

# ANTECEDENTES HISTÓRICOS DA OPOSIÇÃO WITTGENSTEINIANA ENTRE *DARSTELLUNG* E *BESCHREIBUNG*

## HISTORICAL BACKGROUND OF THE WITTGENSTEINIAN OPPOSITION BETWEEN *DARSTELLUNG* AND *BESCHREIBUNG*

Anderson Luis Nakano<sup>1</sup>

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é traçar alguns paralelos históricos que existem entre a oposição *Darstellung/Beschreibung* tal como ela é usada por Wittgenstein no período intermediário de seu pensamento e a mesma oposição em alguns matemáticos do século XIX, pertencentes a duas escolas distintas que divergiam quanto ao método de produção matemática. Em seguida, retornaremos aos escritos de Wittgenstein, buscando mostrar em que medida esta investigação histórica pode ser útil para iluminar alguns pontos de sua filosofia e levantar alguns problemas que surgiram neste contexto.

**Palavras-chave:** Wittgenstein intermediário. Construtivismo. Riemann. Dedekind. Weierstrass.

**Abstract:** The present work aims at outlining some historical parallels that exist between the opposition *Darstellung/Beschreibung* as it is used by the so-called “middle Wittgenstein” and the same opposition in some mathematicians of the nineteenth century, belonging to two distinct schools that differed on the method of mathematical research. Then, we will return to Wittgenstein's writings in order to show how this historical research may be useful to highlight some points of his philosophy and to raise some problems that arose in this context.

**Keywords:** The middle Wittgenstein. Constructivism. Riemann. Dedekind. Weierstrass.

\* \* \*

### Introdução

Nos escritos do período intermediário do pensamento de Wittgenstein, um dos pilares de suas críticas à teoria dos conjuntos como fundamento da matemática é a recusa de que a matemática tenha um conteúdo descritivo, de que ela descreva “objetos matemáticos”. Em oposição ao termo “descrição” (*Beschreibung*), encontra-se frequentemente o termo “apresentação” (*Darstellung*)<sup>2</sup>, e esta oposição é, por diversas

---

<sup>1</sup> Mestre em Filosofia pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Email: andersonnakano@gmail.com.

<sup>2</sup> O termo “*Darstellung*” é muitas vezes traduzido por “representação”. Evitamos esta opção de tradução por duas razões: em primeiro lugar, o próprio autor contrasta o verbo “*repräsentieren*” com o verbo “*darstellen*”, por exemplo em: “*Wie gesagt: der Satzzeichen repräsentiert nicht - Es stellt dar*” (Wittgenstein 1999, Band iii, p. 88). O verbo “*repräsentieren*” ocorre aqui como sinônimo de “*vertreten*”, assim como utilizamos o verbo “representar” como sinônimo de “substituir”, de “estar no lugar de alguém”. Em segundo lugar, o termo “representação”, com uma conotação claramente psicológica, é, não raro, utilizado para traduzir o vocábulo alemão “*Vorstellung*”.

razões, de fundamental importância para compreender a posição do filósofo a respeito da matemática neste período.

Em primeiro lugar, e em contraste com o *Tractatus*, números serão entendidos como formas ou estruturas que são *apresentadas* por meio de esquemas numéricos<sup>3</sup>, evitando assim a “nebulosa introdução ao conceito de número por meio da forma geral da operação”<sup>4</sup>. Como o filósofo sustenta que formas não podem ser descritas, mas apenas apresentadas<sup>5</sup>, o número, enquanto uma forma, também deverá apenas ser apresentado por um simbolismo perspicuo, isto é, por um simbolismo que tenha a mesma multiplicidade da forma que pretende apresentar.

