PEIRCE, FREGE, RUSSELL E O SURGIMENTO DA PREDICAÇÃO LÓGICA CONTEMPORÂNEA

PEIRCE, FREGE, RUSSELL AND THE EMERGENCE OF CONTEMPORARY LOGIC PREDICATION

Rafael dos Reis Ferreira[1]

Resumo: Apresentamos neste artigo explicitações histórico-conceituais sobre o surgimento da predicação lógica contemporânea. Quando se trata de predicação, remete-se de imediato à obra de Aristóteles, mas, com as transformações trazidas pela Lógica Contemporânea, o estudo da predicação deixa o plano do estudo lógico-gramatical para o estudo do plano da análise lógico-matemática. Veremos, nesse sentido, a importância dos trabalhos de Peirce, Frege e Russell para o surgimento da predicação lógica contemporânea. Embora Peirce tenha sido o precursor da introdução do conceito de função proposicional na História da Lógica, ganha destaque, contemporaneamente, o modelo de interpretação da predicação inicialmente proposto por Frege.

Palavras-chave: Predicação. Função Proposicional. Lógica Contemporânea.

Abstract: We are introducing here the historical-conceptual explanation about the appearance of predication contemporary logic. When it comes to predication, remit immediately to Aristotle's work, but with the changes brought by contemporary logic, the study of predication let the plan of logical-grammatical study for the plan the study of logical-mathematical analysis. We will see, in this sense, he importance of Peirce's, Frege's and Russell's works for the appearance of contemporary logic predication. Although Peirce has been the precursor in the introduction of the concept of propositional function in the history of logic, is highlighted contemporaneously the interpretation model of predication initially proposed by Frege.

Keywords: Predication. Propositional Function. Contemporary Logic.

1. Predicação lógica e função proposicional

Podemos dizer, inicialmente, que predicados são classificados como termos gerais que geralmente se referem a uma gama de objetos e não exclusivamente a um objeto determinado (MCGINN, 2000, p. 52). O predicado, assim compreendido, é contemporaneamente expresso pelo simbolismo da função proposicional.

A função proposicional surge como um esquema de análise lógica da proposição, resultante da convergência entre Matemática e Lógica entre os séculos XIX e XX. Dois dos principais responsáveis por essa convergência foram Gottlob Frege (1848 – 1925) e Bertrand Russell (1872 – 1970).

[1] Docente da UNIFAFIBE - Centro Universitário. Doutor em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Mestre em Filosofia pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UNESP/Marilia em 2011. E-mail: leafareis@yahoo.com.br

https://doi.org/10.36311/1984-8900.2016.v8.n17.07.p115

Em uma das obras centrais de Russell, o *Principia Mathematica* (1910), que escreveu em colaboração com Alfred North Whitehead (1861-1947), o conceito de função proposicional aparece, em termos formais, logo no início da obra, como um dos conceitos elementares:

> Seja ϕx uma sentença contendo uma variável x tal que ela se torna uma proposição quando a x é dado algum significado determinado fixo. Então, ϕx é chamada de "função proposicional"; ela não é uma proposição, já que, devido à ambiguidade de x, não faz realmente uma afirmação como um todo. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1968, p. 14, tradução nossa)

Embora a definição esta apresente uma variável para indivíduo, uma função proposicional pode ter mais de uma variável para indivíduo. Por exemplo, considere a proposição "Sócrates era menor que Platão"; ser menor no sentido de ter uma estatura menor. Como visto, podemos decompor esta proposição pelo seguinte esquema: "x era menor que Platão", tal que podemos substituir x por qualquer indivíduo. Conforme a substituição em x, se o indivíduo que o substitui é menor que Platão, então a proposição é verdadeira, caso contrário é falsa.

Além disso, podemos visualizar esta proposição não como constituída por um indivíduo e um predicado atribuído a ele, mas podemos olhar para a relação em si, isto é, para a relação "ser menor que". Neste caso, podemos expressar o primeiro elemento da relação por "x" e o segundo elemento da relação por "y", tal que podemos ter a seguinte expressão: "x é menor que y". Ademais, se expressarmos a relação "ser menor que" por M, então, temos a seguinte expressão: xMy ou $M(xy)$. Desse modo, conforme a substituição em x e y, temos como resultado uma proposição que é ou verdadeira ou falsa, sendo que a especificação do valor de verdade depende dos indivíduos que se colocam na relação "é menor que".

Assim, podemos observar que a função proposicional permite expressar não apenas a forma de uma relação entre sujeito e predicado, mas, também, a forma das relações entre indivíduos em uma proposição. Isso significa que a função proposicional é condição para expressar uma lógica das classes, em que se procura determinar se um sujeito tem ou não um determinado predicado, ou uma lógica das relações, em que se procura determinar relações quaisquer entre dois ou mais sujeitos em uma proposição.

Esse poder de análise expresso pela forma esquemática da função proposicional para a análise das proposições no nível da Lógica das Classes e da Lógica das Relações, torna-se mais nítido se comparado com o tipo de análise da proposição realizada até então, antes do surgimento da função proposicional, pela tradicional Lógica Aristotélica.

Na Lógica Aristotélica a análise mais simples e redutível da proposição é expressa por "*S* é *P*". Isso quer dizer que a estrutura básica da proposição é constituída por três noções elementares: os termos sujeito e predicado, e o verbo ser. Sobre isso, diz Aristóteles no início de sua obra intitulada "Primeiros Analíticos":

> Chamo de *termo* (*ὅρος*) aquilo em que a premissa se resolve, a saber, tanto o predicado (*κατηγορούμενο*) quanto o sujeito, quer com a adição do verbo *ser,* quer com a remoção de *não ser*. (ARISTÓTELES, 24b 15, grifo nosso)

Notemos que o verbo "ser" une os referidos termos envolvidos na relação ou os separa, no caso do "não ser", constituindo-se, nesse sentido, como um "operador copulativo", fundamental para a realização da predicação.

