TEMPO, MODALIDADE E LÓGICA TRIVALENTE EM PEIRCE E ŁUKASIEWICZ

TIME, MODALITY AND THREE-VALUED LOGIC IN PEIRCE AND ŁUKASIEWICZ

José Renato Salatiel[1]

Resumo: A descoberta de sistemas formais polivalentes foi acompanhada de diferentes motivações filosóficas para o abandono da semântica bivalente e de teoremas da lógica clássica, como o Princípio do Terceiro Excluído. Neste artigo analisamos temas correlatos ao problema dos futuros contingentes, que motivou a criação da lógica trivalente de Łukasiewicz, no contexto da filosofia de C.S. Peirce e da elaboração de suas matrizes trivalentes. Concluímos que as razões de Peirce para a adoção de um sistema formal trivalente, no âmbito da lógica do contínuo, o possibilitam tanto sustentar o indeterminismo aristotélico quanto evitar problemas relativos à abordagem modal de Łukasiewicz.

Palavras-chave: Lógica trivalente. Futuros contingentes. Modalidade. Determinismo. Fatalismo. Continuidade.

Abstract: The discovery of many-valued formal systems was followed by different philosophical reasons to reject the bivalent semantics and classical logic's theorems, such as the Principle of Excluded Middle. In this article I analyze some issues related to the problem of future contingents, which motivated the creation of Łukasiewicz's three-valued logic, in the context of C. S. Peirce's philosophy and his development of three-valued matrices. I conclude that Peirce's reasons for the adoption of three-valued formal system, in the framework of the logic of continuity, allow him to sustain the Aristotelian indeterminism as well as to avoid the problems related to Łukasiewicz's modal approach.

Keywords: Three-valued logic. Future contingents. Modality. Determinism. Fatalism. Continuity.

Introdução

A lógica polivalente é uma das áreas de estudo mais promissoras no domínio das chamadas lógicas não clássicas. Ela compreende, basicamente, sistemas formais que admitem mais de dois valores de verdade, contrariando assim a semântica bivalente da lógica clássica. O objeto de estudo deste artigo é a lógica trivalente, que postula a existência de um terceiro valor de verdade, entre o verdadeiro e o falso.

Há diferentes razões para se desenvolver sistemas lógicos trivalentes. No começo dos anos 20, considerado o auge das lógicas polivalentes, o lógico polonês Jean Łukasiewicz (1878-1956) criou um conjunto de matrizes trivalentes para acomodar

[1] Professor adjunto do Departamento de Filosofia da UFES (Universidade Federal do Espírito Santo). Email: jrsalatiel@hotmail.com.

https://doi.org/10.36311/1984-8900.2017.v9n20.10.p151

proposições a respeito do futuro contingente. Ele seguia, nessa proposta, o argumento de Aristóteles de que, mantendo-se a bivalência em proposições que dizem respeito ao futuro, o determinismo seria legitimado.

Dez anos antes, o lógico e filósofo norte-americano Charles Sanders Peirce (1839-1914) esboçou, em um manuscrito nunca publicado, o que hoje se considera o primeiro sistema formal trivalente, cujas tabelas seriam descobertas somente anos mais tarde, independentemente, por outros lógicos. Os motivos para esses experimentos, entretanto, não são claros. Mas uma leitura cuidadosa dos textos de Peirce permite supor que ele estivesse lidando com problemas referentes à matemática do contínuo.

O que essas duas motivações filosóficas, aparentemente tão distintas, têm em comum? Argumentamos que ambas possuem, como contexto filosófico, a articulação de questões referentes à temporalidade, modalidade e determinismo. O presente trabalho objetiva fazer um exame desses fundamentos metafísicos da lógica trivalente em ambos os autores. Sugerimos que a justificativa de Peirce evita resultados inconvenientes da abordagem modal de Łukasiewicz, ainda que isso torne a aplicação das matrizes trivalentes muito mais restrita e complexa.

O primeiro capítulo deste artigo traz uma contextualização do problema dos futuros contingentes em Aristóteles, enquanto o segundo discute a lógica trivalente de Łukasiewicz, sua rejeição do Princípio do Terceiro Excluído e a crítica aos seus argumentos. As duas últimas partes deste trabalho são dedicadas ao exame da lógica trivalente peirciana, menos conhecida entre os lógicos. No capítulo 3 apresentamos as tabelas trivalentes de Peirce e analisamos as razões pelas quais proposições modais não requerem a rejeição da bivalência; no capítulo 4 expomos os argumentos em favor da exigência de um terceiro valor de verdade para representações na lógica do contínuo. Concluímos que a filosofia peirciana oferece um aparato lógico e metafísico mais robusto para a discussão de lógicas polivalentes e, de modo, geral, para as lógicas não clássicas.

1. O problema dos futuros contingentes

No capítulo 9 de *Da Interpretatione* (*DI*), Aristóteles, critica um argumento que, caso mantido, sustentaria o fatalismo e o determinismo lógicos[2]. Seja p uma proposição arbitrária:

(i) p é verdadeira ou falsa.

(ii) Se p é verdadeira, então não é possível que seja falsa (i.e., p é necessária).

(iii) Se p é falsa, então p é impossível (ou seja, ~p é necessária).

Segue-se que:

(iv) É necessário que p ou impossível que p.

Em termos formais:

1. $p \vee \sim p$
2. $p \rightarrow \Box p$
3. $\sim p \rightarrow \Box \sim p$
4. $\Box p \vee \Box \sim p$

Agora, considere o seguinte enunciado:

(i) Amanhã acontecerá uma batalha naval.

Fazendo as devidas substituições em "p" no argumento, com as devidas adequações à linguagem ordinária, tem-se:

(ii) Amanhã acontecerá ou não uma batalha naval.

(iii) Se for verdade que haverá uma batalha naval, então é necessário que aconteça.

(iv) Se for falso que haverá uma batalha naval, então é impossível que aconteça.

Portanto,

(v) É necessário ou impossível que amanhã aconteça uma batalha naval.

---

[2] O argumento, na verdade, divide-se em duas partes, apresentadas em *DI*, 9, 18a 34 – b9 e, em seguida, *DI*, 9, 18b9 – 16. Outro argumento conhecido em defesa do determinismo é o chamado Dominador, de Diodoro Cronos. A relação entre ambos é analisada em FERNANDES, 2009.

Em termos formais[3]:

1. $Fp \vee \sim Fp$
2. $Fp \rightarrow \Box Fp$
3. $\sim Fp \rightarrow \Box F\sim p$
4. $\Box Fp \vee \Box F\sim p$

A conclusão do raciocínio endossa duas doutrinas correlatas em suas dimensões lógicas: o fatalismo e o determinismo. Primeiro, a conclusão diz que, não importa as ações dos agentes envolvidos, o futuro já está determinado, pois, se for verdade hoje que amanhã haverá uma batalha naval, então tal fato se dará necessariamente, impedindo qualquer deliberação em respeito ao futuro. Em segundo lugar, admitindo-se que toda proposição recebe um valor-de-verdade bivalente, verdadeiro ou falso, em um instante **t** qualquer, segue-se que proposições em tempo verbal futuro também receberão um valor-de-verdade determinado.

