística) em uma matemática (e em uma lógica) distinta da clássica, usando a teoria de quase-conjuntos, esteja em curso (Domenech et al. 2008) e as perspectivas são interessantes. É importante que se saliente que não se trata de uma nova "lógica quântica" ao estilo tradicional. O campo de estudo que hoje se denomina "lógica quântica" (Dalla Chiara et al. 2004) surgiu do trabalho pioneiro de von Neumann e Birkhoff em 1936, tendo tido um desenvolvimento extraordinário desde então. No entanto, apesar de haver algumas extensões de alguns sistemas (que via de regra são lógicas proposicionais) a uma teoria envolvendo quantificadores, é incipiente a fundamentação da física quântica propriamente dita nesses contextos. Um motivo é que se necessita de uma *grande* lógica, como uma teoria de conjuntos, ou algo equivalente, e os sistemas que aparecem na literatura que se estenderam a tal ponto não encontraram ainda a aplicação desejada. Ver (French e Krause 2006) para mais detalhes e referências às tentativas de se elaborar "teorias quânticas de conjuntos". Usando-se a teoria de quase-conjuntos, ganha-se a possibilidade de se poder contar com a noção de quanta indiscerníveis *ab ovo*, sem que sejam necessárias certas hipóteses *ad hoc* como (algumas das) as condições de simetria acima mencionadas (Krause et al. 1999). O estudo ainda está em seu início.

Referências:

Bitbol, M., 1996. *Mécanique Quantique: Une Introduction Philosophique*. Paris: Flammarion.

Bokulich, A., 2006. "Heisenberg meets Kuhn: closed theories and paradigms". *Philosophy of Science*, v. 73, p. 90-107.

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R.and Greechie, R., 2004. *Reasoning in Quantum Theory: Sharp and Unsharp Quantum Logics*. Kluwer Ac. Press (Trends in Logic, vol.22).

da Costa, N. C. A., Krause, D., 1994. "Schrödinger logics". *Studia Logica*, v. 53, n. 4, p. 533-550.

da Costa, N. C. A., Krause, D., 1997. "An intensional Schrödinger logic". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 38, n. 2, p. 179-194.

da Costa, N. C. A., Krause, D., 1999. "Set theoretical models for quantum systems", in Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., Laudisa, F. (Eds.). *Language, quantum, music*. Kluwer Ac. Pu., p. 171-181.

da Costa, N. C. A., Krause, D., 2007. "Logical and philosophical remarks on quasi-set theory", a aparecer no *Journal of the IGPL.*

da Costa, N. C. A., French, S., Krause, D., 1992. "The Schrödinger problem", in Bitbol, M. and Darrigol, O. (Eds.). *Erwin Schrödinger: philosophy and the birth of quantum mechanics*, Paris: Frontières, p. 445-60.

Domenech, G., Holik, F.. Krause, D., 2008. "The Q-space and the foundations of quantum mechanics", in preparation.

French, S., Kause, D., 1995. "Vague identity and quantum non-individuality". *Analysis*, v. 55, n. 1, p. 20-6.

French, S., Krause, D., 1996. "Quantum objects are vague objects". *Sorites*, v. 6, 21-33.

French, S., Krause, D., 2003. "Quantum Vagueness". *Erkenntnis*, v. 59, n. 1, p. 97-124.

French, S., Krause, D., 2006. *Identity in Physics: A Historical, Philosophical and Formal Analysis*. Oxford: Oxford Un. Press.

Heisenberg, W., 1989. *Physics and Philosophy*. London: Penguin Books.

Krause, D., 1990. "*Não-Reflexividade, Indistinguibilidade e Agregados de Weyl*". Tese, Universidade de São Paulo.

Krause, D., 1992. "On a quasi-set theory". *Notre Dame J. of Formal Logic*, v. 33, n. 3, p. 402-11.

Krause, D., 1994. "Non-reflexive logics and the foundations of physics". In Cellucci, C., Di Maio, M. C. and Roncaglia, G. (Eds.). *Logica e filosofia della scienza: problemi e prospettive*. Proceedings of the Congresso Triennale della Società Italiana di Logica e Filosofia delle Scienze (Lucca, 1-10 Jan 1993), Pisa, ETS, 393-405.

Krause, D., 2000. "Remarks on quantum ontology". *Synthese*, v. 125, n. 1/2, p. 155-167.

Krause, D., 2003. "The Mathematics of Non-Individuality", *Coleção Documentos*, Série Lógica e Teoria da Ciência, n. 46, Março de 2003, Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo.

Krause, D., 2005. "Structures and structural realism". *Logic Journal of IGPL*, v. 13, n. 1, p. 113-126.

Krause, D., 2007. "Entity, but no identity", a aparecer.

Krause, D., French, S., 1995. "A formal framework for quantum non-individuality". *Synthese*, v. 102, p. 195-214.

Krause, D., Sant'Anna, A. S., Volkov, A., 1999. "Quasi set theory for bosons and fermions". *Foundations of Physics Letters*, v. 12, n. 1, p. 67-79.

Lowe, J., 1998. *The Possibility of Metaphysics*. Oxford: Oxford University Press.

Manin, Yu. I., 1976. "Mathematical Problems I: Foundations", in Browder, F. E. (Ed.). "Problems of Present Day Mathematics, I: Foundations". *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, v. 38, American Mathematical Society, p. 36.

Schrödinger, E., 1952. *Science and Humanism*. Cambridge: Cambridge Un. Press.

Schrödinger, E., 1998. "What is an elementary particle?", in Castellani, E. (Ed.). *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*. Princeton: Princeton Un. Press, p. 197-210.

Teller,P. 1998. "Quantum mechanics and haecceities", in Castellani, E. (Ed.). *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics.* Princeton: Princeton Un. Press, p. 114-141.