Diz Lucas Angioni em *Teoria da Predicação em Aristóteles* que em Aristóteles "Por predicação, entende-se o enunciado que (i) possui a forma '*S* é *P*' ou alguma forma equivalente e redutível àquela, (ii) pretende reportar-se a fatos dados do mundo e, assim apresenta-se como pretensão de constatação ou registro.". (ANGIONI, 2006, p. 17)

Um enunciado com pretensão de constatação é, por exemplo, o enunciado declarativo "Sócrates é filósofo"; e um enunciado que não há pretensão de constatação é, por exemplo, "Que chova hoje" ou "Feche a porta", pois este primeiro exprime um desejo e o segundo uma ordem. Diz Angioni, nesse sentido, que "[…] um enunciado declarativo pretende *declarar* ou *mostrar* um estado de coisas, ou seja, um enunciado que se define essencialmente pelo propósito de constatar uma situação dada no mundo.". (ANGIONI, 2006, p. 20, grifo do autor). Desse modo, "[…] se a situação proposta no enunciado realmente se apresenta no mundo, o enunciado é verdadeiro. Se a situação proposta no enunciado não se apresenta no mundo, o enunciado é falso.". (ANGIONI, 2006, p. 20, grifo do autor)

O uso de letras do alfabeto é imprescindível para a expressão da forma "*S* é *P*". No *Órganon* Aristóteles utiliza-se de letras nos *Primeiros Analíticos* e *Segundos Analíticos* para a análise dos termos nas proposições categóricas. Escreve Aristóteles, por exemplo, nos *Primeiros Analíticos*: "[…] se A é predicado de todo B e B de todo C, A terá necessariamente que ser predicado de todo C.". (ARISTÓTELES, 26a1)

Tais letras expressam o conceito de variável. Diz Józef Maria Bocheński em *Lógica Formal Antiga* que "Há uma dificuldade em compreender o que as variáveis representam; mas se considerarmos o texto correspondente de Aristóteles (11.33) [*Primeiros Analíticos*] e a tradição inalterável posterior, parece que elas devem ser interpretadas como variáveis-predicado, não como variáveis proposicionais.". (BOCHENSKI, 1951, p. 75, tradução nossa). Quanto à importância da utilização da variável por Aristóteles, diz Bocheński: "Ele [Aristóteles] descobriu a variável: mas muitos dos seus textos mostram como a passagem de uma letra como abreviação de um nome converte-se lentamente em uma variável; mesmo assim, parece como se nunca se percebeu a elevação que foi lidar com variáveis.". (BOCHENSKI, 1951, p. 44, tradução nossa)

No caso da expressão "*S* é *P*", a ordem é importante, pois tal expressão está mais atrelada à estrutura gramatical da linguagem natural, cuja cópula deve constar na relação entre os termos. Já no caso da função proposicional, a ordem das relações entre os termos envolvidos na expressão é apenas uma convenção adotada pelo lógico em sua linguagem; nesse caso, a convenção se deve mais a sua semelhança com a expressão da função em Matemática; convencionando-se adotar, então, por razões históricas, a expressão "ϕx", mas não a expressão "$x\phi$".

A supressão da cópula "é" parece ser de fundamental importância para o grau de abstração alcançado com a função proposicional. Podemos dizer que sem a utilização da cópula, ganha-se em poder de expressão da forma lógica mais simples e redutível da proposição e, também, em poder de expressão operacional ou de cálculo entre os termos envolvidos nessa expressão, distanciando-se das intuições da estrutura sujeito-predicado presente na linguagem natural. Nesse sentido, enquanto a função proposicional permite expressar não apenas a Lógica das Classes, mas, também, a Lógica das Relações, o esquema de análise "*S* é *P*" expressa apenas a Lógica das Classes.

Assim, com a função proposicional, a análise da forma lógica da proposição se distancia da linguagem natural e se aproxima da natureza da análise e do cálculo realizada em Matemática. Podemos dizer que essa aproximação é resultado de uma tendência de refinamento do simbolismo da linguagem da Lógica que ocorreu, principalmente, no final do século XIX e começo do século XX. Russell, um dos principais lógicos deste período, parece captar essa tendência ao se expressar com as seguintes palavras:

> A Matemática e a Lógica foram, historicamente falando, estudos inteiramente distintos. A Matemática esteve relacionada com a ciência e a Lógica com a língua grega. Mas, ambas se desenvolveram nos tempos modernos, a saber: a Lógica tonou-se mais Matemática e a Matemática tornou-se mais Lógica. (RUSSELL, 1963, 186, tradução nossa)

Observam Blanché e Dubucs, em *História da lógica*, que essa tendência e convergência inauguram uma nova área de investigação que foi designado de "Logística", mas se tornou mais conhecida por "Lógica Matemática". Dizem os autores que a Lógica Matemática "[...] traduz bem uma das características distintas da lógica contemporânea, a saber, a aplicação constante dos métodos e dos raciocínios usados na matemática […].". (BLANCHÉ; DUBUCS, 1996, p. 357)

É notório, nesse sentido, que a função proposicional surja no final do século XIX e começo do século XX como resultado gradativo da convergência dessas duas áreas. Áreas estas que, por muito tempo, percorreram caminhos paralelos e quase que independentes, mas que, progressivamente, encontraram elementos de intersecção, sendo um desses elementos de interseção a própria função proposicional, que une, de um lado, o conceito de predicação em lógica e, de outro, o conceito de função matemática.

Segundo Bocheński em *Uma História da Lógica Formal*, na seção do livro "Forma Lógica" a função proposicional, o que ele chama de "conceito matemático de função", surge com Peirce e Frege:

> Nem De Morgan nem qualquer outro lógico podiam seguir em tão alto nível de abstração como é aqui alcançado. Basicamente, isso é um redescobrimento do conceito escolástico de forma, feito mediante a ampliação do conceito matemático de função, o qual nos referimos a Peirce e Frege. (BOCHENSKI, 1961, p. 320, tradução nossa)

Entretanto, do ponto de vista cronológico, podemos dizer que o conceito de função proposicional é introduzido pela primeira vez nos trabalhos de Peirce, com a publicação do seu escrito intitulado "Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica" em 1867.

2. Peirce e a função proposicional

Há registros explícitos do conceito de função proposicional nos trabalhos de Charles Sanders Peirce (1839 – 1914), quando o mesmo introduz o conceito de “rema” (*rhema*) em no escrito intitulado “Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica” (1867) (*Upon Logical Comprehension and Extension*).

Na coletânea de textos de Peirce intitulada “*Collected papers of Charles Sanders Peirce*”, a referência que nos parece mais se assemelhar a uma definição, e que parece introduzir o conceito de rema, é a referência que encontramos no livro intitulado “Gramática Especulativa” (1895-1896) (*Speculative Grammar*). Neste livro, Peirce diz que

> Um *Rema* é um Signo que, para seu Interpretante, é um Signo de Possibilidade qualitativa, ou seja, é entendido como representando tal ou tal espécie de objeto possível. Todo Rhema fornecerá, talvez, alguma informação; mas não é interpretado como assim procedendo. (PEIRCE, CP. 2.250, grifo do autor, tradução nossa)

Nesse sentido, um rema é um signo de possibilidade qualitativa, pois expressa a possibilidade de atribuição de uma qualidade ou de um predicado a possíveis objetos que podem receber essa predicação. Ao contrário de um signo que nomeia um objeto, um rema tem propriedade predicativa que pode ser atribuída a muitos objetos; o que o torna, como o próprio autor o diz, uma “signo de possibilidade qualitativa”.