A questão é que, ainda que em relação ao tempo passado seja intuitivamente aceito considerá-lo como um modo de ser necessário, em relação ao futuro parece ser um contrassenso não vê-lo como apenas possível ou contingente. Aristóteles, portanto, rejeita essa consequência, o que o obriga a desabilitar uma das premissas do argumento (*D I*, 9, 18b 10-17).

Consideremos a primeira premissa, expressa na fórmula "$p \vee \sim p$", a respeito da qual devemos fazer uma distinção entre as expressões semânticas do Princípio de Bivalência (**PB**) e do Princípio do Terceiro Excluído (**PTE**):

> **PB:** dada uma proposição qualquer, a ela só pode ser atribuído dois valores de verdade, o verdadeiro e o falso, que são mutualmente exclusivos.
>
> **PTE:** dada duas proposições contraditórias, "p" e "~p", elas não podem ser ambas *falsas* (quer dizer, uma delas tem que ser verdadeira).

Outro princípio lógico relacionado aos dois citados anteriormente é Princípio de Contradição (**PC**), formulado da seguinte maneira:

[3] O símbolo "F" significa "será o caso que".

PC: dada duas proposições contraditórias, "p" e "~p", elas não podem ser ambas *verdadeiras* (quer dizer, uma delas tem que ser falsa), ou seja, "~ (p ∧ ~p)".

No argumento em análise, a primeira premissa representa o princípio de bivalência semântica que, do mesmo modo que os outros dois enunciados, compõe a base da lógica clássica. E, a despeito da diferenciação entre **PB** e **PTE**, essas leis relacionam-se de modo muito próximo uma da outra. O segundo princípio afirma que, dada uma semântica bivalente, se v (p) = 1, então v (~p) = 0[4], e se v (p) = 0, então v (~p) = 1. O que **PTE** não admite é que ambas as proposições contraditórias, "p" e "~p", recebam o valor "0", isto é, falso, e mesmo no caso de ambas as proposições serem falsas, não seria totalmente eliminada a bivalência, uma vez que estaríamos ainda circunscritos a uma semântica que admite dois e somente dois valores de verdade, o "verdadeiro" e o "falso".

Mas, na interpretação mais tradicional do *DI*, hoje chamada *antirrealista* (cf. GASKIN, 1995), Aristóteles rejeitaria ou limitaria o **PB** com respeito a proposições sobre futuros contingentes, isto é, enunciados com tempo verbal futuro; ao mesmo tempo, ele manteria o **PTE**. Segundo essa interpretação, Aristóteles refutaria a validade da proposição "Amanhã acontecerá ou não uma batalha naval" (**PB**), pois cada disjunto, "p" ou "~p", não pode ser afirmado ou negado quando enunciados no tempo presente. Porém, isso não alteraria a validade de "Amanhã haverá uma batalha naval ou amanhã não haverá uma batalha naval" (**PTE**), uma vez que a disjunção "p ∨ ~p" é verdadeira – visto que só poderá haver ou não haver uma batalha naval. Do ponto de vista da semântica extensional e funcional-veritativa, entretanto, não há como resolver esse problema.

2. A lógica trivalente de Łukasiewicz

Em 1920[5], Jan Łukasiewicz criou um sistema trivalente no cálculo sentencial como solução para enunciados modais, mais especificamente, para acomodar proposições que dizem respeito a futuros contingentes. No exemplo fornecido por ele:

---

[4] Onde "1" representa o valor "verdadeiro", e "0" representa o valor "falso".

[5] As primeiras menções feitas a tal sistema datam de 7 de março de 1918, em uma conferência proferida na Universidade de Varsóvia, posteriormente elaboradas nos artigos "On three-valued logic" (1920) e "Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic" (1930), textos publicados em ŁUKASIEWICZ, 1970.

(i) Estarei em Varsóvia ao meio dia de 21 de dezembro do próximo ano.

Se essa proposição for verdadeira ou falsa hoje, será necessário ou impossível que eu esteja em Varsóvia ao meio dia de 21 de dezembro do ano que vem. Mas isso contraria a suposição de que é apenas *possível*, não necessário, que eu esteja em Varsóvia ao meio dia em 21 de dezembro do próximo ano. "Portanto", diz o lógico polonês, "a proposição considerada é, no momento, nem verdadeira e nem falsa, e deve possuir um terceiro valor" (ŁUKASIEWICZ, 1970, p. 165), identificado como "possível" ou "indeterminado" (p. 126). Esse terceiro valor é representado nas tabelas de verdade abaixo pela fração "½":

A	~A
1	0
½	½
0	1

	A ∧ B		
A \ B	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

	A ∨ B		
A \ B	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

	A → B		
A \ B	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	½
0	1	1	1

Tabela 1: Matrizes trivalentes de Łukasiewicz.

De acordo com a tabela de negação, se a sentença "Estarei em Varsóvia ao meio dia de 21 de dezembro do próximo ano" recebe um valor indeterminado ("½"), e seu par contraditório, isto é, sua negação "Não estarei em Varsóvia ao meio dia de 21 de dezembro do próximo ano", também recebe um valor indeterminado. Portanto, não valeria mais o **PB**.

Considere-se agora a fórmula "(p ∨ ~p)". Por definição, uma fórmula é uma tautologia se, para qualquer valoração, recebe o valor "1" (D= {1}, onde "D" representa um conjunto de valores designados). De acordo com a tabela, para o operador "∨" (disjunção), verifica-se que, quando a sentença "p" recebe valor "½" e sua negação, "~p", o valor "½", o resultado é "½". Sendo assim, o **PTE** não é um teorema universalmente válido no sistema trivalente, conforme podemos observar na tabela abaixo:

p	~p	p ∨ ~p
1	0	1
0	1	1
½	½	½

Tabela 2: PTE na matriz trivalente.

E tampouco o **PC**, "~ (p ∧ ~p)", que recebe também valor "½" quando "p" é "½". Já a lei de identidade, "p → p", é válida, pois a fórmula recebe valor "1" quando "A" e "B" têm valores "½".[6]

As matrizes trivalentes de Łukasiewicz acomodam então proposições sobre futuros contingentes eficientemente, de uma maneira que não era possível na lógica bivalente (BERGMANN, 2008, p. 78). Assim, por exemplo, toda vez que um dos disjuntos for verdadeiro e outro indeterminado, o resultado, de acordo com a tabela para disjunção, será verdadeiro, como em:

(ii) Getúlio Vargas foi presidente do Brasil ou Sílvio Santos será presidente do Brasil.[7]

Se, ao contrário, um dos disjuntos for falso e o outro, indeterminado, o resultado será indeterminado[8]. No caso de uma conjunção, se uma das proposições for verdadeira e a outra indeterminada, o resultado não será nem verdadeiro e nem falso, como no seguinte exemplo:

(iii) Getúlio Vargas foi presidente do Brasil e Sílvio Santos será presidente do Brasil.[9]

O problema surge quando há uma disjunção com duas proposições contraditórias a respeito de futuros contingentes, como por exemplo:

(iv) Estarei em Varsóvia ao meio dia de 21 de dezembro do próximo ano ou não estarei em Varsóvia no próximo ano.

