

A LÓGICA DOS OPERADORES DE CONSEQUÊNCIA ACRESCIDA DO AXIOMA MODAL 5

THE LOGIC OF CONSEQUENCE OPERATORS ADDED BY MODAL AXIOM 5

*Hércules de Araújo Feitosa¹
Angela Pereira Rodrigues Moreira²*

Resumo: Damos a definição de espaço quase topológico e apresentamos alguns exemplos e propriedades. Em seguida, apresentamos as álgebras TK e a lógica TK que foram motivadas pelos espaços de Tarski. Apresentamos uma demonstração da adequação da lógica TK relativa aos espaços quase topológicos. De modo original, discutimos o bem conhecido axioma modal chamado (5) e mostramos sua formalização na lógica TK e seus respectivos modelos, dados por espaços quase topológicos em que cada conjunto fechado é também aberto.

Palavras-chave: Lógica TK. Álgebras TK. Espaço quase topológico. Axioma modal (5).

Abstract: We give the definition of almost topological space and present some examples and properties. After we present the TK-algebras and the logic TK motivated by the Tarski spaces. We present a proof of adequacy between the logic TK and the models originated by almost topological spaces. In an original step, we discuss the well-known modal axiom named (5) in the context of logic TK. We analyze its models in which each almost topological space has the property that every closed set is also open.

Keywords: TK-logic. TK-algebras. Almost topological space. Modal axiom (5).

Introdução

O conceito de espaço quase topológico é uma variação do conceito de espaço topológico, de maneira que todo topológico é quase topológico (FEITOSA; NASCIMENTO, 2015).

Eliminamos algumas das condições da definição de espaço topológico e verificamos que, enquanto o conceito usual está vinculado com aspectos espaciais dos espaços \mathbb{R}^n , inicialmente envolvidos com os intervalos abertos de \mathbb{R} , o conceito de espaço quase topológico tem como motivação o conceito de derivabilidade ou de dedução.

O conceito de derivabilidade originou uma versão abstrata de sistema dedutivo ou lógica abstrata, que nomeamos de espaço de Tarski, devido aos trabalhos do precur-

¹Docente do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista, campus de Bauru - FC/UNESP. E-mail: haf@fc.unesp.br

²Doutora em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Mestre em Filosofia pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UNESP/Marília em 2012. E-mail: angela.p.rodrigues@bol.com.br

sor desta vertente, Alfred Tarski.

A partir da definição de espaço de Tarski, Nascimento e Feitosa (2005) definiram as álgebras de Tarski. A seguir, Feitosa, Grácio e Nascimento (2010) formalizaram as condições de um espaço de Tarski em ambiente lógico proposicional e introduziram a lógica **TK**. Neste artigo, foi mostrado, com recursos algébricos, a adequação (correção e completude) de **TK** segundo as **TK**-álgebras.

Nessas notas, apresentamos uma demonstração da adequação da lógica **TK** relativa a modelos de **TK** tomados como espaços quase topológicos quaisquer.

Como um passo original, discutimos a relação da lógica **TK** na hierarquia de lógicas modais e tratamos de outro axioma modal, conhecido na literatura como (5) com a seguinte configuração: $\diamond\varphi \rightarrow \Box\diamond\varphi$, e o entendimento de que “se algo é possível, então é necessariamente possível”.

Para modelarmos a lógica **TK** acrescida do axioma (5) temos como modelos exatamente os espaços quase topológicos em que cada conjunto fechado é também aberto. Por fim, relacionamos estes espaços com os espaços topológicos.

1. Espaços quase topológicos

Espaços quase topológicos são generalizações das estruturas topológicas obtidas pela eliminação de algumas propriedades.

Definição 1.1: Um *espaço quase topológico* é um par (E, Ω) em que E é um conjunto, $\Omega \subseteq \mathcal{P}(E)$ e dada uma coleção qualquer de índices I :

(i) se para cada $i \in I$, $A_i \in \Omega$, então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Omega$.

Definição 1.2: A coleção Ω é denominada *quase topologia* e cada membro de Ω é um *aberto* de (E, Ω) . Um conjunto $A \in \Omega$ é um *fechado* quando o seu complemento relativo a E , denotado por A^c , é um aberto de (E, Ω) .

Segue destas definições que uma união qualquer de abertos de (E, Ω) é um aberto de (E, Ω) .

Proposição 1.3: Se (E, Ω) é espaço quase topológico, então o conjunto \emptyset é aberto e E é um fechado no espaço (E, Ω) .