Embora o conceito de predicado seja bem conhecido desde a Antiguidade Grega, com Platão e Aristóteles, ou, se quisermos ir mais longe, seja tão antigo quanto a própria linguagem, uma das novidades de Peirce com a introdução do conceito de rema foi ter destacado que o rema é um signo que expressa a *possibilidade* de atribuição de qualidade ou predicação. Essa expressão de possibilidade será, posteriormente, expresso por Frege, como vermos, por uma variável na função proposicional.

Sobre o conceito de predicado, escreve Peirce no livro “S*inopse parcial de uma proposta de trabalho em lógica*” (1902) (*Partial synopsis of a proposed work in logic*) que “O que permanece de uma proposição após a retirada de seu sujeito é um termo (um rema) chamado seu Predicado.”. (PEIRCE, CP. 2.95, tradução nossa)

O rema é um predicado ou termo predicativo que está na relação com o interpretante. Peirce denomina de “interpretante” o signo criado na mente de alguém. O signo criado na mente de alguém, também chamado de “representamen”, é aquilo que, sob certo aspecto, representa algo para alguém ou em potência representa algo para alguém. O que é representado é o que ele chama por "objeto". Em resumo diz Peirce:

> Um sinal, ou *representamen*, é algo que está á disposição de alguém por alguma coisa em algum aspecto ou capacidade. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente, ou talvez um sinal mais desenvolvido. Esse sinal que ele cria eu chamo *interpretante* do primeiro sinal. O sinal representa algo, seu *objeto*. (PEIRCE, CP. 2.228, grifo do autor, tradução nossa)

Signo, Interpretante e Objeto constituem o que é chamado de "relação triádica" (CP 2.242 e CP 2.274). Não faremos, aqui, uma apresentação da semiótica de Peirce, pois não contempla os propósitos de nossa exposição neste artigo. Entretanto, o que nos parece interessante observar é que, em um sentido mais amplo, conforme explica Barbosa, "Todo signo será remático ou terá um rema ou será sustentado, em última instância, por um rema. Todo signo, com efeito, será interpretado e assim o poderá ser, como um signo de possibilidade.". (BARBOSA, 2007, p. 80)

Exemplifica Barbosa (2007, p. 81) que uma placa de trânsito que indique, de modo convencional, ser proibida a conversão à esquerda, caso seja tirada do contexto em que leva o interpretante a agir seguindo suas indicações, será interpretada como um signo de possibilidade. Assim, em resumo, diz, ainda, Barbosa que "Um mero predicado que não está sendo atribuído a nenhum sujeito será interpretado como um rema, dada sua possibilidade de atribuição.". (BARBOSA, 2007, p. 81)

Podemos observar, então, uma relação muito próxima entre o conceito de rema com o conceito de função proposicional. Observa o editor do *The Collected Papers* que o que Perice chama por "rema" é o que hoje é chamado na Lógica Moderna de "função proposicional": "Hoje o rema, ou reme, é convencionalmente simbolizado como Φx e é chamado de uma função proposicional" (CP. 2.95, Fn 1, p. 53, tradução nossa). Ainda diz: "Uma coleção é um rema ou uma função proposicional. Seus membros sujeitos que fazem uma proposição verdadeira.". (CP. 3.537 Fn, P1, p. 338, tradução nossa)

Nesse sentido, dizem Fabbrichesi e Marietti em "Semiótica e Filosofia em Charles Sanders Peirce" (*Semiotcs and philosophy in Charles Sanders Peirce*) que "Remas são sinais fragmentários que devem ser incorporados a 'sinais completos' (proposições ou argumentos); eles são 'um sinal de essência' (EP 2: 294)[2]". (FABBRICHESI; MARIETTI, 2006, p. 25, tradução nossa)

[2] EP: *The Essencial Peirce*. Vol. 2. Bloomington: Indiana University Press, 1998.

Diz Barbosa (2007, p. 80) que, enquanto um termo predicativo, o rema é um signo da mais ampla extensão. Sua característica é tão ampla que Peirce define mente (*mind*) como um rema. Nesse sentido, escreve o editor do *The Collect Papers* que "A mente é uma função proposicional dos universos mais amplos possíveis, tal que seus valores são os significados de todos os signos, cujos efeitos atuais estão em efetiva interconexão.". (CP. 4.550 Fn 2 p. 432, tradução nossa)

Comenta Johansen (cf. 1966, p. 243) que a noção de rema, remonta, originalmente, ao escrito "Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica" (*Upon Logical Comprehension and Extension*) publicado em 1867. Neste escrito Peirce apresenta dois conceitos que introduzem o conceito de rema, a saber: amplitude (*breadth*) e profundidade (*depth*).

Peirce define amplitude (*breadth*) do seguinte modo: "Pela *amplitude informada* de um termo, quero dizer todas as coisas reais de que é predicável, com verdade lógica no todo em um suposto estado de informações.". (PEIRCE, 1984, p. 425, grifo do autor, tradução nossa). Por exemplo, o termo "no todo" indica que todas as informações que estão disponíveis devem ser consideradas; e as coisas que não fazem parte da amplitude abarcada pelo termo, em sua possibilidade de predicação, não podem ser consideradas, pois não se encontram no campo de possibilidade de sua amplitude. Nesse sentido, se T é um termo que é predicável apenas de S', S'' e S''', então os S' 's, os S'' 's, e os S''' 's, constituirão uma amplitude informada de T. Se, ao mesmo tempo, S' e S'' são os sujeitos dos quais apenas um outro termo T' pode ser predicado, e se não se sabe que todos S''' 's são ou S' ou S'', então T é dito que ter uma maior amplitude informada que T'. (cf. PEIRCE, 1984, p. 425, tradução nossa)

Já a profundidade (*depth*) é assim definida por Peirce: "Pela profundidade informada de um termo, quero dizer todos os reais caracteres (em contradição com meros nomes) que podem ser predicados dele (com verdade lógica, no seu conjunto) em um suposto estado de informação; nenhum caracter sendo contado duas vezes, com conhecimento de causa, no suposto estado de informações.". (PEIRCE, 1984, p. 425-426, tradução nossa). Por exemplo, sabe-se, por observação e análise, que a profundidade informada (*depth*) do termo triângulo são os seguintes predicados: "ter três lados" e "ter como resultado da soma dos seus ângulos formando um ângulo de 180º", pois são informações que são predicadas do termo triângulo, constituindo-se em seus "caracteres reais".