[6] Nisso, difere de outras matrizes trivalentes, como a de Kleene e Bochvar, para condicional (cf. HAACK, 2002, p. 272-273).
[7] Sendo v(p)=1 e v(q)= ½, então v (p ∨ q) = 1.
[8] Sendo v(p)=0 e v(q)= ½, então v (p ∨ q) = ½.
[9] Sendo v(p)=1 e v(q)= ½, então v (p ∧ q) = ½.

Essa disjunção é intuitivamente verdadeira: uma das duas proposições terá que ser verdadeira, ou seja, as duas não podem ser ambas falsas. Mas na lógica trivalente de Łukasiewicz, essa disjunção não é verdadeira e nem falsa, o que é um absurdo. Além disso, se a proposta de Aristóteles for realmente a de negar o **PB** e preservar o **PTE**, o sistema trivalente falha em sua motivação conferida pelo lógico polonês[10].

Ferdinand Gonseth (1941, *apud* MALINOWSKI, 1993, p. 31), parece ter sido o primeiro a corretamente apontar que essa interpretação do terceiro valor não levaria em conta a dependência mútua desse tipo de proposição. Isso ocorreria também com o **PC**. Quando "p" é indeterminado, também "~p" recebe o terceiro valor, e assim a conjunção "p ∧ ~p" é indeterminada, o que, mais uma vez, contraria a intuição, pois essa conjunção é obviamente falsa.

Soluções para esses inconvenientes são, comumente, oferecidas em duas linhas, nenhuma delas inteiramente satisfatórias (IACONA, 2007). Primeiro, a invalidade ou limitação dos princípios lógicos ocorrem porque lógicas polivalentes, assim como os sistemas bivalentes, são funcionais-veritativas, isto é, o valor de uma fórmula composta depende do valor de cada uma das fórmulas atômicas que a compõe. Isso não causa problemas, por exemplo, no caso das proposições (ii) e (iii), mas no caso da (iv) seria preciso admitir uma interpretação não funcional-veritativa, de modo a torná-la verdadeira, não indeterminada[11]. Outra estratégia consistiria em fazer mudanças nas

[10] Contesta-se, ainda, a própria interpretação antirrealista do *DI 9*, que aceita o argumento fatalista e refuta a premissa do **PB**. De acordo com a leitura *realista*, ao contrário, o argumento fatalista seria inválido por conter uma falácia de mudança de operador (também chamada de falácia modal). Essa falácia consiste em mudar o operador de necessidade de uma sentença disjuntiva para cada um dos disjuntos. A primeira premissa do argumento diz que: "(Necessariamente) P é verdadeira ou falsa". A partir dessa proposição válida, sendo "(p ∨ ~p)" uma tautologia do cálculo proposicional, diz-se, por regra de necessitação, "□ (p ∨ ~p)", e infere-se, falaciosamente, que: "Se p é verdadeira, então não é possível que seja falsa (i.e., p é necessária)" e "Se p é falsa, então p é impossível (ou seja, ~p é necessária)", concluindo que "É necessário que p ou impossível que p". Em termos formais, argumenta-se de "□ (p ∨ ~p)" para "(□ p ∨ □ ~p)", distribuindo o operador de necessidade da proposição disjuntiva para cada um dos disjuntos. Apesar de ser necessariamente verdadeiro que "Amanhã acontecerá uma batalha naval ou amanhã não acontecerá uma batalha naval", não é verdadeiro dizer que uma das contraditórias será necessariamente verdadeira ou necessariamente falsa no futuro. Segundo Susan Haack, sendo a inferência inválida, "[...] o fatalismo *não se segue* da bivalência, assim, mesmo que o fatalismo seja uma tese inaceitável, não há necessidade de rejeitar a bivalência por causa disso", e, portanto, "[...] Łukasiewicz não forneceu uma boa razão para adotar a sua lógica trivalente" (HAACK, 2002, p. 276). Em um artigo mais recente (2011), Dariusz Łukasiewicz criticou essa observação de Haack por ela desconsiderar o contexto mais amplo traçado pelo lógico polonês em "On determinism" (1961), no qual é refutado não somente o determinismo semântico como também o determinismo causal envolvendo futuros contingentes. Deixaremos para uma futura investigação essa via da causalidade, que sem dúvida guarda também pontos interessantes de contato com a crítica peirciana ao determinismo.

11 A criação da lógica temporal por Arthur N. Prior, nos anos 1950, foi em parte uma resposta à insuficiência do tratamento extensionalista da lógica de Łukasiewicz ao problema dos futuros contingentes (PRIOR, 1957).

matrizes, de modo a preservar a validade das tautologias da lógica clássica; isso pode ser feito, por exemplo, adicionando mais valores, utilizando técnicas de supervaloração (BOURNE, 2004; ŁUKASIEWICZ, 2011).

Contudo, no contexto dessa discussão a respeito de tempo, modalidade e determinismo lógico, pode-se ainda adotar uma interpretação alternativa para as matrizes trivalentes, que é o modelo interpretativo peirciano, conforme analisamos a seguir.

3. A lógica trivalente de Peirce

Em um artigo publicado em 1966, Max Fisch e Atwell Turquette (FISCH & TURQUETTE, 1966) reproduziram e analisaram cópias de três páginas não numeradas de um caderno de notas de Peirce, conhecido como seu *Logic Notebook*[12], nas quais o filósofo norte-americano apresentava um sistema matricial trivalente completo para o cálculo proposicional. Essas páginas manuscritas são datadas de 23 de fevereiro de 1909, o que o tornava um precursor, em pelo menos uma década, das primeiras lógicas polivalentes conhecidas de Łukasiewicz (1920) e Emil L. Post (1921)[13].

O que Peirce chamou de "lógica triádica" (*triadic logic*) consiste de um conjunto de matrizes nas quais, além dos valores de verdade tradicionais, verdadeiro ("V") e falso ("F"), ele adiciona o terceiro valor "L", que corresponde ao "limite" entre ambos os valores. Esse conceito de "limite" é relevante aqui, pois Peirce não diz "indeterminado" ou "possível", como o faz Łukasiewicz, o que já descaracteriza a intenção de análise de proposições modais.

Para as tabelas são estabelecidos quatro conectivos unários de negação, dois deles de negação *completa* (representada pelo símbolo [´]), que transforma todos os valores de verdade, e outros dois de negação *parcial* (representado pelo símbolo [*****]), que transforma parcialmente os valores de verdade. Outros seis conectivos binários,

[12] O *Logic Notebook* (1865-1909), assim como os demais manuscritos de Peirce, estão depositados no Departamento de Filosofia da Universidade de Harvard. Os microfilmes digitalizados podem ser consultados no site da Houghton Library: <http://iiif.lib.harvard.edu/manifests/view/drs:15255301$1i>.

[13] A interpretação das tabelas trivalentes neste trabalho se fundamentam em prévias discussões que atribuem a Peirce uma concepção pioneira de análise funcional-veritativa da proposição e descrição do método de tabelas de verdade (ANELLIS, 2001 e 2012, cf. BRADY, 2000, pg. 125). De fato, Peirce introduz o método das tabelas de verdade em 1885, quase duas décadas antes de Russell e Wittgenstein, no artigo "On the Algebra of Logic: a Contribution to the Philosophy of Notation" (EP 1, 225-228; CP 3.359-403). Além disso, um esboço do dispositivo das tabelas de verdade para lógica bivalente, um dos primeiros exemplos registrados em lógica moderna, aparece em texto datado de 1902 (publicado em CP 4.262).

indicados por letras gregas, completam o sistema. Eles correspondem a dois tipos de disjunção {Θ e Y} e conjunção {Ω e Z}, e outros dois cuja função é incerta {Ψ e Φ}, pois seriam redundantes[14]. Essas tabelas seriam posteriormente descobertas por outros lógicos, incluindo Bochvar, Halldén, Klenne e Körner (cf. FISCH & TURQUETTE, 1966; TURQUETTE, 1969; e LANE, 2001).