Proposição 1.4: Se (E, Ω) é espaço quase topológico, então toda intersecção de fechados de (E, Ω) é um conjunto fechado em (E, Ω) .

Definição 1.5: Se (E, Ω) é um espaço quase topológico, então o *fecho* de A é o conjunto:

$$\bar{A} = \bigcap \{X \subseteq E : A \subseteq X \text{ e } X^C \in \Omega\}.$$

O *interior* de A é o conjunto:

$$\dot{A} = \bigcup \{X \subseteq E : X \subseteq A \text{ e } X \in \Omega\}.$$

Proposição 1.6: Se (E, Ω) é um espaço quase topológico e $A \subseteq E$, então \bar{A} é fechado e \dot{A} é aberto.

Naturalmente, poderíamos definir espaço quase topológico a partir dos fechados, como no contexto topológico.

Proposição 1.7: Seja (E, Ω) um espaço quase topológico. Para todos $A, B \subseteq E$, valem:

$$(i) \dot{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$$

$$(ii) \dot{\dot{A}} = \dot{A}$$

$$(iii) \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

$$(iv) A \subseteq B \Rightarrow \dot{A} \subseteq \dot{B}$$

$$(v) A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}.$$

Agora, veremos como envolver os conceitos de espaço quase topológico e o conceito de sistema dedutivo de Tarski ou espaço de Tarski.

Definição 1.8: Um *operador de consequência* sobre E é uma função $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ tal que, para todos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, valem:

$$(i) A \subseteq \bar{A}$$

$$(ii) A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$$

$$(iii) \overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}.$$

De (i) e (iii), para cada $A \subseteq E$, vale a igualdade $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Definição 1.9: Um *espaço de Tarski* (*sistema dedutivo de Tarski* ou *espaço de fecho*) é um par $(E, \overline{})$ tal que E é um conjunto e $\overline{}$ é um operador de consequência sobre E .

Definição 1.10: Seja $(E, \overline{})$ um espaço de Tarski. O conjunto A é *fechado* em $(E, \overline{})$ se $\overline{A} = A$, e A é *aberto* quando o seu complemento relativo a E , denotado por A^c , é fechado em $(E, \overline{})$.

Proposição 1.11: Se $(E, \overline{})$ é um espaço de Tarski, então toda intersecção de conjuntos fechados de $(E, \overline{})$ é ainda um conjunto fechado de $(E, \overline{})$.

Segue das definições acima, que \emptyset e E correspondem ao menor e ao maior conjuntos fechados, respectivamente, associado ao operador $\overline{}$.

Proposição 1.12: Se (E, Ω) é um espaço quase topológico e $\overline{}$ é a operação de fecho em (E, Ω) , então o par $(E, \overline{})$ é um espaço de Tarski

Por outro lado, se $(E, \overline{})$ é um espaço de Tarski, consideremos que Ψ é o conjunto de todos os fechados de $(E, \overline{})$.

Proposição 1.13: Se $(E, \overline{})$ é um espaço de Tarski, então (E, Ω) é um espaço quase topológico em que $X \in \Omega \Leftrightarrow X^c \in \Psi$.

Segue das duas proposições anteriores que, para cada espaço de Tarski podemos definir, de modo natural, um espaço quase topológico e, para cada espaço quase topológico, podemos caracterizar um espaço de Tarski.

Definição 1.14: Um espaço quase topológico (E, Ω) é *0-fechado* quando:

$$(iv) \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Definição 1.15: Um *espaço topológico* (E, Ω) é um espaço quase topológico 0-fechado tal que:

$$(v) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Definição 1.16: Um espaço de Tarski $(E, \overline{})$ é *vácuo* quando $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Deste modo, os espaços topológicos são exemplos de espaços quase topológicos 0-fechados em que o fecho da união é a união dos fechos.

Como o conceito de consequência interessa à Lógica e naquele contexto são relevantes os conjuntos das consequências de conjuntos dados, os quais não devem, em geral, serem vazios, do ponto de vista lógico interessam essencialmente os espaços de Tarski não vácuos.

2. As álgebras TK e a lógica TK

Nesta seção apresentamos as TK-álgebras e a lógica proposicional TK. Detalhes sobre os dois sistemas podem ser encontrados em (FEITOSA; GRÁCIO, NASCIMENTO, 2010). A definição de TK-álgebra introduz as noções de operador de consequência no ambiente algébrico e a lógica TK dá a formalização no contexto lógico.