Além disso, a posição do filósofo em relação ao infinito na matemática está intimamente vinculada a esta oposição. Aos olhos de Wittgenstein, a teoria dos conjuntos, ao procurar trabalhar com o infinito atual, trata-o de modo amorfo como ocorre quando formamos conceitos genuínos. Quando formamos um conceito genuíno como, *e. g.*, “animal”, entendemo-lo sem que, para isso, nos seja dado qualquer animal ou qualquer lei de construção de um animal. A teoria dos conjuntos também pretende tratar o infinito apenas por meio de “propriedades” de objetos; pretende que, quando o conceito é bem definido, tais objetos possuem ou não a propriedade vinculada ao conceito, mesmo que não esteja disponível uma lei que possa antever os objetos que terão esta propriedade. O objeto matemático é, então, *descrito* pela proposição que afirma o fato de ele possuir ou não tal propriedade. Esta concepção será duramente criticada pelo filósofo, já que na matemática nunca pode haver uma dualidade entre “descrição” e “efetividade” (não há um reino de infinitos objetos abstratos que é descrito “de fora” pela matemática). O infinito pode apenas ser dado “intensionalmente”, isto é, por meio de uma lei segundo a qual é possível produzir “construções” (cada etapa da aplicação da lei produz uma “construção”, e isto é somente o que uma lei pode produzir). Se a teoria dos conjuntos aceita trabalhar com o infinito de modo não intensional, então ela aceita trabalhar com um infinito em que se pode obter resultados não governados por leis, isto é, acidentes. É por isso que o filósofo afirma que “se há uma realidade infinita, então também há acidente no

---

<sup>3</sup> Cf. Wittgenstein, 1964, p. 129: “Die Zahlen sind das, was ich in meiner Sprache durch die Zahlenschemata darstelle”. O contraponto com o *Tractatus* mereceria um tratamento mais aprofundado, o qual não faremos neste trabalho.

<sup>4</sup> Wittgenstein, 1964, p. 131 (tradução nossa).

<sup>5</sup> Cf. Wittgenstein, 1964, p. 208: “Eine Form kann nicht beschrieben sondern nur dargestellt werden”.

infinito”<sup>6</sup>. O único modo de evitar esta dualidade ao trabalhar com a teoria dos conjuntos seria supor que, para cada “conceito”, há uma lei de construção dos objetos que caem sob este conceito. É nesse sentido que Wittgenstein afirma que a teoria dos conjuntos “se erige sobre um simbolismo fictício”, isto é, ela “pressupõe que fossem dadas classes de símbolos equivalentes à flecha, o que porém não é o caso (e nunca se pode supor um simbolismo hipotético). E sobre esta suposição ela continua erigindo”<sup>7</sup>. Em outras palavras, ou a teoria dos conjuntos pressupõe o infinito atual e portanto pressupõe que haja acidentes na matemática, e isto é, segundo o filósofo, um contrassenso, ou ela pressupõe que cada descrição é apenas aparente, e que é possível dar a lei geral que constrói os objetos que satisfazem a descrição (no caso de “número par”, por exemplo, que seja possível passar de “número divisível por 2” para a lei expressa por  $[0, \xi, \xi+2]$ ). Neste caso, ela “se erige sobre um simbolismo fictício, portanto sobre contrassensos”<sup>8</sup>. Em ambos casos, portanto, ela é supérflua e não pode servir de fundamento para a matemática.

O termo “*Darstellung*” também é importante pois ele será utilizado como sinônimo do termo “*Konstruktion*”<sup>9</sup>. Como muitos intérpretes afirmam que Wittgenstein defende uma espécie de construtivismo em sua filosofia da matemática, é fundamental, como veremos adiante, caracterizar este construtivismo em oposição ao “experimento aritmético”. Segundo o filósofo, a obtenção de um número por meio do resultado de um experimento seria “a *descrição*, não a *apresentação* de um número”<sup>10</sup> (grifo nosso).

É notável que, no *Tractatus*<sup>11</sup>, haja tão pouca evidência desta distinção conceitual entre descrição e apresentação. Em boa parte do livro, estes termos são utilizados como sinônimos. A título de exemplo, a proposição é caracterizada como sendo a “*descrição* de um estado de coisas”<sup>12</sup> (grifo nosso), e ela também *apresenta* este estado de coisas<sup>13</sup>. Há apenas um aforismo em que ambos termos aparecem em

---

<sup>6</sup> Wittgenstein, 1964, p. 163 (tradução nossa).

<sup>7</sup> Wittgenstein, 1999, Band i, p. 136 (tradução nossa).

<sup>8</sup> *Ibid.*, p. 136 (tradução nossa).