As seguintes tabelas de negação parcial e dos conectivos {Z, Θ}, por exemplo, correspondem, respectivamente, às tabelas de negação, conjunção e disjunção em Łukasiewicz, conforme apresentadas no capítulo anterior. O operador {Z} é semelhante à conjunção da lógica clássica, em que a fórmula "x Z y" recebe o máximo dos valores atribuídos a "x" e "y"; e {Θ}, assemelha-se à disjunção clássica, onde a fórmula "x Θ y" recebe o mínimo dos valores atribuídos a "x" e "y":

X	x*
V	F
L	L
F	V

	x Z y		
x \ y	V	L	F
V	V	L	F
L	L	L	F
F	F	F	F

	x Θ y		
x \ y	V	L	F
V	V	V	V
L	V	L	L
F	V	L	F

Tabela 3: Matrizes trivalentes de Peirce.

Do mesmo modo que o sistema trivalente de Łukasiewicz, teoremas da lógica proposicional bivalente, como "p ∨ ~p" e "~ (p ∧ ~p)", não são mais universalmente válidos. Mas qual seria o significado filosófico dessa rejeição de princípios da lógica clássica?

Nos textos remanescentes do filósofo não há indicações para isso, e nos fragmentos analisados ele chega a anotar, a respeito de seus experimentos, que "tudo isso parece ser um completo disparate" (MS 339). Escritos da mesma época (c. 1909) a respeito de modalidade levaram os primeiros comentadores da lógica triádica de Peirce a sugerir que ele tinha motivações similares à de Łukasiewicz, ou seja, acomodar enunciados modais no cálculo sentencial[15]. Mas as pesquisas de Susan Haack (1996) e

---

[14] Turquette sugere que esses operadores adicionais, em conjunto com os outros quatro e ordenados em pares {Φ, Θ}, {Ψ, Z} e {Ω, Y}, teriam como objetivo garantir a completa funcionalidade do sistema (TURQUETTE, 1967; cf. SALATIEL, 2011).

[15] "Essencialmente, Peirce parece querer dizer que a lógica triádica pode ser interpretada como uma lógica modal, projetada para lidar com indeterminações resultantes daquele modo de ser que Peirce chamava 'potencialidade' e 'possibilidade real'" (FISCH & TURQUETTE, 1966, p. 79).

Robert Lane (1997 e 1999) refutaram essa interpretação com base em uma leitura mais sistêmica de Peirce, compondo, assim, um quadro mais consistente à qual daremos aqui continuidade.

Um ponto essencial no contexto deste debate é uma definição pouco usual dos princípios de contradição e de terceiro excluído, dada pelo filósofo norte-americano, muito mais próxima de uma lógica de propriedades aristotélica do que propriamente o cálculo proposicional moderno:

> **PTE:** dados dois pares de predicados contraditórios "P" e "não-P", para qualquer termo sujeito individual "S", ou "S é P" ou "S é não-P" é verdadeiro.
> **PC:** dados dois pares de predicados contraditórios "P" e "não-P", para qualquer termo sujeito definido "S", "S é P" e "S é não-P" não são ambos verdadeiros (LANE, 1997).

No próximo capítulo essas definições serão analisadas em detalhes. Por enquanto, vejamos como elas desqualificam uma interpretação modal alética das tabelas peircianas.

Modalidade, em seus aspectos lógicos e metafísicos, é um assunto recorrente em artigos, conferências e textos não publicados de Peirce, nos quais ele dialoga com filósofos medievais, sobretudo Duns Scotus e Ochkam. Além disso, Peirce foi um dos primeiros filósofos a tratarem o assunto no âmbito da lógica moderna, influenciando C. I. Lewis na criação de sistemas modais.

"Issues of Pragmaticism[16]" (1905), em particular, apresenta sua exposição sobre modalidade e temporalidade, consolidando sua posição favorável ao realismo escolástico "extremo", cujo traço distintivo é a aceitação de possibilidades reais. Nesse contexto, o filósofo reconhece que há um modo de ser determinado, a Atual, e dois modos de ser indeterminados: o Necessário e o Possível. Ele apresenta então o seguinte exemplo de raciocínio em que aparecem as proposições asseridas nesses três modos:

> Aquele que sabe que a Universidade de Harvard possui um escritório na State Street, em Boston, e tem a impressão de que é no número 30, mas ainda assim suspeita de que é no número 50, poderia dizer "Eu acho que fica no número 30,

[16] Leitores não familiarizados com o cânone peirciano devem estranhar o termo "pragmaticismo", que é como ele chamou sua doutrina pragmatista para diferenciá-la da de outros filósofos, como William James e John Dewey. O termo, no entanto, não sobreviveu sequer nos escritos do próprio autor.

> mas *pode ser* [*may be*] no número 50", ou "é *possível* que seja no número 50". Então, outro, que não tem dúvidas a respeito de sua lembrança, pode concordar, "É *realmente* [*actually*] no número 50", ou simplesmente, "É no número 50" ou "É no número 50, *de inesse*[17]". Então, a pessoa que havia perguntado primeiro sobre o número poderia dizer: "Já que você tem tanta certeza, *deve ser* [*must be*] no número 50", pois "Eu sei que a primeira figura é 5. Portanto, já que vocês estão certos de que a segunda é 0, *necessariamente* é 50." (EP 2, p. 355).

Uma proposição no modo de ser atual, que possui a forma "S é P", é um tipo de proposição categórica não-modal, para a qual valem os princípios da lógica clássica, como o **PC** e o **PTE**. Contudo, no caso de proposições modais, o que define e caracteriza esses tipos de proposições, segundo o autor, é o abandono de um dos princípios lógicos. Considere o seguinte exemplo de proposição que expressa necessidade:

(i) Necessariamente amanhã choverá ou não choverá.

É, obviamente, uma proposição verdadeira, a despeito dos disjuntos "necessariamente amanhã choverá" e "necessariamente amanhã não choverá" serem ambos falsos[18]; ou seja, não é verdade que, para qualquer enunciado expressando necessidade, "S deve ser P" ou sua negação interna "S deve ser não-P" é verdadeira, mas cada um dos disjuntos, separadamente, são falsos, pois é um fato contingente, não necessário, que amanhã choverá.

Agora, considerando a definição peirciana de **PTE**, dados dois pares de predicados contraditórios "P" e "não-P", para qualquer termo sujeito individual "S", ou "S é P" ou "S é não-P" é verdadeiro, no caso de proposições que expressam necessidade, esse teorema não é mais universalmente válido. Considere agora a versão:

(ii) Amanhã pode chover ou amanhã pode não chover.