Definição 2.1: *TK-álgebra* é uma sêxtupla $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$ em que $(A, 0, 1, \vee, \sim)$ é uma álgebra de Boole e \bullet é um novo operador, chamado de *operador de Tarski*, para o qual valem:

$$(i) a \vee \bullet a = \bullet a$$

$$(ii) \bullet a \vee \bullet (a \vee b) = \bullet (a \vee b)$$

$$(iii) \bullet(\bullet a) = \bullet a.$$

Exemplo 2.2: Se consideremos o espaço Booleano de conjuntos $\mathcal{P}(A)$, com $A \neq \emptyset$ e a operação \bullet definida, para todo $a \in A$, por $\bullet a = a$, então temos uma TK-álgebra.

Exemplo 2.3: O espaço de conjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ com $\bullet X = X \cup \{0\}$ é uma TK-álgebra.

Exemplo 2.4: O espaço de conjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ com $\bullet X = \cap \{I : I \text{ é um intervalo e } X \subseteq I\}$ é uma TK-álgebra.

Como as TK-álgebras estão no contexto das álgebras de Boole, o item (i) da Definição 2.1 afirma que, para cada $a \in A$, $a \leq \bullet a$.

Em uma TK-álgebra qualquer, podemos definir os seguintes operadores Booleanos:

$$a \rightarrow b =_{\text{def}} \sim a \vee b;$$

$$a - b =_{\text{def}} a \wedge \sim b.$$

Proposição 2.5: Para toda TK-álgebra \mathcal{A} valem as seguintes condições:

- (i) $\sim \bullet a \leq \sim a \leq \bullet \sim a$
- (ii) $a \leq b \Rightarrow \bullet a \leq \bullet b$
- (iii) $\bullet (a \wedge b) \leq \bullet a \wedge \bullet b$
- (iv) $\bullet a \vee \bullet b \leq \bullet (a \vee b)$.

As definições seguintes são usuais para algum sistema axiomático \mathbf{S} .

Definição 2.6: Se $\Gamma \cup \varphi$ é um conjunto de fórmulas do sistema \mathbf{S} , então φ é deduzida ou derivada de Γ , o que é denotado por $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$, se existe uma sequência finita de fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de \mathbf{S} de maneira que $\varphi_n = \varphi$ e, para cada φ_i , $1 \leq i \leq n$ vale uma das seguintes condições:

φ_i é um axioma;

$\varphi_i \in \Gamma$;

φ_i é obtida de fórmulas que ocorrem anteriormente na sequência através de alguma regra de dedução do sistema \mathbf{S} .

Quando $\Gamma = \emptyset$, escrevemos simplesmente $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ no lugar de $\emptyset \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$, e dizemos que

φ é um teorema do sistema axiomático **S**. Deixamos de escrever o subscrito de \vdash_S quando não há possibilidade de confusão.

Definição 2.7: Seja **S** um sistema formal que porta uma operação de negação \neg . Um conjunto Γ de fórmulas de **S** é consistente se não há qualquer fórmula φ tal que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

A seguir, apresentamos o sistema formal ou a lógica **TK**, que formaliza as noções essenciais de um operador de consequência no ambiente lógico.

A lógica proposicional **TK** é o sistema lógico construído sobre a linguagem proposicional $L = (\neg, \vee, \rightarrow, \blacklozenge, p_1, p_2, p_3, \dots)$ de **TK** com os seguintes axiomas e regras de dedução:

(CPC) φ , se φ é uma tautologia

(TK₁) $\varphi \rightarrow \blacklozenge\varphi$

(TK₂) $\blacklozenge\blacklozenge\varphi \rightarrow \blacklozenge\varphi$

(MP) $\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi}$

(RM \blacklozenge) $\frac{\vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash \blacklozenge\varphi \rightarrow \blacklozenge\psi}$

Proposição 2.8: $\vdash \blacklozenge\varphi \rightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$.

Demonstração:

1. $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ Tautologia
2. $\blacklozenge\varphi \rightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$ RM \blacklozenge em 1. ■

Proposição 2.9: $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \blacklozenge\varphi$.

Demonstração:

1. φ Premissa
2. $\varphi \rightarrow \blacklozenge\varphi$ TK₁

3. $\blacklozenge\varphi$ MP em 1 e 2. ■

Proposição 2.10: $\vdash \blacklozenge\varphi \vee \blacklozenge\psi \rightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$.