<sup>9</sup> Como, por exemplo, em [Wittgenstein 1999, Band i, p. 111: “Es ist ja nicht so, daß die Beschreibung eine Zahl von außen beschreibt, sondern sie stellt eine Zahl dar, sie konstruiert eine Zahl”].

<sup>10</sup> Wittgenstein, 1964, p. 240 (tradução nossa).

<sup>11</sup> Embora estejamos utilizando a tradução de Luis Henrique Lopes dos Santos para as citações desta obra, alteramos, afim de para manter a uniformidade do trabalho, a tradução de “darstellen” para “apresentar” (ao invés de “representar”).

<sup>12</sup> Wittgenstein 2004, p. 169 (aforismo 4.023).

<sup>13</sup> Cf. p. ex., Wittgenstein 2004, aforismo 4.031: “Pode-se dizer sem rodeios: esta proposição apresenta tal e tal situação – ao invés de: esta proposição tem tal e tal sentido. Cf. também [Wittgenstein 2004,

contraste explícito. Na parte do livro reservada ao esclarecimento das “proposições da lógica”, o filósofo afirma: “As proposições lógicas *descrevem* a armação do mundo, ou melhor, *apresentam-na*. Não 'tratam' de nada”<sup>14</sup> (grifo nosso). A última sentença parece sugerir que a oposição entre descrição e apresentação pode ser entendida do seguinte modo: disciplinas como a lógica e a matemática, ao contrário das ciências da natureza, não “tratam” de nada, e por este exato motivo não podem ser propriamente descritivas, já que não haveria nada para descrever, nada que poderia ser chamado de seu objeto de estudo (é por isso que elas devem cuidar de si próprias). Por outro lado, as ciências da natureza tratam de seus respectivos objetos “de fora”, e é por isso que são informativas, quando verdadeiras. A função, então, de disciplinas como a lógica e a matemática seria a de *apresentar* a “armação do mundo”, i. e., as relações de verdade entre proposições com sentido e as relações de substituibilidade mútua entre expressões simbólicas.

Diante deste quadro, o objetivo deste trabalho é traçar alguns paralelos históricos que existem entre a oposição *Darstellung/Beschreibung* tal como ela é usada pelo filósofo austríaco do século XX, e a mesma oposição em alguns matemáticos do século XIX, pertencentes a duas escolas distintas que divergiam quanto ao método de produção matemática. Em seguida, retornaremos aos escritos de Wittgenstein para mostrar em que medida esta investigação histórica pode ser útil para iluminar alguns pontos de sua filosofia e levantar alguns problemas que surgiram neste contexto.

## I

A introdução e o estudo de funções de números complexos na Alemanha em meados do século XIX eram nitidamente divididos em duas abordagens. A primeira, centrada na universidade de Göttingen, procurava estudar tais funções independentemente de expressões analíticas para elas, procurando descrevê-las por meio de propriedades de modo que elas fossem completamente determinadas por elas. A segunda, centrada na universidade de Berlim, priorizava o estudo da *Darstellbarkeit* destas funções utilizando séries de funções mais simples ou outras expressões analíticas para elas. A primeira priorizava o aspecto conceitual da matemática, a segunda o aspecto computacional. Matemáticos como Riemann e Dedekind representavam a primeira, enquanto que a segunda era representada por Weierstrass e Kummer, em continuidade com o estilo de Euler. A primeira está intimamente associada com a

---

aforismo 4.1]: “A proposição apresenta a existência e a inexistência dos estados de coisas”.

<sup>14</sup> Wittgenstein 2004, p. 259 (aforismo 6.124).

criação da teoria dos conjuntos e com a ideia de que conjuntos são primordiais para a fundamentação da matemática<sup>15</sup>. Procuraremos, primeiramente, caracterizar mais de perto a primeira abordagem.