Novamente, temos uma proposição verdadeira em que ambos os disjuntos, "S pode ser P" e "S pode ser não-P", são verdadeiros. Nesse caso, tendo em consideração a definição peirciana dada de **PC** – dados dois pares de predicados contraditórios "P" e "não-P", para qualquer termo sujeito definido "S", "S é P" e "S é não-P" não são ambos verdadeiros – tal princípio não é mais válido nesse contexto modal.

---

[17] *In enesse* (inerente) é o termo latino pelo qual Duns Scotus designa uma proposição assertórica.

[18] Fato esse que contraria a semântica funcional-veritativa; isso acontece porque, segundo Quine, trata-se de um caso de *referencialidade opaca* (QUINE, 2011, p. 200).

Proposições necessárias, portanto, são aquelas às quais o **PTE** não se aplica, enquanto proposições possíveis são aquelas às quais o **PC** não se aplica (cf. MS 678, p. 34)[19]. Porém, em ambos os casos o **PB** continua válido.

Outro ponto importante da análise de Peirce, que exerceu influência na lógica temporal de Arthur Prior (PRIOR, 1957 e 1967), é a relação entre modalidade e temporalidade. Segundo Peirce, o tempo é uma forma de modalidade objetiva, em que o passado é o modo existencial do tempo, referente a um estado de coisas determinado ou uma soma de *faits accomplis* (EP 2, 357). O modo de ser do passado, portanto, é o da Atualidade. Já o futuro, conforme pode-se observar nas proposições (i) e (ii) acima, refere-se a um estado de coisas que acontecerão de modo destinado ou indecidível, portanto, de modo necessário ou possível. No primeiro caso, descrevem-se eventos que irão se conformar à lei da natureza, no segundo, temos um caso de futuro contingente. O presente, por outro lado, seria um estado entre o determinado e o indeterminado.

O futuro, portanto, é indeterminado, no sentido em que ele é aleticamente aberto a diferentes histórias ou trajetórias possíveis. Mesmo que, no momento em que um enunciado modal é proferido, já estejam em curso um conjunto de causas que irão determinar aquele estado de coisas previsto, há sempre um elemento de acaso em jogo, o que impede uma conformação do estado de coisas ao determinismo. Por outro lado, rejeita-se também o fatalismo com respeito a enunciados sobre o futuro, pois enquanto passado é correlato, cognitivamente, à memória ou ao "depósito de todo o nosso conhecimento", o futuro é aquilo a respeito pode-se deliberar, agir normativamente e "em certa medida, controlar" (EP 2, 358; cf. CP 6.70).

Claramente, a doutrina das proposições modais aléticas em Peirce não requer o abandono do **PB**. Enunciados a respeito do futuro podem receber diferentes valores-de-verdade, dependendo da sensibilidade a redes causais em sua história, mas, ainda assim, conforma-se a uma semântica bivalente. No exemplo dado por Łukasiewicz:

(iii) Estarei em Varsóvia ao meio dia de 21 de dezembro do próximo ano ou não estarei em Varsóvia no próximo ano.

---

[19] "[...] o que caracteriza e define uma asserção de Possibilidade é sua emancipação do Princípio de Contradição, enquanto ela permanece sujeita ao Princípio do Terceiro Excluído; enquanto que o que caracteriza e define uma asserção de Necessidade é que ela permanece sujeita ao Princípio de Contradição, mas liberta-se do jugo do Princípio do Terceiro Excluído; e o que caracteriza e define uma asserção de Atualidade ou simples existência é que ela se submete a ambas as fórmulas [...]".

 Kínesis, Vol. IX, n° 20, Julho 2017, p. 151-173

Essa proposição não é mais indeterminada, mas verdadeira, ainda que os disjuntos possam ser ambos falsos ou ambos verdadeiros, dependendo do tipo de abertura alética – necessária ou possível – que o tempo verbal assuma. Nesse caso, ainda que o **PB** seja preservado, seria preciso, para representar proposições modais, uma lógica alternativa ou uma semântica intencional, que Peirce não chegou a desenvolver[20], mas que estimulou Prior na criação de uma lógica temporal, de modo a superar as dificuldades advindas da lógica trivalente de Łukasiewicz (PRIOR, 1957). De qualquer modo, torna-se evidente que as matrizes trivalentes não foram inventadas para acomodar enunciados modais.

4. Continuidade, fronteira e lógica trivalente em Peirce

A reconstrução de uma motivação para a lógica trivalente em Peirce – uma vez que o próprio filósofo nada disse a respeito nos manuscritos remanescentes – é realizada tendo em vista o contexto de sua análise proposicional, a respeito da qual destacam-se as seguintes características: (i) uma estratégia próxima do que hoje é conhecida como semântica dos jogos; (ii) a diferenciação de negação interna de externa; e (iii) o consequente emprego próprio, pouco usual, das leis primitivas da lógica clássica às proposições gerais.[21]

Segundo Peirce, proposições possuem dois níveis de indeterminação, vagueza[22] e generalidade, referentes tanto ao sujeito lógico quanto ao predicado da proposição. Para os propósitos deste artigo, a exposição se restringirá aos casos de quantificação sobre indivíduos (lógica de primeira ordem).

Assim, o sujeito lógico da proposição é tipificado como *determinado* – no caso de ser um nome próprio (“Barack Obama”) ou uma descrição definida (“O atual

---

[20] No final do século 19 Peirce elaborou um complexo sistema lógico diagramático que ele chamou de Grafos Existenciais. Uma parte dessa linguagem, que ele não chegou a completar, incluía um sistema diagramático de lógica modal. Entretanto, tais escritos não chegaram a ser publicadas, e por isso não tiveram impacto algum na criação da lógica modal (ØHRSTRØM & HASLE, 1995, p. 142; a respeito dos Grafos Existenciais, cf. ROBERTS, 1973).

[21] Sobre a teoria da proposição de Peirce, cf. HILPINEN, 1992, e THIBAUD, 1997; para um exame da semântica dos jogos em Peirce, cf. PIETARINEN, 2006. A hipótese trabalhada nesse capítulo é fortemente debitaria daquela realizada originalmente por LANE, 1997.

[22] O sentido de vagueza empregado nesse contexto proposicional é diferente da noção moderna de vagueza como casos-fronteira (*borderline cases*), nos quais a incerteza persiste a despeito do incremento informacional. Deve-se dizer, contudo, que em diversos escritos, publicados ou não, Peirce ofereceu contribuições pioneiras à lógica da vagueza (a esse respeito, ver ENGEL-TIERCELIN, 1992; AGLER, 2013).

presidente dos Estados Unidos") – ou *indeterminado*. Nesse último caso, a indeterminação pode ser de dois tipos: *vagueza* (ou indefinição), cuja representação na lógica de predicados é feita por meio de fórmulas existencialmente quantificadas; e *generalidade* (ou universalidade), cuja representação é feita por meio de fórmulas universalmente quantificadas.

Então, Peirce afirma que o **PTE** não se aplica a proposições gerais e o **PC** não se aplica[23] a proposições vagas (EP 2, p. 351). Mas isso não significa o abandono da bivalência, pois contrariaria o bom senso no caso de uma proposição como "Todos os homens são mortais", que é obviamente verdadeira. Considere como exemplo a seguinte proposição disjuntiva:

(i) Todos os paulistas gostam de café ou todos os paulistas não gostam de café.