Demonstração:

1. $\blacklozenge\varphi \rightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$ Proposição 2.2

2. $\blacklozenge\psi \rightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$ Proposição 2.2

3. $\blacklozenge\varphi \vee \blacklozenge\psi \rightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$ CPC. ■

Em (FEITOSA; GRÁCIO, NASCIMENTO, 2010) foi demonstrada a adequação (correção e completude) da lógica **TK** relativa às TK-álgebras.

Podemos definir o operador dual de \blacklozenge da seguinte maneira:

$$\boxplus\varphi =_{\text{def}} \neg\blacklozenge\neg\varphi.$$

Proposição 2.11: $\vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash \boxplus\varphi \rightarrow \boxplus\psi$.

Corolário 2.12: $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash \boxplus\varphi \leftrightarrow \boxplus\psi$.

Proposição 2.13: $\vdash \boxplus\varphi \rightarrow \varphi$.

Proposição 2.14: $\vdash \boxplus\varphi \rightarrow \boxplus\boxplus\varphi$.

Proposição 2.15: $\vdash \boxplus(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \boxplus\varphi$.

Corolário 2.16: $\vdash \boxplus(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\boxplus\varphi \wedge \boxplus\psi)$.

Poderíamos, alternativamente, ter tomado o operador \boxplus como o operador primitivo e substituir os axiomas TK_1 e TK_2 pelos seguintes:

$$(\text{TK}_1^*) \boxplus\varphi \rightarrow \varphi;$$

$$(TK_2^*) \boxplus \varphi \rightarrow \boxplus \boxplus \varphi.$$

e a regra RM^\blacklozenge pela regra RM^\boxplus :

$$\begin{array}{l} (RM^\boxplus) \frac{\vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash \boxplus \varphi \rightarrow \boxplus \psi} \end{array}$$

Como veremos na próxima seção, dado um espaço quase topológico (E, Ω) , o operador \blacklozenge está associado ao fecho naquele espaço, enquanto o operador \boxplus está associado ao interior.

3. A adequação quase topológica de TK

Nesta seção mostramos como os espaços quase topológicos são modelos apropriados para a lógica TK.

Denotamos o conjunto das variáveis proposicionais da lógica TK por $\text{Var}(\mathbf{TK})$ e o conjunto de suas fórmulas por $\text{For}(\mathbf{TK})$.

Definição 3.1: Uma fórmula $\psi \in \text{For}(\mathbf{TK})$ é *refutável* em Γ se $\Gamma \vdash \neg \psi$. Caso contrário, ψ é *irrefutável* em Γ .

Definição 3.2: Seja (E, Ω) um espaço quase topológico. Uma *valoração restrita* no espaço (E, Ω) é uma função $\langle \cdot \rangle: \text{Var}(\mathbf{TK}) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ que interpreta cada variável (fórmula atômica) de TK em um subconjunto de E .

Definição 3.3: Dado um espaço quase topológico (E, Ω) , uma *valoração* é uma função $[\cdot]: \text{For}(\mathbf{TK}) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ que estende natural e unicamente a valoração restrita $\langle \cdot \rangle$ da seguinte maneira:

- (i) $[p] = \langle p \rangle$
- (ii) $[\neg \varphi] = E - [\varphi]$
- (iii) $[\blacklozenge \varphi] = \overline{[\varphi]}$
- (iv) $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$
- (v) $[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$.

Segue desta definição que:

(vi) $[\top] = E$, em que \top é qualquer tautologia

(vii) $[\perp] = \emptyset$, em que \perp é qualquer contradição.

Definição 3.4: Se (E, Ω) é um espaço quase topológico, então uma valoração $[\cdot]$: $\text{For}(\mathbf{TK}) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ é um *modelo* para o conjunto $\Gamma \subseteq \text{For}(\mathbf{TK})$ se $[\gamma] = E$, para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$.

Denotamos um modelo de Γ por $\langle (E, \Omega), [\cdot] \rangle \models \Gamma$, quando são explicitados o espaço (E, Ω) e a valoração $[\cdot]$ sobre E .

Como um caso particular, a valoração $[\cdot]$: $\text{For}(\mathbf{TK}) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ é um modelo para a fórmula φ se $[\varphi] = E$. Neste caso, escrevemos $\langle (E, \Omega), [\cdot] \rangle \models \varphi$.

Definição 3.5: Um subconjunto Γ de fórmulas *implica logicamente* a fórmula ψ , o que é denotado por $\Gamma \models \psi$, se todo modelo de Γ é ainda um modelo de ψ .

Definição 3.6: Uma fórmula φ é *válida no espaço quase topológico* (E, Ω) se para toda valoração $[\cdot]$: $\text{For}(\mathbf{TK}) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ tem-se que $\langle (E, \Omega), [\cdot] \rangle \models \varphi$.