Em sua dissertação inaugural de 1951, Bernhard Riemann procurou fundar uma nova teoria para a análise de funções de variáveis complexas. A teoria buscava caracterizar tais funções por meio de propriedades fundamentais, sem que para isso fosse preciso trabalhar com expressões analíticas destas funções. Segundo Riemann:

Os métodos anteriores para lidar com essas funções se baseavam sempre em uma expressão da função, por meio da qual seu valor, para cada valor de seu argumento, é dado. Mostrou-se, através de nossa investigação, que, em decorrência do caráter geral de uma função de uma grandeza variável complexa, em uma definição deste tipo, uma parte dos elementos de determinação (*Bestimmungsstücke*) é uma consequência das demais, a saber, o montante de elementos de determinação que foram reduzidos àqueles indispensáveis à determinação [da função]. Isto simplifica essencialmente o tratamento destas. Por exemplo, para provar a identidade de duas expressões da mesma função, era geralmente necessário transformar uma na outra, isto é, mostrar que ambas coincidem para cada valor da grandeza variável; agora basta estabelecer a coincidência de tais funções em um domínio muito menor.

Uma teoria destas funções, baseada nos fundamentos aqui estabelecidos, determinaria a configuração da função (i.e., seu valor para cada valor de seus argumentos) independentemente de um modo de determinação através de operações de grandezas, de modo que, para o conceito geral de uma função de uma grandeza variável complexa, são adicionadas apenas as características necessárias para determinar a função, e somente então migra-se para as diversas expressões pelas quais a função pode ser fornecida.<sup>16</sup>

Um importante pano de fundo para este passo inovador de Riemann é a evolução do conceito de “função” na matemática. De um modo bastante conciso<sup>17</sup>, esta evolução ocorreu do seguinte modo: até o início do século XVIII, uma função matemática era uma certa expressão analítica que determinava, para cada valor de seus argumentos, um único valor. Euler, no entanto, já admitia funções determinadas “por partes”, às quais ele chamou de descontínuas. A função, então, era contínua quando ela era dada por uma

---

<sup>15</sup> Cf. Ferreirós, 2007, p. xx: “The idea that sets constitute the foundation of mathematics emerged very early, and Cantor was by no means the leading exponent of this view. Its strongest proponent as of 1890 was Dedekind, but I shall argue that Riemann was also an important voice advocating this position. Riemann took a significant step in the direction of introducing the language of sets, coupling this with the conception that sets are the basic objects of mathematics. There are good reasons to regard his early contribution as a significant influence on the early set-theoretical attempts of both Dedekind and Cantor”.

<sup>16</sup> Riemann, 1953, pp. 38-9 (tradução nossa).

<sup>17</sup> Voltaremos a tratar, adiante, de mais alguns pontos importantes desta evolução do conceito de “função”.

única lei ou expressão analítica. Cauchy, em seu famoso *Cours d'Analyse* de 1821, definiu o termo “continuidade” de modo a esta característica ser uma propriedade da própria “curva” (imagem da função), independente de expressões analíticas para ela. Matemáticos como Fourier e Dirichlet propuseram que uma função deveria ser entendida simplesmente como uma correlação arbitrária entre dois conjuntos de valores, independentemente desta correlação seguir ou não uma lei comum. E é nesse sentido que uma função é entendida na matemática moderna (com a linguagem da teoria dos conjuntos implícita), como uma relação binária entre dois conjuntos  $C_1$  e  $C_2$ , satisfazendo a propriedade de que, se  $a$  pertence a  $C_1$ ,  $b$  e  $c$  pertencem a  $C_2$ ,  $aRb$  e  $aRc$ , então  $b=c$ .

Ora, se funções deveriam ser entendidas como correlações arbitrárias independentemente de funções analíticas para expressá-las, elas deveriam ser determinadas pelas suas singularidades, pelas suas propriedades locais e globais que a diferenciavam – exceto talvez por uma constante – de outras funções, já que nem se sabia se havia ou poderia haver uma expressão analítica para elas<sup>18</sup>. É esse conjunto mínimo de características da função, independentemente da *apresentação* da função por meio de uma lei, que Riemann procurou prover.