Peirce diz que, nesse caso, não se aplica o **PTE** porque esse é um princípio válido apenas em casos em que o sujeito é um *indivíduo* determinado, a respeito do qual se poderia dizer que "S é P" ou "S é não-P" não seriam ambas falsas. No caso da disjunção acima, porém, o **PTE** não se aplica porque ambos os disjuntos – "Todos os paulistas gostam de café" e "Todos os paulistas não gostam de café" – são ambos falsos. Portanto, a proposição recebe o valor de verdade falso, até que o intérprete, a quem é atribuída essa função na estratégia semântica de jogo, escolha o indivíduo ao qual o predicado "gosta de café" possa ser atribuído.

Do mesmo modo, substituindo por quantificadores existenciais e operador conjuntivo, como em:

(ii) Alguns os paulistas gostam de café e alguns paulistas não gostam de café.

PC não se aplicaria, pois este é um princípio válido apenas para casos em que o sujeito é *definido* (escolha aqui atribuída ao emissor) e desse modo, ambos os conjuntivos – "Alguns paulistas gostam de café" e "Alguns paulistas não gostam de café" – seriam verdadeiros, e a proposição recebe um valor de verdade verdadeiro.

Essa definição pouco usual de proposições gerais e vagas com base nos princípios lógicos deve ser compreendida no contexto do uso interno do operador de negação, no qual a negação incide sobre o predicado, dentro da proposição, não de seu

[23] A distinção entre o **PTE** *não se aplicar* a proposições e *se aplicar, mas ser falso* é essencial para entender a argumentação que segue; essa diferenciação foi observada por LANE, 1997.

uso externo, no qual toda a proposição é negada. Tem-se então que as fórmulas "$\forall x\ (\phi x \rightarrow \psi x)$" e "$\forall x\ (\phi x \rightarrow \sim\psi x)$" são *contrárias*, isto é, podem ambas ser verdadeiras (**PTE** não é válido), mas não ambas falsas; e as fórmulas "$\exists x\ (\phi x \wedge \psi x)$" e "$\exists x\ (\phi x \wedge \sim\psi x)$" são *subcontrárias*, i.e., podem ambas ser verdadeiras (**PC** não é válido), mas não ambas falsas.

O ponto é que, ainda que essas proposições quantificadas – universais e particulares – rejeitem leis da lógica clássica, elas não requerem, por isso, o abandono da semântica bivalente, já que cada um dos enunciados recebe um valor de verdade verdadeiro ou falso. Sendo assim, a lógica trivalente de Peirce, ao contrário, objetiva representar um tipo específico de proposição para a qual tanto o **PTE** quanto o **PC** se aplicam, mas o terceiro excluído é um princípio inválido; isso exigiria um terceiro valor, nem determinantemente verdadeiro e nem determinantemente falso, mas um limite entre ambos os valores.

Essas proposições, de acordo com o raciocínio, devem ser aquelas em que o sujeito lógico é *individual* (portanto, **PTE** se aplica) e *definido* (portanto, **PC** se aplica). Em resumo, devem ser proposições *singulares*, i.e., individuais e definidas. Entende-se por proposições singulares aquelas que contém indivíduos como seu constituinte imediato e direto, como em "Sócrates é filósofo" e "Esta caneta é azul". Em geral, essas proposições eram consideradas um tipo especial de proposição geral, opinião que Peirce compartilhava (CP 4. 42). Mas a noção de singularidade que ele tinha em mente, quando elaborou suas matrizes trivalentes, parece ser de uma espécie mais específica.

Para exemplificar isso, ele recorreu algumas vezes a um exemplo simples e engenhoso de um borrão de tinta em uma página em branco (CP 4.127, 1893). Esse borrão é cercado de modo que, dentro desses limites, cada ponto na área é preto ou branco (e nenhum ponto é tanto preto quanto branco). Mas, e quanto à linha de demarcação entre o borrão preto e o papel branco? Chamemos de *fronteira* a essa linha[24]. A questão aqui é: os pontos nessa fronteira são: (a) tanto pretos quanto brancos; ou (b) nem pretos e nem brancos?

[24] A respeito dessa noção de fronteira em Peirce, associada à questão do contínuo real e do realismo modal peirciano, cf. SILVEIRA, 2009.

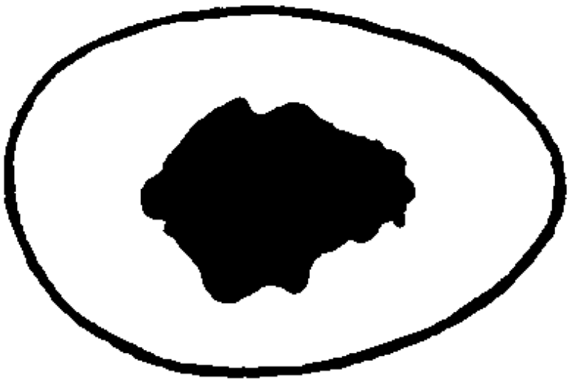

Imagem 1: Exemplo do borrão de tinta (CP 4.127).

A resposta, segundo Peirce, é que esses pontos não são nem pretos e nem brancos (b). Eles só adquirem um desses predicados quando unidos em uma superfície contínua, mas, quando tomados singularmente, não são nem uma coisa e nem outra. Tem-se então que a seguinte proposição, e chamemos de "F" essa linha de fronteira:

(iii) F é preta ou F é não-preta.

O enunciado se sujeita ao **PTE** porque contém um indivíduo ao qual é possível atribuir o predicado "preto" ou o predicado "não-preto". Contudo, cada um dos disjunto não é verdadeiro e nem falso no momento em que a proposição é asserida, e recebe, por esta razão, o valor de verdade "L". Portanto, o **PTE** é inválido nesse caso e o **PB** é rejeitado.

Por outro lado, é interessante que, ao rejeitar que ambas as proposições são tanto verdadeiras quanto falsas, Peirce diz que **PC** é verdadeiro em relação a proposições fronteiriças, ou seja, as conjunções "F é preta" e "F é não-preta" não são ambas verdadeiras, e, portanto, uma dessas proposições deve ser falsa. Mas por que isso acontece?

Essa discussão sobre fronteira em Peirce está estreitamente relacionada com a sua teoria do contínuo e das quantidades infinitesimais, que ele elaborou ao longo da vida madura em diferentes fases, em abordagens tanto matemáticas quanto filosóficas (cf. HAVENEL, 2008). Diferentemente de Cantor e Dedekind, ele considerava que um contínuo real não poderia ser composto por entidades discretas como números reais, mas apenas entidades *potenciais*, passíveis de serem individualizadas ou "discretizadas" na linha contínua.

Nesse sentido, a concepção peirciana de contínuo é considerada hoje próxima da análise infinitesimal suave (*smooth infinitesimal analysis*). Esse ponto pode ser ilustrado com o exemplo de John L. Bell (2008, p. 5) para demonstrar, informalmente, como o **PTE** não se aplica, universalmente, a "mundos suaves", pois justifica a construção de funções descontínuas ou discretas.

Dado um mundo suave *S*, considere a função descontínua f (x) na qual:

f (x) = 1, para x = 0; e

f (x) = 0, para x ≠ 0.