A amplitude informada (*informed depth*) de um termo contribui para a noção de informação em Peirce que não abordaremos aqui, mas que parece abrir um campo de estudo em Teoria do Conhecimento a partir da análise da predicação. Sobre isso, comenta Johansen: "Um modo de definir informação é esta: o conjunto de caracteres que pode ser predicado de um símbolo desprovido de caracteres contidos na sua definição verbal. Outra modo de olhar para este conceito já foi abordado, a saber, informação como um processo de aquisição de conhecimento.". (JOHANSEN, 1993, p. 148, tradução nossa)

É notável, como observa Peirce, que "A profundidade, assim como a amplitude, podem ser certa ou duvidosa, real ou potencial, e há uma compreensão correspondente a nitidez extensiva.". (PEIRCE, 1984, p. 425-426, tradução nossa). Isso quer dizer que certo ocorre quando se conhece toda a profundidade (*depth*) e amplitude (*breadth*) informada de um termo e o duvidoso ocorre quando não se conhece. O real ocorre quando a profundidade (*depth*) e amplitude (*breadth*) informada de um termo é maior do que as de outro termo a partir do conhecimento de toda a amplitude, e o potencial ocorre quando se conhece quase todos os elementos, mas não todos, da profundidade (*depth*) e amplitude (*breadth*) informada de um termo a ponto de afirmarmos, por exemplo, que um termo é, pontencialmente, maior, em amplitude, do que outro termo.

Tendo em vistas essas breves considerações, podemos dizer que a noção de rema, remonta, assim, originalmente, ao escrito "Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica" que data de 1867, portanto anos antes da publicação da *Conceitografia* (1879), onde Frege introduz o conceito de função.

3. Frege e a função proposicional

Em Frege o conceito de função proposicional aparece pela primeira vez em sua obra intitulada "Conceitografia, uma linguagem de fórmulas para o pensamento puro, imitada da linguagem aritmética" (*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*), publicada em 1879.

Como o próprio subtítulo diz, a *Conceitografia* (1879) é uma linguagem de fórmulas semelhante à linguagem da Matemática (Aritmética) para expressar com rigor e clareza o raciocínio lógico. "Ela [a *Conceitografia*] serve assim primordialmente para testar da forma mais segura a validade de uma cadeia de inferência e mostrar qualquer pressuposto que possa ser involuntariamente introduzido, de modo que a sua origem possa ser investigada.”. (FREGE, 2008, p. IV).

O conceito de função proposicional aparece na *Conceitografia* (1879) sob o nome de “função” (*Function*). Nesse sentido, diz Frege: “[...] *nós chamamos a parte que permanece invariante na expressão uma função e a parte substituível de o argumento*. (FREGE, 2013, p. 18, grifo do autor, tradução nossa). O termo “função” tem um sentido próprio na *Conceitografia* (1879) e está inserida nos seus propósitos: expressar as relações lógicas em um simbolismo desprovido de qualquer ambiguidade da linguagem natural com o propósito expressar diretamente o “conteúdo conceitual”.

Na *Conceitografia* (1879) Frege dedica uma seção, intitulada “Funções”, para introduzir e definir o conceito e termo “função”. Nesta seção, ele define, também, argumento (*Argument*), um sinal que completa a função e que tem um significado particular.

Frege nos faz observar que há elementos na proposição que podemos substituir por outros e, também, há elementos que permanecem estáveis. Nesse sentido, em termos gerais, diz ele:

> *Se em uma expressão, cujo conteúdo não necessita tornar-se um julgamento, se um símbolo simples ou composto tem uma ou mais ocorrências e se considerarmos esse sinal como substituível em todos ou em algumas destas ocorrências por outra coisa (mas em todos os lugares pela mesma coisa), então nós chamamos a parte que permanece invariante na expressão uma função e a parte substituível de o argumento*. (FREGE, 2013, p. 18, grifo do autor, tradução nossa)

Ele designa, então, a parte estável ou invariável da proposição de “função” (*Function*) e a parte que não é estável de “argumento” (*Argument*). Função e argumento são formalmente expressos por Frege *na Conceitografia* (1879) do seguinte modo:

> *Para expressar uma certa função do argumento A, deixamos A entre parênteses seguido por um caracter,* tal como, por exemplo: *Φ(A)*. *Também Ψ(A,B) significa uma função de dois argumentos A e B, a qual não é especificada. Aqui representamos o lugar de A e B no parênteses, que A e B assumem na função*, mesmo se esse indivíduo são vários tanto para *A* ou para *B*. *É por isso, em geral, que Ψ(A,B) difere de Ψ(B,A)*. As funções indeterminadas de mais argumentos se expressam de um modo correspondente. (FREGE, 2013, p. 18, grifo do autor, tradução nossa)

Frege conclui a seção da *Conceitografia* (1879), dedicada à função, dizendo que o conceito de função na Análise em Matemática é muito mais limitado do que o que ele desenvolve na referida obra. Essas linhas finais da seção parecem expressar a necessidade de se explicitar mais precisamente o que ele entende por função em Matemática e qual é a novidade do conceito de função proposto por ele, o que parece prenunciar o seu artigo intitulado "Função e Conceito" (*Funktion und Begriff*), publicado posteriormente, em 1881.

No seu artigo *Função e Conceito* (1881) Frege expõe algumas das ideias fundamentais de sua *Conceitografia* (1879), rediscute a noção de função (*Funktion*) em Matemática e procura elucidar, conceitualmente, alguns de seus pontos essenciais. Nesse sentido, ele elabora uma nova concepção de função, já introduzida, mas não detalhada, na *Conceitografia* (1879), contrapondo-se, segundo ele, ao que comumente se entendia, na História da Matemática, por função.

Genericamente, a função é expressa por Frege utilizando-se a letra f ou F, ficando assim indicada "$f(x)$" ou "$F(x)$", cujos parênteses "( )" indicam que o "lugar" está vazio e o sinal x ocupa esse "espaço" insaturado no papel, sendo este o sinal que indica algo que venha a ocupar este lugar. O sinal f ou F expressa qualquer função indefinidamente, pois "Assim como por uma letra se indica um número indefinidamente quando se visa a expressar a generalidade, também se necessita de letras para indicar uma função indefinidamente.". (FREGE, 2009, p. 90)

Frege designa por argumento o que completa a função. Argumento é, então, o que ocupa o espaço insaturado da função, espaço indicado ou expresso por x. Quando completamos a função com o argumento temos o valor da função para este argumento. Diz ele que "Aquilo que resulta quando se completa a função por seu argumento denominamos 'o valor da função (*den Wert der Funktion*) para este argumento'.". (FREGE, 2009, p. 87, grifo nosso)

Entretanto, se ao invés de falarmos de funções com sinais de + ou –, tal como, por exemplo, a função $x^2 - 4x$, do exemplo, acima, tratarmos de funções com sinais de =, <, >, tais que estes sinais formem funções do tipo $x^2 - 4x = 0$ e $2 > 1$, obteremos, então, outra função, distinta das funções que vínhamos mencionando até agora. Pois, enquanto nas funções $2. x^2 + x$ e $x^2 - 4x$, por exemplo, os seus valores são números, nas funções $x^2 = 1$ e $2 > 1$ os seus valores são um *valor de verdade* (*Wahrheitswert*).