A influência de Riemann pode ser facilmente notada no seu colega mais jovem, Richard Dedekind, que via no trabalho de Riemann um modelo metodológico a ser seguido. Em uma carta a R. Lipschitz, datada de 6 de outubro de 1876, Dedekind afirma:

Meus esforços na teoria dos números são direcionados a basear a investigação não em formas acidentais de apresentação ou expressões, mas em conceitos fundamentais simples e, através disto, – embora esta comparação talvez soe pretensiosa – alcançar neste domínio algo similar ao que Riemann alcançou no domínio da teoria das funções, e nesse sentido eu não posso suprimir a observação de passagem de que, na minha opinião, os princípios riemannianos não são aplicados de modo consequente na maioria dos autores, p. ex., também nas novas obras sobre funções elípticas; quase sempre a simples teoria vem a malograr devido à interferência desnecessária de formas de apresentação, as quais certamente deveriam ser apenas resultados, não ferramentas da teoria.<sup>19</sup>

---

<sup>18</sup> Na verdade, Riemann, na sua dissertação inaugural de 1851, afirma que “função arbitrária” e “função dada por certas operações de grandeza (*Größenoperationen*) são conceitos congruentes quando se trabalha com funções de uma variável que assume valores reais, o que não será o caso na análise complexa, em que há funções arbitrárias de uma variável complexa que, segundo o autor, não podem ser apresentadas por meio de uma combinação de operações de grandezas.

<sup>19</sup> Dedekind, 1930, Band iii, pp. 468-9 (tradução nossa).

Na continuação da carta acima, Dedekind confessa que ele próprio havia outrora introduzido a noção de “campo finito” em conexão com uma forma de apresentação, sendo que esta poderia ser substituída por uma infinitude de outras formas de apresentação, de modo que a definição já pressupunha que estas substituições deixariam a noção intacta, isto é, que a noção era invariante em relação às diversas formas de apresentação. A definição mais satisfatória seria, então, a fornecida por ele em 1871, segundo a qual “um campo finito é um campo que possui apenas um número finito de divisores” ou, de modo equivalente, “um campo finito é um campo que contém apenas um número finito de números independentes uns dos outros”<sup>20</sup>.

Em suma, para Riemann e Dedekind<sup>21</sup>, a matemática deveria ser fundada não por meio de fórmulas algorítmicas para calcular seus objetos, mas por meio de propriedades conceituais que descreviam estes objetos. Com isso, muitos resultados importantes eram extraídos sem trabalhar explicitamente com formas de apresentação, mas tão somente com propriedades características de funções e de conjuntos. Dirichlet menciona, em uma passagem de seu discurso em memória a Jacobi, esta proeminente tendência da “nova análise”, a de colocar “pensamentos no lugar de cálculos”<sup>22</sup>. “Pensamentos”, aqui, devem ser entendidos como a definição e aplicação de “conceitos fundamentais”, que descrevem os objetos da análise, ao invés de apresentá-los, de construí-los com fórmulas. O mesmo *leitmotiv* aparece em Hilbert: “Eu procurei evitar o grande aparato computacional de Kummer, de modo que também aqui o princípio de Riemann fosse implementado, de acordo com o qual provas não devem ser compelidas por cálculos, mas simplesmente por pensamentos”<sup>23</sup>.

Abordagem notavelmente distinta era, por outro lado, a de Weierstrass. Na sua teoria sobre funções de variável complexa, a própria noção de “função de variável complexa” envolvia já, em sua definição, uma forma de apresentabilidade. Enquanto Riemann via as equações de Cauchy-Riemann como condições necessárias e suficientes para que uma função possa ser objeto do estudo da análise complexa, Weierstrass definia, como objeto de sua teoria, aquelas funções de variável complexa que eram apresentáveis localmente por séries de potências<sup>24</sup>. Isto o permitia, com o auxílio de

---

<sup>20</sup> *Ibid*, p. 469 (tradução nossa).

<sup>21</sup> Também poderíamos incluir Cauchy, Dirichlet, Jacobi, entre outros.

<sup>22</sup> Dirichlet, 1987, p. 245.

<sup>23</sup> Hilbert, 1932, p. 67 (tradução nossa).

<sup>24</sup> Ambas teorias pressupunham o estudo de funções *diferenciáveis*. A pergunta pelo objeto da teoria,

uma técnica conhecida como “extensão analítica”, reconstruir a totalidade da função a partir de sua apresentação local através de séries de potências<sup>25</sup>. Os números reais também eram, na abordagem de Weierstrass, essencialmente vinculados a sua apresentação por meio de séries – e não de sequências, como no caso de Cantor – convergentes. Toda a análise, então, poderia ser estabelecida por meio de apresentação aritmética de seus objetos, isto é, de fórmulas ou expressões analíticas para calculá-los. No caso de séries com infinitos termos, era requerida a prova da convergência da série, de modo que o “infinito” fosse aqui apenas uma *façon de parler*.