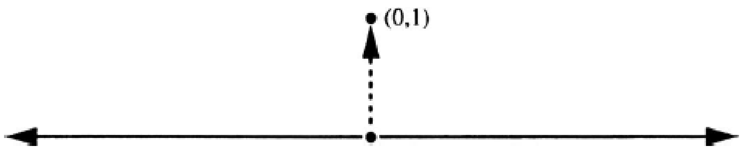

Imagem 2: função descontínua em uma linha real (BELL, 2008, p. 5).

De acordo com o **PTE**, para qualquer número real x:

(iv) x = 0 ou x ≠ 0.

Porém, como há uma profusão de infinitesimais na linha real, não é possível afirmar nem que "x = 0" e nem que "x ≠ 0"; portanto, o **PTE** é falso em *S*.

O exemplo corrobora com as supostas intenções de Peirce a respeito de sua lógica trivalente. Uma vez que o **PTE** só se aplica a individuais, ele não se aplica a um contínuo, que é da natureza de um geral. Diz Peirce:

> Agora, caso aceitemos a ideia comum de continuidade [...] devemos dizer que, uma linha contínua não contém pontos ou devemos dizer que o princípio do terceiro excluído não se aplica a esses pontos. O princípio do terceiro excluído somente se aplica um indivíduo (pois não é verdade que "Todo homem é sábio" nem que "Todo homem é não sábio"). Mas locais sendo meros possíveis, sem existência atual, não são indivíduos (PM, p. 138, 1903[25]).

Portanto, o **PTE** não se aplica a um contínuo, do mesmo modo que não se aplica a proposições gerais ou modais, mas se aplica e é falso com respeito a um ponto discreto em uma linha contínua, conforme demonstrado pela função f(x). Esse ponto discreto representa uma quebra do contínuo, uma descontinuidade naquilo que a metafísica

[25] Peirce antecipa, portanto, em pelo menos cinco anos as ideias de L.E.J. Brouwer, que, em 1908 (em "The Unreliability of the Logical Principles"), rejeitou a validade da lei do terceiro excluído na lógica do contínuo.

peirciana considera ser o substrato da realidade, e que, em um contínuo temporal, seria um instante que traduz o presente, um ponto-limite ou fronteira entre infinitos instantes do passado e de um futuro modalmente aberto a novas determinações (cf. BERTRAND, 1985, cap. 1).

A doutrina do contínuo de Peirce, por fim, sustenta o indeterminismo de Aristóteles, na medida em que rejeita tanto o determinismo quanto o fatalismo. Primeiro, porque o futuro contingente é descrito como um contínuo de possibilidades reais que impossibilita qualquer exatidão ou determinação completa em termos lógicos e semânticos. E, segundo, a abertura alética do contínuo temporal preserva elementos de criatividade e arbitrariedade no universo do discurso, oferecendo um amplo "espaço de manobra" para agentes livres.

5. Conclusões

Sistemas lógicos polivalentes ganharam proeminência na lógica moderna devido, em grande parte, aos trabalhos de Łukasiewicz no início dos anos 1920, no contexto de um debate filosófico a respeito do determinismo e dos futuros contingentes em Aristóteles. Peirce estava a par dessa discussão, sobretudo por via de seus estudos dos medievais, e adotou a mesma posição indeterminista. Porém, de acordo com a análise apresentada neste artigo, a lógica trivalente proposta pelo filósofo norte-americano, ainda que relacionada com questões semelhantes, parece ter motivações diversas daquelas que subjazem a descoberta posterior das matrizes trivalentes[26].

Em seus aspectos formais, ambos os sistemas se assemelham. De fato, Peirce insere-se entre os criadores de lógicas polivalentes com valores de verdades *insaturados* (*truth-value gap*), cujo terceiro valor é interpretado como sendo nem verdadeiro e nem falso, em oposição àquelas com valores de verdade saturados (*truth-value glut*), que tratam o terceiro valor como sendo tanto verdadeiro quanto falso (PRIEST, 2008, p. 127-128). Suas tabelas trivalentes teriam, portanto, uma semântica similar àquelas de Łukasiewicz e Kleene[27], que implicam na rejeição do **PTE**.

---

[26] Ainda que a presente discussão se dê no âmbito da lógica trivalente, é importante enfatizar que tanto Peirce quando Łukasiewicz sustentaram aspectos objetivos do indeterminismo e da subsistência de possibilidades reais, posição que os aproxima de Aristóteles. Esses tópicos, porém, serão matéria de futuras pesquisas.

[27] As matrizes de Kleene diferem das de Łukasiewicz apenas na coluna mediana para condicional, resultando, assim, numa rejeição absoluta dos teoremas do cálculo proposicional clássico.

A proposta de Łukasiewicz, entretanto, de que proposições modais sobre o futuro requerem o abandono da bivalência, tem como consequência resultados que contrariam a *logica utens*[28]. Para evitá-los, seriam necessários ajustes nas matrizes ou interpretação em semânticas modais, como ocorre com a lógica temporal de Prior. A motivação filosófica que sustenta o sistema trivalente peirciano – desde que admitamos que a leitura aqui adotada seja a mais próxima das intenções do autor – ofereceria um quadro mais consistente na esfera da lógica da continuidade: ao mesmo tempo em que sustentaria o indeterminismo aristotélico, comporia uma aplicação que, em princípio, evitaria contrassensos no uso das tabelas trivalentes. O motivo do abandono da bivalência, em Peirce, seria resolver questões envolvendo a matemática do contínuo e dos infinitesimais, o que o aproximaria, conforme apontado (cap. 4), da análise infinitesimal suave. Creio ser este um campo ainda a ser explorado em lógica, mas, observando-se de uma perspectiva mais ampla, o estudo aqui empreendido atesta o quanto a filosofia de Peirce oferece subsídios teóricos para sistemas lógicos alternativos.[29]

6. Referências

1. Obras de J. Łukasiewicz:

ŁUKASIEWICZ, Jan (1918). Farewell lecture by professor Jan Łukasiewicz, delivered in the Warsaw University Lecture Hall on March 7, 1918. In: *Selected works*. BORKOWSKI, L. (ed.). Orth-Holland Publishing Company: Amsterdan-London, 1970, pp. 84-86.

_____. (1920). On Three-valued logic. In: *Selected works*. BORKOWSKI, L. (ed.). Orth-Holland Publishing Company: Amsterdan-London, 1970, pp. 87-88.

_____. (1930). Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic. In: *Selected works*. BORKOWSKI, L. (ed.). Orth-Holland Publishing Company: Amsterdan-London, 1970, pp. 153-178.

_____. (1961). On determinism. In: *Selected works*. BORKOWSKI, L. (ed.). Orth-Holland Publishing Company: Amsterdan-London, 1970, pp. 110-128.

_____. *Selected works*. BORKOWSKI, L. (ed.). Orth-Holland Publishing Company: Amsterdan-London, 1970.

[28] Peirce conceitua *logica utens* (útil) como hábitos de raciocínio de natureza intuitiva, que não demandam aprendizagem, ao contrário ao raciocínio formal ou *lógica docens* (ensinada).

[29] Este artigo resulta de pesquisa financiada pelo PNPD/CAPES, realizada entre 2014-2016. O autor agradece ao parecerista anônimo da revista **Kínesis** pelas sugestões e correções que, ainda que não tenham sanado eventuais problemas de responsabilidade do autor, contribuíram para a clareza e consistência teórica do artigo.