Definição 3.7: Uma fórmula $\varphi \in \text{For}(\mathbf{TK})$ é *válida* se ela é válida em todo espaço quase topológico (E, Ω) .

Agora mostramos a correção dos modelos quase topológicos para a lógica \mathbf{TK} .

Proposição 3.8: $[\varphi \rightarrow \psi] = E \Leftrightarrow [\varphi] \subseteq [\psi]$.

Demonstração: $[\varphi \rightarrow \psi] = E \Leftrightarrow [\neg\varphi \vee \psi] = E \Leftrightarrow [\neg\varphi] \cup [\psi] = E \Leftrightarrow (E - [\varphi]) \cup [\psi] = E \Leftrightarrow [\varphi] \subseteq [\psi]$. ■

Lema 3.9: (Correção) Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração: A demonstração é por indução sobre o comprimento k da dedução de φ a partir de Γ .

Para $k = 1$, segue que φ é um axioma de **TK** ou $\varphi \in \Gamma$.

Se $\varphi \in \Gamma$, certamente, $\Gamma \models \varphi$.

Seja φ um axioma de **TK**.

Se φ é uma tautologia, então, pela condição (vi) da valoração $[\cdot]$, acima, segue que $[\varphi] = E$.

Se φ é do tipo $\psi \rightarrow \blacklozenge \psi$, então $[\psi \rightarrow \blacklozenge \psi] = [\neg \psi \vee \blacklozenge \psi] = (E - [\psi]) \cup \overline{[\psi]} = E$;

Se φ é do tipo $\blacklozenge \blacklozenge \psi \rightarrow \blacklozenge \psi$, então $[\blacklozenge \blacklozenge \psi \rightarrow \blacklozenge \psi] = [\neg \blacklozenge \blacklozenge \psi \vee \blacklozenge \psi] = (E - \overline{[\psi]}) \cup \overline{[\psi]} = (E - \overline{[\psi]}) \cup \overline{[\psi]} = E$.

Em todos os casos vale $\Gamma \models \varphi$.

Pela hipótese de indução, considera-se que o enunciado vale para $k < n$.

Se φ é um axioma de **TK** ou $\varphi \in \Gamma$, já vimos que $\Gamma \models \varphi$.

Se φ foi obtida de Γ pela regra MP, então se encontrou na dedução $\Gamma \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Pela hipótese de indução, $[\psi] = E$ e $[\psi \rightarrow \varphi] = E$ e da proposição anterior segue-se que $[\psi] \subseteq [\varphi]$. Como $[\psi] = E$, então $[\varphi] = E$.

Se φ foi obtida de Γ pela regra $RM\blacklozenge$, então $\varphi = \blacklozenge \sigma \rightarrow \blacklozenge \psi$ ocorreu na dedução $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \psi$. Pela hipótese de indução $[\sigma \rightarrow \psi] = E$. Do lema anterior segue que $[\sigma] \subseteq [\psi]$. Pela Proposição 1.7 (v), $\overline{[\sigma]} \subseteq \overline{[\psi]}$. Como $(E - \overline{[\sigma]}) \cup \overline{[\sigma]} = E$, então $(E - \overline{[\sigma]}) \cup \overline{[\psi]} = E$ e, desse modo, $[\blacklozenge \sigma \rightarrow \blacklozenge \psi] = [\neg \blacklozenge \sigma \vee \blacklozenge \psi] = (E - \overline{[\sigma]}) \cup \overline{[\psi]} = E$.

Portanto, $\Gamma \models \varphi$. ■

A seguir fazemos uma demonstração da Completude.

Definição 3.10: Um conjunto de fórmulas é consistente maximal se ele é consistente e não está contido propriamente em nenhum outro conjunto consistente.

Lema 3.11: $\Gamma \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é inconsistente.

Lema 3.12: Se Γ é consistente maximal, então para toda fórmula ψ , ou $\psi \in \Gamma$ ou $\neg\psi \in \Gamma$.

Lema 3.13: Se Γ é consistente maximal e $\Gamma \vdash \psi$, então $\psi \in \Gamma$.

Teorema 3.14: (Lindenbaum) Todo conjunto consistente de fórmulas Γ pode ser estendido para um conjunto consistente maximal Δ .

Demonstração: A demonstração é usual e pode ser encontrada em (FITTING, MENDELSON, 1998, p. 76). ■

Teorema 3.15: Se Γ é consistente, então Γ tem um modelo.