Por exemplo, seja o conjunto dos números naturais não-nulos como conjunto universo das operações para a função $x^2 = 1$, e se substituirmos x pelo número 1 ou -1, considerando o conjunto dos números inteiros, essa função assume o valor "verdadeiro" (*Wahre*); porém, se x for substituído pelos demais números desse conjunto, a função assume o valor "falso" (*Falschen*).

Nesse sentido, se já temos o valor de uma função, tal como na função $x^2 = 1$, por exemplo, então a forma linguística das equações é uma expressão que diz: "o quadrado de x é igual a 1". Notemos que se trata, neste caso, de uma expressão incompleta com uma variável devido à propriedade insaturada representada pela letra x; e também, trata-se de uma sentença que, ao substituirmos x por um argumento qualquer, resulta em uma sentença ajuizável, isto é, da qual se pode julgar ser verdadeira ou falsa. Podemos notar uma estreita relação entre conceito e função.

O conceito é o que há de comum entre os vários objetos do mesmo tipo. Para isso atribuímos um sinal para designar esse algo de comum. Por exemplo, "cadeira" é um conceito, pois designa todas as cadeiras e "esta cadeira" é o objeto particular, pois faz referência ao que é específico. Diz Frege em *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia* (1882) que "Atribuindo o mesmo sinal a coisas semelhantes, designamos propriamente não mais a coisa singular mas o que lhes é comum, o conceito.". (FREGE, 1980, p. 191-192)

Suponhamos, então, por exemplo, a proposição "Esta cadeira é uma cadeira". Podemos, conforme vimos, expressar esta proposição por "x é uma cadeira", o que poderia ser expresso por "x é C", que em outros termos é simbolizado por $C(x)$. O conceito "cadeira", e os predicados que ocorrem nas proposições, pode ser visto, também, como uma função, pois é insaturado, cuja insaturação é expressa pela variável "x". Sobre isso, escreve Frege:

> Vemos, assim quão estreitamente ligado está o que se chama por conceito em Lógica com o que chamamos de função. Com efeito, pode-se dizer imediatamente: um conceito é uma função cujo valor é sempre um valor de verdade. (FREGE, 2009, p. 94)

Assim, do mesmo modo que a função "$x^2 = 1$" é uma forma insaturada e gera um valor de verdade a partir de um número que a completa, a expressão "Este x é uma cadeira" também é uma forma insaturada e assume um valor de verdade ao substituirmos x por um argumento determinado.

No caso da função "$x^2 = 1$", se substituirmos x pelo número 1, por exemplo, o valor da função é o Verdadeiro, e pode-se dizer que 1 cai sob o conceito de ser raiz quadrada de 1. Do mesmo modo, se substituirmos x na expressão "Este x é uma cadeira" pelo nome “cadeira”, o valor da função é o Verdadeiro e pode-se dizer que “a cadeira” cai sob o conceito de cadeira.

A função é, então, utilizado por Frege para analisar a forma da predicação nas proposições, tal que o conceito em lógica é um tipo de função cujo valor é sempre um valor de verdade, seja ele verdadeiro ou falso.

Mas, se o conceito de função proposicional surge com Peirce e Frege, o termo “função proposicional” aparece pela primeira vez nos trabalhos de Bertrand Russell.

4. Russell e a função proposicional

A primeira ocorrência do termo “função proposicional” surgirá em 1903, com a publicação de *Os Princípios da Matemática* (1903) de Russell (1872-1970).

É na seção intitulada “Lógica Simbólica” de *Os Princípios da Matemática* (1903) que Russell introduz, pela primeira, o termo “função proposicional”. Ele diz extrair seu conceito de função proposicional da distinção entre os conceitos de variável real e variável aparente realizada por Giuseppe Peano (1858 – 1932). (cf. RUSSELL, 1903, § 13)

Nesta seção, explica Russell (cf.1903, p. 11-12) que a Lógica Simbólica divide-se em três partes: o Cálculo das Proposições, o Cálculo das Classes e o Cálculo das Relações. O Cálculo das Proposições, em especial, envolve, como o próprio nome expressa, a noção básica de proposição. Sobre o conceito de proposição diz ele: “Uma proposição, podemos dizer, é tudo o que é verdadeiro ou o que é falso.”. (RUSSELL, 1903, § 13, p. 12-13, tradução nossa). Por exemplo, a sentença “Sócrates é homem” é uma proposição, pois podemos dizer se ela é verdadeira ou falsa.

Mas, expressões como, por exemplo, “*x* é um homem”, não são proposições, pois não podemos dizer se é verdadeira ou falsa. Podemos dizer apenas que ela se tornará uma proposição quando for dado a *x* um valor determinado, pois com a determinação de *x*, podemos afirmar quem ou o que é um homem e, por conseguinte, julgar se nossa afirmação é verdadeira ou falsa.

Embora a expressão “*x* é um homem” não seja uma proposição, ela tem uma importância fundamental para a Lógica, pois, como diz Russell, essa expressão é uma “forma esquemática permanente” para qualquer classe de proposição. Sobre isso, escreve: “Se nós dermos a *x* algum valor constante, qualquer que seja ele, a expressão torna-se uma proposição: é assim como se fosse uma forma esquemática permanente para qualquer uma das classes inteiras de proposições.". (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, tradução nossa)

A função proposicional é uma forma esquemática, pois conforme é dado à variável *x*, que nela ocorre, um valor determinado, podemos gerar, em correspondência, determinadas proposições que pertencem a um tipo ou a uma classe de proposições conforme o tipo de forma esquemática da função proposicional dada. E ela é permanente, pois sua forma esquemática se mantém invariável diante da possibilidade de substituições, representada pela variável, e diante da possibilidade de determinações de proposições correspondentes à substituição na variável.