Em seu curso de 1886, Weierstrass apresenta, a partir do seu ponto de vista, o desenvolvimento histórico do conceito de “função”. Neste contexto, alguns matemáticos como Leibniz, Jacob, Euler e Lagrange são tomados como exemplos do uso de “função” como sinônimo de expressão analítica. Após os trabalhos de Johann Bernoulli, o conceito de continuidade de uma função se altera, segundo Weierstrass, de modo que tal conceito se torna independente da expressão analítica da função. Ora, se, para os primeiros autores, o termo “função” era um sinônimo de “expressão analítica”, esta nova definição de continuidade sequer fazia sentido. Importante para a compreensão da mudança do conceito de “continuidade de uma função” é o problema da corda vibrante. Neste problema, uma corda elástica, tendo suas extremidades fixas, é deformada de modo que sua forma seja descrita por uma certa função  $f(x)$ . Procura-se saber, então, qual função  $y(x, t)$  apresenta a posição a corda após um tempo  $t$ , sendo que a única força agindo sobre a corda era a força elástica, dada pela lei de Hooke. Em 1747, d'Alembert resolveu o problema da corda vibrante por meio de uma equação diferencial (hoje conhecida como “equação da onda”). No entanto, d'Alembert assumia que a função  $f(x)$

---

então, era a pergunta pelas condições que uma grandeza complexa  $w = u+vi$  seja uma função diferenciável da grandeza complexa  $z=x+yi$ . Para Riemann, era suficiente que os seguintes pré-requisitos fossem cumpridos: i) as derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , devem existir e ii) devem satisfazer as

equações:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ . Já para Weierstrass,  $w(z)$  deveria poder ser apresentada localmente

(em  $z_0$ ) por meio de uma série de potências, de modo que  $w(z) = \sum a_i(z - z_0)^i$ . Ambas definições são, com a exceção de pequenos detalhes, equivalentes, embora este fato não fosse conhecido na época.

<sup>25</sup> Cf. Ferreirós, 2007, p. 36: “In his theory of analytic functions, Weierstrass defined them as those functions which are locally representable by power series. This allowed him to base the theory upon clear arithmetical notions, and to elaborate its first rigorous treatment. A necessary prerequisite was the principle of analytic continuation, which made it possible to 'reconstruct' the entire function from its local power-series representation. Weierstrass was able to establish that principle, thus creating a method for generating, from a given local representation or 'element', a chain of new 'analytic elements' defining the entire function”.



(o “estado inicial” da corda) era dada por uma expressão analítica. Em 1748, Euler argumentou que a solução era válida mesmo que a forma inicial da corda vibrante fosse dada por uma curva desenhada à mão, sem sequer saber se era possível construir uma expressão analítica para ela<sup>26</sup>. No entanto, mesmo sendo desenhada à mão, ela precisaria, para que o problema continuasse tendo sentido físico, continuar sendo uma única corda, isto é, o desenho precisava, de algum modo, ser “contínuo”. É apenas em 1821 então que Cauchy define o termo “continuidade” tal como será utilizado pelos matemáticos posteriores<sup>27</sup>: “*a função  $f(x)$  se manterá contínua em relação a  $x$  entre seus limites dados se, entre estes limites, um acréscimo infinitamente pequeno da variável produz sempre um acréscimo infinitamente pequeno da própria função*”<sup>28</sup>.

Para Weierstrass, então, levantava-se a questão da relação entre os conceitos de “função contínua” (entendida segundo a definição de Cauchy) e “função dada por uma expressão analítica”. O matemático responde categoricamente a esta questão, afirmando que “se pode inferir, da continuidade da função, *que é possível apresentá-la por meio de uma série infinita, cujos membros singulares são funções polinomiais com coeficientes racionais*, isto é, que se pode, afinal, obter uma *expressão aritmética...*”<sup>29</sup>. Weierstrass também considerava possível a apresentação de funções descontínuas limitadas, o que indica, como afirma Laugwitz, que era da vontade de Weierstrass reduzir não somente o conceito de continuidade, mas sobretudo o conceito de função à apresentação *via* expressões aritméticas<sup>30</sup>.