Demonstração: Segundo o teorema anterior, todo conjunto consistente de fórmulas Γ pode ser estendido a um conjunto consistente maximal Δ . Então, verificaremos que Δ tem um modelo e como consequência, por $\Gamma \subseteq \Delta$, também Γ tem modelo.

Tomemos o espaço quase topológico (E, Ω) , em que $E = \{x\}$ e $\Omega = \{\emptyset, E\}$. Então, para todo $A \subseteq E$, $\overline{A} = A$.

Agora, definimos uma valoração $[\cdot]$: $\text{For}(\mathbf{TK}) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, tal que para cada variável proposicional p , $[p] = E \Leftrightarrow p \in \Delta$.

Segue da afirmação acima que $[\overline{\psi}] = [\psi]$, para toda $\psi \in \text{For}(\mathbf{TK})$.

Mostramos que para toda fórmula ψ , $[\psi] = E \Leftrightarrow \psi \in \Delta$, isto é, $[\cdot]$ é um modelo para Δ .

A demonstração segue por indução sobre o número n de operadores que ocorrem em ψ :

Se $n = 0$, então ψ é uma variável proposicional e segundo a definição de $[\cdot]$, $[\psi] = E \Leftrightarrow \psi \in \Delta$.

Suponhamos que $[\psi] = E \Leftrightarrow \psi \in \Delta$ para toda fórmula ψ em que ocorrem n operadores.

Considerando que em ψ ocorrem $n+1$ operadores, vamos analisar os casos abaixo.

Se ψ é do tipo $\neg\sigma$, então $[\sigma] = E \Leftrightarrow \sigma \in \Delta$. Assim, $[\psi] = E \Leftrightarrow [\sigma] = \emptyset \Leftrightarrow \sigma \notin \Delta \Leftrightarrow \neg\sigma \in \Delta \Leftrightarrow \psi \in \Delta$.

Se ψ é do tipo $\sigma \rightarrow \gamma$, então $[\sigma] = E \Leftrightarrow \sigma \in \Delta$ e $[\gamma] = E \Leftrightarrow \gamma \in \Delta$. Desse modo:

(\Rightarrow) $[\psi] = E \Leftrightarrow [\sigma \rightarrow \gamma] = E \Leftrightarrow [\sigma] = \emptyset$ ou $[\gamma] = E$.

(1º caso) $[\sigma] = \emptyset \Leftrightarrow \sigma \notin \Delta \Leftrightarrow \neg \sigma \in \Delta \Leftrightarrow \Delta \vdash \neg \sigma$. Como $\vdash \neg \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow \gamma)$ é uma tautologia, pela regra MP, segue que $\Delta \vdash \sigma \rightarrow \gamma \Leftrightarrow \sigma \rightarrow \gamma \in \Delta \Leftrightarrow \psi \in \Delta$, pois Δ é consistente maximal.

(2º caso) $[\gamma] = E \Leftrightarrow \gamma \in \Delta \Leftrightarrow \Delta \vdash \gamma$. Mas, como $\vdash \gamma \rightarrow (\sigma \rightarrow \gamma)$ é uma tautologia, por MP, $\Delta \vdash \sigma \rightarrow \gamma$ e, daí, $\sigma \rightarrow \gamma \in \Delta$, isto é, $\psi \in \Delta$.

Assim, se $[\psi] = E$, então $\psi \in \Delta$.

(\Leftarrow) Se $[\psi] \neq E$, pela Proposição 3.8, $[\sigma] \not\subseteq [\gamma]$. Portanto, $[\psi] = \emptyset$, $[\sigma] = E$ e $[\gamma] = \emptyset$. Desse modo, $\sigma \in \Delta$ e $\neg \gamma \in \Delta$. Então, $\Delta \vdash \sigma$, $\Delta \vdash \neg \gamma$ e, considerando a tautologia $\vdash \sigma \rightarrow (\neg \gamma \rightarrow \neg(\sigma \rightarrow \gamma))$, por duas aplicações de MP, segue que $\Delta \vdash \neg(\sigma \rightarrow \gamma)$, $\sigma \rightarrow \gamma \notin \Delta$ e assim, $\psi \notin \Delta$.

Se ψ é do tipo $\blacklozenge \sigma$.

(\Rightarrow) Então $[\psi] = E \Leftrightarrow [\blacklozenge \sigma] = E \Leftrightarrow \overline{[\sigma]} = E \Leftrightarrow [\sigma] (= \overline{[\sigma]}) = E \Leftrightarrow \sigma \in \Delta \Rightarrow \blacklozenge \sigma \in \Delta \Rightarrow \psi \in \Delta$ (por TK_1 e MP).