No entanto, nem sempre a ocorrência do termo *x* indica uma forma esquemática como indicada acima. Há casos em que a ocorrência do termo *x* na expressão determina uma proposição. Por exemplo, seja "*x* é um homem implica *x* é mortal para todo valor de *x*"; esta sentença é verdadeira, pois seria uma sentença falsa se disséssemos que "*x* é um homem implica *x* é mortal para algum valor de *x*". Desse modo, podemos dizer que tal sentença é uma proposição e que a letra "*x*" que ocorre nesta proposição não tem o mesmo significado que a letra "*x*" que ocorre, por exemplo, na expressão "*x* é um homem".

A letra "*x*" que ocorre na proposição "*x* é um homem implica *x* é mortal para todo valor de *x*" não expressa uma variável no sentido próprio do termo, mas se constitui apenas como uma variável aparente na proposição, pois tal sentença já é uma proposição, uma proposição verdadeira, não dependendo do valor de *x* para se tornar uma proposição. Já a letra "*x*" que ocorre na expressão "*x* é um homem" é uma variável real, pois há diferentes proposições para diferentes valores da variável, isto é, as diferentes proposições geradas dependem dos valores atribuídos a *x* na expressão considerada.

É nesse contexto de distinção entre variável aparente e variável real, para definir o que é ou não uma proposição, que Russell introduz, pela primeira vez, o termo "função proposicional" (*propositional function*). Diz ele:

> Vou falar de proposições exclusivamente onde não existem variáveis reais: onde existem uma ou mais variáveis reais, e para todos os valores das variáveis a expressão envolvida é uma proposição, vou chamar a expressão uma *função proposicional*. (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, grifo do autor, tradução nossa)

Para termos uma noção mais clara do que seja função proposicional, encontramos no livro introdutório e de divulgação de Russell, intitulado “Introdução à Filosofia da Matemática” (1919) (*Introduction to Mathematical Philosophy*) o seguinte: “Uma ‘função proposicional’ é, na verdade, uma expressão contendo um ou mais componentes indeterminados, tais que, quando são atribuídos constituintes, a expressão se torna uma proposição. Em outras palavras, ela é uma função cujos valores são proposições.”. (RUSSELL, 1963, p.155-156, tradução nossa)

Já em uma das obras centrais de Russell, o *Principia Mathematica* (1910), o conceito de função proposicional aparece, em termos formais, logo no início da obra, como um dos conceitos elementares da obra:

> Seja ϕx uma sentença contendo uma variável x tal que ela se torna uma proposição quando a x é dado algum significado determinado fixo. Então, ϕx é chamada de “função proposicional”; ela não é uma proposição, já que, devido à ambiguidade de x, não faz realmente uma afirmação como um todo. (RUSSELL; WHITEHEAD, 1968, p. 14, tradução nossa)

A função proposicional é vista por Russell como um importante instrumento de análise lógico-matemática. Russell compara a função proposicional com uma forma esquemática permanente para qualquer classe de proposições. O conceito de função proposicional proposto por Russell advém da distinção entre variável aparente e variável real; distinção contida, respectivamente, em proposições categóricas e proposições condicionais.

5. Peirce, Frege e Russell: notas historiográficas

É notável que Peirce e Frege tenham, cada um a sua maneira e dentro dos propósitos de seus pensamentos, introduzido pela primeira vez o conceito de função proposicional de modo independente um do outro.

Benjamin Hawkins, em seu artigo “Peirce e Russell: a história de uma ‘controvérsia’ negligenciada” (*Peirce and Russell: the history of a neglected 'controversy'*) traz um estudo sobre algo que é, segundo ele, pouco estudado, isto é, algo negligenciado na História da Lógica: as relações de controvérsia entre os trabalhos de Peirce e Russell no começo do século XX no campo da Lógica Matemática.

Neste artigo há duas seções que nos interessam particularmente: a primeira intitulada "A obra de Peirce, Russell e Frege" (*Peirce, Russell, and Frege's Work*), "A consciência de Peirce da obra de Frege" (*Peirce's Awareness of Frege's Work*) e "Conhecimento de Peirce e Russell da obra um do outro" (*Peirce's and Russell's Cognizance of Each Other's Work*). Nestas seções Hawkins traz comentários historiográficos sobre especulações em torno do conhecimento por parte de Peirce sobre os trabalhos de Frege, já que é certo que Frege não conhecia os trabalhos de Peirce.

Segundo Hawkins, Peirce parece não ter conhecido os trabalhos de Frege. Sobre isso, escreve: "Os escritos de Peirce não contêm menção a Frege – e o meticuloso Peirce foi geralmente atento às suas referências. Peirce, por exemplo, parece inteiramente inconsciente da quantificação no *Begriffsschrift* quando (em *1885*) introduz sua separação notacional das funções de quantificação e indexação.". (HAWKINS, 1997, p. 136, tradução nossa)

Hawkins diz haver especulações sobre o conhecimento de Peirce sobre os trabalhos de Frege. Diz Hawkins que "Há, por exemplo, uma cópia da *Conceitografia* [Bg] (*1879*) na biblioteca em Johns Hopkins University. Não há anotações por Peirce neste volume, mas sua data de aquisição é 5 Abril de 1881, uma data que abrange a permanência efêmera de Peirce na Universidade Johns Hopkins (1879-1884) como instrutor de lógica.". (HAWKINS, 1997, p. 134, tradução nossa)

Outra especulação é sobre uma cópia da *Conceitografia* (1879) na Sala de Livros raros da Universidade de Princenton. Sabe-se que este livro era de A. Marquand, um dos colaboradores dos *Estudos em Lógica* (1883) (*Studies in Logic*), cujos colaboradores eram seus alunos e cujo editor foi Peirce. E aqui Hawkins cita as seguintes palavras de Peirce: "'Esses artigos, os trabalhos de meus estudantes, têm sido tão instrutivos para mim …' (Peirce ed. 1883: iii).". (Peirce *apud* HAWKINS, 1997, p. 134, tradução nossa)

Há, também, na bibliografia de Ladd-Franklin, também colaboradora dos *Estudos em Lógica* (1883) (Ladd-Franklin, 1883: 70 – 77), um texto de Schröder em que este faz citações da *Conceitografia* (1879) e faz uma revisão sobre ela. Há, também, uma cópia do texto de Schröder na biblioteca de Peirce que agora se encontra na Biblioteca Widener em Harvard. Segundo Hawkins essa coleção pode ter sido compilada após sua aquisição pela Universidade de Harvard, com o texto de Schröder numerado não por Peirce, mas pode ter sido marcada por Peirce em lápis verde o título "Lógica Formal" do texto de Schröder. Mas, no entender de Hawkins "Nada disso, claro, prova que Peirce leu o Bg [*Begriffschrift*] ou mesmo os comentários de Schröder sobre ela.". (HAWKINS, 1997, p. 134, tradução nossa)