Deste modo, Weierstrass se posiciona na contramão da abordagem de Riemann e Dedekind, para os quais a apresentação de uma função era, até certo ponto, arbitrária. Já para Weierstrass, embora fosse interessante e útil encontrar propriedades de funções sem considerar sua apresentação, “o fim último consiste sempre na *apresentação* de uma função”<sup>31</sup>. Isto é, a dedução exclusivamente a partir de conceitos, como desejavam Riemann e Dedekind, por mais interessante e útil que fosse, poderia ser eliminada, uma vez em posse da apresentação da função. Laugwitz, de modo ousado, afirma a este

---

<sup>26</sup> Para uma exposição detalhada deste problema e de sua importância para a evolução do conceito de “função”, Cf. Kleiner, 1989 e Youschkevitch, 1986.

<sup>27</sup> Embora não com o mesmo rigor da definição moderna que utiliza o conceito de “limite”.

<sup>28</sup> Cauchy, 1921, pp. 34-5 (tradução nossa).

<sup>29</sup> Weierstrass, 1988, p. 23 (tradução nossa).

<sup>30</sup> Cf. Laugwitz, 1992, p. 344: “*bemerkenswert ist, daß er [Weierstrass] die Darstellung beschränkter unstetiger Funktionen durch arithmetische Ausdrücke für wünschenswert, ja sogar für möglich hielt. Nicht nur der Begriff der Stetigkeit, sondern der Begriff der Funktion überhaupt sollte nach seinem Wunsch zurückgeführt werden auf die Darstellung als arithmetische Ausdrücke*”.

<sup>31</sup> Weierstrass, 1988, p. 176 (tradução nossa).

respeito: “se tivessem seguido Weierstrass, a teoria dos conjuntos de Cantor dificilmente seria capaz de se impor como ferramenta da análise”<sup>32</sup>.

## II

É surpreendente o quanto as críticas que Wittgenstein direciona à teoria dos conjuntos nos seus manuscritos de 1929/30 caem “como uma luva” para a abordagem de Riemann e Dedekind. Com efeito, a seguinte passagem poderia muito bem ser direcionada ao método proposto por Riemann em sua dissertação inaugural:

Se uma teoria amorfa de agregados infinitos é possível, então ela deve apenas descrever e apresentar o que é amorfo nestes agregados. Ela deveria então realmente entender as leis como meros meios inessenciais de apresentação de um agregado e abstrair desta inessencialidade e apenas se atentar para o que é essencial. Mas para o que? É possível, na lei, abstrair da lei e ver a extensão apresentada como o que é essencial? / Mas então, que ela seja uma lei, não seria o essencial no símbolo. Ao invés disso, que ela determina uma extensão infinita. (Mas precisamente isto a lei não dá).<sup>33</sup>

Como este trabalho procurou deixar manifesto, no método de Riemann, as formas de apresentação são meros meios inessenciais de apresentação de um agregado, e este deve ser caracterizado apenas pelas suas notas características essenciais. Uma vez descrito pelas suas singularidades, poder-se-ia passar do conceito para o agregado infinito correspondente. Chegamos ao “princípio da compreensão”, pressuposto implícito da teoria dos conjuntos, que afirma que, dado um conceito bem definido, há a classe ou conjunto de *todos* os objetos que satisfazem este conceito. Já o filósofo austríaco nega, e por diversas vezes em seus escritos, o uso de quantificadores para expressar a generalidade matemática. A generalidade matemática, segundo Wittgenstein, é dada apenas por uma lei. Isto porque ela não é, assim como ocorre na generalidade empírica, acidental.

Um problema que Wittgenstein enfrentará nos manuscritos de 1929/30 relacionado à oposição apresentação/descrição tem como elemento central o conceito de “número primo”. Tal conceito é um exemplo emblemático do que parece ser a “descrição de um número”. Com efeito, o conceito de “número primo” não pode ser substituído por uma lei que forneceria, para cada aplicação individual da lei, um número

---

<sup>32</sup> Laugwitz, 1992, p. 345.