(\Leftarrow) Se $\blacklozenge \sigma \in \Delta$, então $\Delta \vdash \blacklozenge \sigma$. A dedução de $\blacklozenge \sigma$ a partir de Δ tem que terminar com uma aplicação de MP, pois ψ não é uma condicional. Agora, por hipótese de indução na derivação de $\blacklozenge \sigma$ a partir de Δ , tem-se que $\Delta \vdash \varphi$ e $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \blacklozenge \sigma$. Logo, $[\varphi] = E \Leftrightarrow \varphi \in \Delta$ e $[\varphi \rightarrow \blacklozenge \sigma] = E \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \blacklozenge \sigma \in \Delta$. Mas, pela Proposição 3.8, $[\varphi \rightarrow \blacklozenge \sigma] = E \Leftrightarrow [\varphi] \subseteq [\blacklozenge \sigma]$. Portanto, $[\varphi] = [\varphi \rightarrow \blacklozenge \sigma] = E \Rightarrow E = [\varphi] \subseteq [\blacklozenge \sigma] \Rightarrow E = [\blacklozenge \sigma] = [\psi]$. ■

Corolário 3.16: (Completeness forte) Se $\Gamma \models \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração: Se $\Gamma \models \psi$, então todo modelo de Γ é também modelo de ψ , isto é, não existe modelo de $\Gamma \cup \{\neg \psi\}$. Pelo teorema anterior, $\Gamma \cup \{\neg \psi\}$ é inconsistente e, pelo Lema 3.11, segue que $\Gamma \vdash \psi$. ■

4. Um axioma modal adicional

A lógica **TK** pode ser vista como um caso particular de lógica modal em que o operador \blacklozenge seria visto como um caso do operador modal de possibilidade \diamond . Esta lógica é um subsistema do sistema modal S_4 , mas não é um sistema modal normal, posto que em geral, em **TK**, não vale a condição: $\blacklozenge(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\blacklozenge\varphi \vee \blacklozenge\psi)$.

Por ser um sistema não normal, os usuais modelos de Kripke não se aplicam a **TK**, mas outros modelos sim, como aquele de carácter topológico da seção anterior.

Neste momento, gostaríamos de avaliar o acréscimo a **TK** do usual axioma modal:

$$(5): \blacklozenge\psi \rightarrow \boxplus\blacklozenge\psi.$$

Dada a dualidade entre \blacklozenge e \boxplus temos, naturalmente, outra versão de (5):

1. $\blacklozenge\psi \rightarrow \boxplus\blacklozenge\psi$
2. $\blacklozenge\neg\psi \rightarrow \boxplus\blacklozenge\neg\psi$
3. $\neg\boxplus\blacklozenge\neg\psi \rightarrow \neg\blacklozenge\neg\psi$
4. $\neg\neg\blacklozenge\neg\neg\boxplus\neg\neg\psi \rightarrow \boxplus\psi$
5. $\blacklozenge\boxplus\psi \rightarrow \boxplus\psi. (5')$

Veremos então, na próxima seção, como fica o modelo quase topológico deste novo sistema.

5. Quando todo conjunto fechado é aberto

Como os espaços quase topológicos são modelos adequados para a lógica **TK**, ao incluirmos um novo axioma à coleção de axiomas de **TK**, no caso o axioma (5), precisamos avaliar como interpretar de modo natural este axioma em um espaço quase topológico e o que daí decorre.

A maneira imediata de interpretar (5) em um espaço quase topológico é através do axioma:

$$\overline{A} \subseteq \dot{A}.$$

Como o interior de cada conjunto está contido no conjunto, então, imediatamente, temos que $\overline{A} = \dot{A}$ e também.

Proposição 5.1: Num espaço quase topológico (E, Ω) em que para todo $A \subseteq E$, tem-se $\overline{A} = \dot{A}$, então todo conjunto fechado é aberto.

Demonstração: Se A é fechado, então $\overline{A} = A$. Como $\overline{A} = \dot{A}$, então $A = \dot{A}$ e, assim, A é aberto. ■

Proposição 5.2: Num espaço quase topológico (E, Ω) em que para todo $A \subseteq E$, tem-se $\overline{A} = \dot{A}$, então todo conjunto aberto é fechado.