Por fim, há uma passagem no *Collected Papers*, em que Peirce, comumente fiel as suas referências, menciona os principais pensadores a partir dos quais seu trabalho possa receber um nível de superação e novidade. Nesta referência aparece o nome de Russell, mas não o de Frege. Escreve Peirce: "Minha análise do raciocínio supera em rigor tudo o que já foi publicado, quer em palavras ou em símbolos - tudo o que De Morgan, Dedekind, Schröder, Peano, Russell, e outros que já fizeram – a um grau tal que lembra a diferença entre um rascunho de lápis de uma cena e uma fotografia do mesmo.". (PEIRCE, CP 5.147, tradução nossa)

Tal referência indica, ao menos, que Peirce conhecia os trabalhos de Russell, interlocutor direto de Frege, cujas referências a Frege aparece no *Principia Mathematica* (1910). Segundo Hawkins, a importância marginal de Russell em sua obra, parece indicar que o interesse e leitura de Peirce sobre o Principia tenha se limitado às entradas do índice da obra. "Peirce anotou, na cópia existente do PM [*Principia Mathematica*], com suas notas marginais nunca sendo tão distantes das referências de Russell a Peirce, parece indicar que a 'leitura' de Peirce foi limitada às entradas do índice dos nomes.". (HAWKINS, 1997, p. 134, tradução nossa)

Desse modo, a presença de Russell não é tão significativa na obra de Peirce como a presença e influência de outros pensadores. Escreve Hawkins que "A presença de 'Russell' aqui é tão significativa quanto a ausência de 'Frege', pois isso foi em 1903, quando *Os Princípios da Matemática* de Russell e o Volume II de *A Leis Fundamentais da Aritmética* foram publicados ou estavam 'em impressão'.". (HAWKINS, 1997, p. 136, tradução nossa). Já da parte de Russell, notamos que este menciona Peirce em *Os Princípios da Matemática* (1903), mas somente para atribuir-lhe o mérito da criação do Cálculo da Lógica das Relações. (cf. RUSSELL, 1903, p. 23)

Assim, da parte de Peirce, sabe-se que ele conheceu os trabalhos de Russell, fazendo menção a este, mas não passam de especulações sobre seu conhecimento dos trabalhos de Frege, em especial sobre a *Conceitografia* (1879), onde Frege introduz, pela primeira vez, como sabemos, o conceito de função proposicional com o termo "função". Sobre o conhecimento de Frege em relação aos trabalhos de Peirce, não há registros que ele os conheceu, principalmente devido ao seu isolamento em Jena.

Já em relação à Russell, Frege parece tomar, pela primeira vez, conhecimento de Russell quando recebe deste uma carta em Julho de 1902 com apontamentos de Russell sobre um possível paradoxo em seu sistema lógico. Já Russell introduz o conceito de função proposicional, expresso pelo termo "função proposicional", antes mesmo de conhecer os trabalhos de Frege, a partir dos trabalhos de Peano, pois o conceito já estava latente em sua notação. Russell, quanto toma conhecimento dos trabalhos de Frege, faz menção explícita a este em sua obra, antes de publicar a sua própria obra em 1903, reconhecendo o mérito de antecipá-lo.

Sobre o conhecimento de Russell em relação aos trabalhos de Peirce, há uma única referência, em *Os Princípios da Matemática* (1903) (cf. Seção 2.1 de nosso trabalho), na qual Russell atribui o mérito a Peirce de ter sido o primeiro a introduzir a Lógica das Relações. Desse modo, se entendermos que Russell é fiel as suas referências, assim como foi fiel ao se referir a Frege, atribuindo-lhe o mérito de antecipá-lo, então podemos dizer que Russell não tomou conhecimento do escrito de Peirce *Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica* (1867) ou qualquer outro de seus trabalhos em que contém o conceito de rema.

E quanto ao conhecimento de Russell sobre os trabalhos de Frege, aquele somente toma conhecimento dos trabalhos dos trabalhos deste no contexto de publicação, e não de produção, de *Os Princípios da Matemática* (1903). Quando toma conhecimento do conceito de função de Frege, Russell já se encontrava em vias de publicação de *Os Princípios da Matemática* em 1903. Dando o devido mérito a Frege por tê-lo antecipado, Russell dedica, então, um apêndice de sua obra para fazer menção a Frege e observa a semelhança que há entre o que ele chama por "função proposicional" com o que Frege chama por "função" (*Begriff*): "A palavra *Begriff* é usada por Frege para significar quase a mesma coisa que a função proposicional (e.g. FuB. p. 28); quando há duas variáveis o *Begriff* é uma relação.". (RUSSELL, 1903, § 481, p. 507, grifo do autor, tradução nossa)

6. Considerações finais

Podemos dizer, assim, que o conceito de função proposicional foi introduzido, de modo independente, por Peirce, Frege e Russell, podendo Peirce receber mérito de antecipá-los do ponto de vista cronológico.

Embora Peirce tenha introduzido o conceito de função proposicional em 1867, o modelo de função proposicional de Frege – podendo Russell se colocar nessa tradição –, tornou-se o modelo padrão de expressão da forma lógica da predicação.

Sobre essa prevalência do modelo fregeano, escreve Ignacio Angelelli, em *Teoria da Predicação: Clássico vs Moderno*, que “A teoria da predicação fregeana se tornou padrão, tida como certa tanto nos desenvolvimentos posteriores da lógica quanto na corrente principal da filosofia.”. (ANGELELLI, 2004, p. 55, tradução nossa)

Esse modelo aparece, por exemplo, nos trabalhos de David Hilbert (1863 – 1943), um dos principais matemáticos e lógicos do século XX. Na obra “Princípios da Lógica Matemática”, que Hilbert escreve em colaboração com Wilhelm Ackermann (1896 – 1962), na seção intitulada “Bases metodológicas para o Cálculo de Predicados”, dizem os autores que no Cálculo de Predicados “[...] o seguinte método parece natural: separar na interpretação de uma sentença os *objetos* (*individuais*) das *propriedades* (*predicados*) atribuídas a eles e simbolizar ambos explicitamente.”. (HILBERT; ACKERMANN, 1950, p. 57, grifo do autor, tradução nossa)

O predicado é no sentido mais geral, pois inclui também relações. Em seguida, ainda escrevem: “Isto é feito através de emprego de *símbolos funcionais com lugares do argumento* (símbolos funcionais *n*-ádicos onde *n* é o número de lugares do argumento) para a interpretação simbólica de predicados, no qual os símbolos que representam os objetos são para substituídos nos lugares do argumento.”. (HILBERT; ACKERMANN, 1950, p. 57, grifo do autor, tradução nossa)

Segundo Loomis (2005, p. 3) a concepção de função proposicional de Hilbert e Ackermann é também adotada por Kurt Gödel (1906 – 1978), Rudolf Carnap (1891 – 1970), Alfred Tarski (1901 – 1983), entre outros.