2. Obras de C.S. Peirce:

PEIRCE, Charles Sanders.*Collected papers*. 8 vols. HARTSHORNE, Charles; HEISS, Paul e BURKS, Arthur (eds.). Cambridge: Harvard University Press, 1931-1958. [Citado como CP, seguido do volume e do número do parágrafo.]
_____. The Charles S. Peirce Papers (Microfilm Edition). Cambridge: Harvard University Library Photographic Service, 1966. Disponível em: <http://andersonfam.me/display/read_work?work_id=149>. Acesso em: Out. 2016. [Citado como MS seguido do número da página.]
_____. *The essential Peirce, vol. 1* (1867-1893). HOUSER, Nathan and KLOESEL, Christian (eds.). Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1992. [Citado como EP 1 seguido do número da página.]
_____. *The essential Peirce, vol. 2* (1893-1913). THE PEIRCE EDITION PROJECT (ed.). Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1998. [Citado como EP 2 seguido do número da página.]
_____. *Philosophy of mathematics*: Selected writings. MOORE, Matthew E. (ed.). Bloomington and Indianapolis, IN: Indiana University Press, 2010. [Citado como PM seguido do número da página.]

3. Outras referências:

AGLER, David W. Peirce and the specification of borderline vagueness. *Semiotica*: Journal of the International Association for Semiotic Studies, 193, p.195–215, 2013.
ANELLIS, Irving. The genesis of the truth-table device. *Russell: the Journal of the Russell Archives*, n. 24, p. 55–70, Summer 2001. Disponível em; <https://escarpmentpress.org/russelljournal/article/viewFile/2056/2081>. Acesso em: Jun. 2017.
_____. Peirce's truth-functional analysis and the origin of the truth table. *History and Philosophy of Logic*, vol. 33, n. 1, p. 87-97, February 2012. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01445340.2011.621702?journalCode=thpl20>. Acesso em: Jun. 2017.
ARISTÓTELES. *Da Interpretação*. José Veríssimo Teixeira da Mata (trad. e comentários). São Paulo: Editora Unesp, 2013.
BELL, John L. *A Primer of Infinitesimal Analysis*. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
BERGMANN, Merrie. *An introduction to many-valued and fuzzy logic*: Semantic, algebras and derivation systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
BERTRAND, Helm P. *Time and reality in American Philosophy*. Amherst: University of Massachusetts, 1985.
BOURNE, Craig. Future contingents, non-contradiction and the law of excluded middle. *Analysis*, vol. 64, n. 2, p. 122-128, April 2004.
BRADY, Geraldine. From Peirce to Skolem: a neglected chapter in the History of Logic. North Holland: Elsevier, 2000.
ENGEL-TIERCELIN, Claudine. *Vagueness and the unity of C.S. Peirce's realism*. Transactions of the Charles S. Peirce Society, vol. 28, n. 1, p. 51-82, Winter 1992.
FERNANDES, Fernanda L. A. *Duas faces do fatalismo lógico*: O argumento do dominador de Diodoro Cronos e a batalha naval no De Interpretatione IX. Dissertação de Mestrado. UFRJ: 2009.

FISCH, Max and TURQUETTE, Atwell. Peirce's triadic logic. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*: A Quartely Journal in American Philosophy, vol. II, n. 2, p. 86-133, Fall 1996.
GASKIN, Richard. *The sea battle and the master argument*: Aristotle and Diodorus Cronus on the metaphysics of the future. Berlin/ New York: de Gruyter, 1995.
HAACK, Susan. *Deviant logic, fuzzy logic*: Beyond the formalism. Chicago and London: University of Chicago Press, 1996.
_____. *Filosofia das lógicas*. Carlos Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra (trads.). São Paulo: UNESP, 2002.
HAVENEL, Jérôme. Peirce's clarifications of continuity. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*: A Quartely Journal in American Philosophy, vol. 44, n. 1, p. 86-133, Winter 2008.
HILPINEN, Risto. On Peirce's Philosophical Logic: Propositions and their objects.*Transactions of the Charles S. Peirce Society*: A Quartely Journal in American Philosophy, vol. XXVIII, n. 3, p. 467-488, Summer 1992.
IACONA, Andrea. Future contingents and Aristotle's fantasy. *Crítica*: Revista Hispanoamericana de Filosofía. vol. 39, n. 117, p. 45–60, 2007.
LANE, Robert. Peirce's "Entanglement" with the principles of excluded middle and contradiction. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*: A Quartely Journal in American Philosophy, vol. XXXIII, n. 3, p. 680-703, Summer 1997.
_____. Peirce's triadic logic revisited. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*: A Quartely Journal in American Philosophy, vol. XXXV, n. 2, p. 284-311, Spring 1999.
_____. Triadic logic. *The Digital Encyclopedia of Charles S. Peirce*, January 2001. Disponível em: <http://www.digitalpeirce.fee.unicamp.br>. Acesso em: Outubro 2016.
ŁUKASIEWICZ, Dariusz. On Jan Łukasiewicz's many-valued logic and his criticism of determinism. In: *Philosophia Scientiæ*, p. 15-22, 2011. Disponível em: <http://philosophiascientiae.revues.org/650>. Acesso em: Out. 2016.
MALINOWSKI, Grzegorz. *Many-valued logics*. Oxford Logic Guides, n. 25. Oxford: Oxford University Press, 1993.
ØHRSTRØM, Peter and HASLE, Per F. V. *Temporal logic*. From ancient ideas to artificial intelligence. Studies in linguistics and philosophy, vol. 57. Dordrecht, Boston, and London: Kluwer Academic Publishers, 1995.
PIETARINEN, Ahti-Veikko. *Signs of logic*: Peircean themes on the philosophy of language, games, and communication. Dordrecht: Springer, 2006.
PRIEST, Graham. *An Introduction to non-classical logic*: From If to Is. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
PRIOR, Arthur N. *Time and modality*. Oxford: Oxford University Press, 1957.
_____. *Past, present and future*. Oxford: Oxford University Press, 1967.
QUINE, Willard Van Orman. Referência e modalidade. In: *De um ponto de vista lógico*. Antonio Ianni Segatto (trad.). São Paulo: Editora UNESP, 2001, p. 195-221.
ROBERTS, Don. *The existential graphs of Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton & Co, 1973.
SALATIEL, J. Renato. Aspectos da lógica trivalente de C. S. Peirce. *Kínesis*: Revista de Estudos dos Pós-Graduandos em Filosofia, v.3, p. 31-42, 2011.
SILVEIRA, Lauro Frederico Barbosa da. *Continuity and discontinuity in boundary issues*. COGNITIO: Revista de Filosofia, vol. 10, n.1, p.139-152, 2009.
THIBAUD, Pierre. Between saying and doing: Peirce's propositional space. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*: A Quartely Journal in American Philosophy, vol. XXXIII, n. 2, p. 270-327, Summer 1997.

TURQUETTE, Atwell R. Peirce's phi and psi operators for triadic logic. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*: A Quartely Journal in American Philosophy, v. 3, p. 66-73, 1967.

_____. Peirce's complete systems of triadic logic. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*: A Quartely Journal in American Philosophy, vol. V, n. 4, p. 199-210, 1969.