Demonstração: Se A é aberto, então o seu complementar é fechado e, pela proposição anterior, é aberto. Logo A é fechado. ■

As condições acima indicam que todo conjunto fechado é aberto e que todo aberto é fechado, mas não diz que todo subconjunto de E é aberto e fechado. Isto é apenas um caso particular, assim como o caso em que os únicos abertos e fechados são \emptyset e E .

Teorema 5.3: Os espaços quase topológicos em que, para todo $A \subseteq E$, $\overline{A} = \dot{A}$, são modelos adequados para **TK** + (5).

Demonstração: Certamente (5) é correto em todo tal espaço. Falta mostrar que se uma fórmula qualquer é válida num espaço quase topológico (E, Ω) em que $\overline{A} = \dot{A}$, então ela é dedutivamente obtida de **TK** + (5). Esta parte decorre do Teorema 3.15, quando precisamos de um espaço modelo que atende a exigência de que, para todo $A \subseteq E$, $\overline{A} = \dot{A}$. Mas, o modelo considerado no Teorema 3.15 tem exatamente esta característica. Logo, a completude também segue. ■

Proposição 5.4: Se (E, Ω) é um espaço quase topológico em que para todo $A \subseteq E$, tem-se $\overline{A} = \dot{A}$, então (E, Ω) é um espaço topológico.

Demonstração: Os conjuntos \emptyset e E são abertos e fechados e, mais, uma intersecção

qualquer de abertos é uma intersecção de fechados e, desse modo, um fechado. Logo é também um aberto. ■

Como sabemos da literatura sobre lógicas modais, o sistema S_5 tem como modelos adequados a classe de espaços topológicos em que todo aberto é fechado (KREMER, 2009), então S_5 e $TK + (5)$ têm exatamente as mesmas fórmulas válidas e, portanto, são dedutivamente coincidentes.

Considerações finais

Neste trabalho, primeiramente mostramos a adequação da lógica TK em relação aos espaços quase topológicos. Ao tratarmos do bem conhecido axioma modal (5) no ambiente dos espaços topológicos, $\bar{A} = \dot{A}$, pudemos demonstrar a adequação de $TK + (5)$ com estes espaços quase topológicos acrescidos de $\bar{A} = \dot{A}$.

Ademais, concluímos que $TK + (5)$ notavelmente coincide com o sistema modal S_5 . Assim, apesar de TK ser um subsistema do sistema modal S_4 , que não é normal, o acréscimo do axioma (5) à TK resulta num sistema equivalente à S_5 .

A lógica TK possui um carácter modal interessante, por estar associada aos espaços quase topológicos e, desse modo, aos sistemas dedutivos de Tarski. No entanto, qual a relação entre TK e os sistemas modais usuais? As Proposições 2.13 e 2.14 garantem, respectivamente, que os axiomas modais T e (4) são válidos em TK , mas, quais axiomas não são válidos? Além disso, se ao invés do axioma (5) acrescentarmos outro axioma modal usual, quais serão as características do novo sistema?

As questões acima norteiam futuras pesquisas.

Referências

- AWODEY, S.; KISHIDA, K. Topology and modality: the topological interpretation of first-order modal logic. *The Review of Symbolic Logic*, v. 1, n. 2, p. 143 - 166, 2008.
- BELL, J. L.; MACHOVER, M. *A course in mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland, 1977.
- CARNIELLI, W. A.; PIZZI, C. *Modalità e multimodalità*. Milano: Franco Angeli, 2001.
- CHAGROV, A.; ZAKHARYASCHEV, M. *Modal logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- CHELLAS, B. *Modal Logic: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- DUGUNDJI, J. *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1966.
- EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. *Mathematical logic*. New York:

Springer-Verlag, 1984.

ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*. San Diego: Academic Press, 1972.

FEITOSA, H. A.; GRÁCIO, M. C. C.; NASCIMENTO, M. C. Logic TK: algebraic notions from Tarki's consequence operator. *Principia*, v. 14, p. 47-70, 2010.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C. Logic of deduction: models of pre-order and maximal theories. *South American Journal of Logic*, v. 1, p. 283-297, 2015.

FITTING, M.; MENDELSON, R. L. *First-order modal logic*. Dordrecht: Kluwer, 1998.

KREMER P. Dynamic topological S5. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 160, p. 96-116, 2009.

LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. (Textos Universitários)

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.

NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. As álgebras dos operadores de consequência. *Revista de Matemática e Estatística*, v. 23, n. 1, p. 19-30, 2005.

RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. *The mathematics of metamathematics*. Second edition revised. Warszawa: PWN, 1968.

RASIOWA, H. *An algebraic approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland, 1974.