Gödel, em especial, em sua tese de doutorado intitulada “A Completude dos Axiomas do Cálculo Funcional da Lógica” (1930) (*The Completeness of the Axioms of the Functional Calculus of Logic*), onde ele prova a completude do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem, diz que “Os símbolos e terminologia deste trabalho seguem *Hilbert e Ackermann* 1928.”. (GÖDEL, 1967, p. 583, nota 3, grifo do autor, tradução nossa). Ainda escreve Gödel: “De acordo com esse trabalho, o cálculo funcional restrito contém as expressões lógicas que são construídas a partir de variáveis proposicionais, *X*, *Y*, *Z*,... e variáveis funcionais (isto é, variáveis para propriedades e relações) do tipo 1, *F*(*x*), G(*x*,*y*), *H*(*x*, *y*, *z*), [...]”. (GÖDEL, 1967, p. 583, nota 3, grifo do autor, tradução nossa)

O modelo fregeano de função proposicional é hoje adotado para ensinar lógica e amplamente divulgado nos livros didáticos de cálculo de primeira ordem. Talvez um dos motivos da predominância do seu modelo advenha do fato de Frege ter sido o primeiro a associar, de modo explícito, o conceito de função em Matemática com a noção de conceito em Lógica, propondo, com isso, um novo paradigma de esquema de análise da predicação, tal que conceito é um tipo de função cujo valor é sempre um valor de verdade.

Referências

ANGELELLI, I. Predication theory: classical vs modern. In: HOCHBERG, H.; MULLIGAN, K. (Orgs.). *Relations and Predicates*. Frankfurt: Ontos Verlag, 2004.
ANGIONI, L. *Introdução à teoria da predicação em Aristóteles*. Campinas: Editora da Unicamp, 2006.
ARISTÓTELES. *Órganon*. Trad. Eson Bini. Bauru: EDIPRO, 2005.
______. *Tratados de lógica (Órganon)*. Trad. Miguel Candel Sanmartín. Madrid: Editorial Gredos, 1982.
BARBOSA, L. F. *Curso de semiótica geral*. São Paulo: Quartier Latin do Brasil, 2007.
BLANCHÉ, R.; DUBUCS, J. *História da lógica*. Trad. Antonio Pinto Ribeiro e Pedro Elói Duarte. Lisboa: 1996.
BOCHEŃSKI, I.M. *História de la logica formal*. Madrid: Editorial Gredos, 1966.
______. M. *A history of formal logic*. Trad. Ivo Thomas. University of Notre Dame Press, 1961.
______. M. *Ancient formal logic*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1951.
FERREIRA, R R. *Sobre o significado da função proposicional no Tractatus de Wittgenstein*. 2016. 288 p. Tese (Tese em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade de Campinas, 2016.
FREGE, F. L. G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. L. Nebert, Halle A/S., 1879. In: Ignacio Angelelli (Org). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Hildesheim, Zürich, New York: 1993.
______. Begriffsschrift: a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. In: HEIJENOORT, Jean van. *From Frege to Gödel*: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.
______. *Conceptografía*. Trad. Hugo Padilla. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Investigaciones Filosóficas, 1972. Disponível em: www.accionfilosofica.com/misc/1176099341crs.pdf. Acesso em 10 de Dezembro de 2013.
______. *Idéographie*. Trad. Corine Besson. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1999.
______. Prefácio ao Begriffsschrift. Trad. Fernando Raul Neto. In: RAUL NETO, Fernando. *Prefácio ao Begriffsschrift (1879) de Gottlob Frege (1848-1945)*: tradução e introdução ao texto. Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), vol. 8, nº 16, p. 123-141, 2008.
______. *Funktion und begriff*. Jena: Verlag von Hermann Pohle, 1891. Disponível em: https://archive.org/details/functionundbegr00freggoog. Acesso em 18 de Dezembro de 2013.
______. Função e conceito. Trad. Paulo Alcoforado. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Lógica e filosofia da linguagem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

______. *Sobre a justificação científica de uma conceitografia*. Trad. Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1980.
GÖDEL, K. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. In: HEIJENOORT, Jean van. *From Frege to Gödel*: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.
HAWKINS, B. S. Peirce and Russell: the history of a neglected "controversy". In: *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce*. (Org. HOUSER, N.; ROBERTS, D. D.; EVRA, J. V). Bloomington e Indianapolis: Indiana University Press, 1997.
HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of mathematical logic*. Trad. Lewis Hammond, George Leckie e F. Steinhardt. New York: Chelsea Publishing Company, 1950.
JOHANSEN, J. D. *Dialogic semiosis*: and essay on signs and meaning. Bloomington & Indianapolis: Indiana University Press, 1993.
______. Prolegomena to a semiotic theory of text interpretation. In: *Semiótica*, 57(3/4): p. 225-288, 1985.
LOOMIS, E. J. Logical Form and propositional function in the *Tractatus*. In: *Theoria.* Volume 71, Issue 3, 215–240, September 2005.
MCGINN, C. *Logical properties*: identity, existence, predication, necessitiy, truth. Oxford: Clarendon Press, 2000.
RUSSELL, B. *Introduction to mathematical philosophy*. London: George Allen an Unwin Ltd, 1963.
______. *Introdução à filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1966.
______. Letter to Frege. In: HEIJENOORT, J. van. *From Frege to Gödel*: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.
______. *The principles of mathematics*. Cambridge: University Press, 1903.
PEANO, G. *Logica matematica*: interlingua ed algebra della gramatica. In: *Opere scelte*. Roma: Edizioni Cremonese, 1958.
PEIRCE, C. S. *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vol. I-VI ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss; Vol. VII-VIII ed. Arthur W. Burks. Cambridge: MA, Harvard University, 1974.
______. On a new list of categories. In: *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vol. I-VI ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss; Vol. VII-VIII ed. Arthur W. Burks. Cambridge: Harvard University, 1974.
______. *Speculative grammar*. In: *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vol. I-VI ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss; Vol. VII-VIII ed. Arthur W. Burks. Cambridge: Harvard University, 1974.
______. Upon logical comprehension and extension. In: *Writings of Charles S. Peirce*: A Chronological Edition, Volume 2: 1867-1871. Indiana: Indiana University Press, 1984.
WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. *Principia mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 1910.