<sup>33</sup> Wittgenstein, 1999, p. 118 (tradução nossa).

primo. Não é que não exista um procedimento finito para encontrar o número primo; o problema é que este procedimento não seria a “apresentação” de um número primo (por uma lei), mas este número seria o resultado de um “experimento aritmético” (da descrição de um número). Com efeito, segundo Wittgenstein, “só aquilo que eu vejo é uma lei; não o que eu *descrevo*”<sup>34</sup>. Ainda segundo o filósofo:

Aqui nós continuamos nos opondo contra o que se poderia chamar de experimento aritmético. O que emerge é certamente determinado por meio do que é dado, mas eu não posso perceber *como* ele é, com isso, determinado. (similar, e. g., à ocorrência de 7 em  $\pi$ ). Os números primos também emergem do método para procurá-los, como o resultado de um experimento. Na verdade, eu posso me convencer de que 7 é um número primo, mas eu não vejo a conexão entre ele e a condição que ele satisfaz. Eu apenas o encontrei e não o engendrei. Eu o procuro, mas eu não o engendro.<sup>35</sup>

É por isso que o filósofo afirma que “ser um número primo é quase uma propriedade de um número, não uma parte de sua essência”<sup>36</sup>. Ora, o fato de o conceito “número primo” ser uma “propriedade” de um número, não havendo uma “notação” para expressar o *n*-ésimo número primo não traz nenhum problema para a abordagem de Riemann e Dedekind, já que é propriamente de propriedades conceituais que se deveriam, segundo esta abordagem, seguir os resultados da teoria dos números, e não de notações. Em uma exposição intitulada *Über die Begründung der Idealtheorie*, na qual Dedekind procura defender sua abordagem para a teoria das grandezas algébricas<sup>37</sup>, em oposição à de Kronecker e Hurwitz, encontramos uma considerável passagem na qual Dedekind cita Gauss em defesa de seu método:

Primeiramente, eu lembro de uma bela passagem da *Disquisitiones Arithmeticae*, a qual já em minha juventude causou a mais profunda impressão em mim. No art. 76, Gauss relata que o teorema de Wilson foi primeiramente anunciado por Waring, e prosseguiu: *Sed neuter*

---

<sup>34</sup> Wittgenstein, 1964, p. 234 (tradução nossa).

<sup>35</sup> *Ibid*, p. 235 (tradução nossa). Um pouco adiante, no MS107 (Wittgenstein, 1999, Band ii, p. 107, tradução nossa), o filósofo escreve: “Mas o número primo também é certamente, se ele foi algum dia encontrado, completamente e inequivocamente construído! Sim, mas esta construção nós não a previmos. Ela está ali para nós, por assim dizer, individualmente e não [como] um nível da aplicação de uma lei”.

<sup>36</sup> Wittgenstein, 1999, Band ii, p. 107 (tradução nossa).

<sup>37</sup> Na verdade, Dedekind reformula sua teoria dos ideais diversas vezes, procurando satisfazer sua abordagem metodológica. Edwards afirma que a primeira versão da teoria de Dedekind era a melhor, e, “a cada vez que ele revisava sua teoria e tentava trazê-la em conformidade com seus princípios ela se tornava menos satisfatória. Isto aconteceu pois, no fundo, a abordagem de Kummer, a qual Dedekind procurava se afastar, é melhor que aquela ditada pelos preconceitos de Dedekind fundados na teoria dos conjuntos” (Edwards, 1980, p. 321).

demonstrate potuit, et ce. Waring fatetur demonstrationen eo difficiliorem videri, quod nulla notatio fingi possit, quae numerum primum exprimat. - At nostro quidem iudicio hujusmodi veritates ex notionibus potius quam ex notationibus hauriri debebant<sup>38</sup>. Nestas últimas palavras repousam, se elas forem tomadas no sentido mais geral, a expressão de um grande pensamento científico, a decisão pelo interno em contraste com o externo. Este contraste se repete também na matemática em quase todos domínios; basta pensar na teoria das funções, na definição de Riemann de funções através de propriedades características internas, das quais as formas de apresentação externas surgem com necessidade.<sup>39</sup>

É notável que, para Wittgenstein, o que é interno e o que é externo seja exatamente o oposto do que é para Dedekind. Isto é, a lei do número primo (caso estivéssemos em posse dela), não seria apenas uma característica externa, mas a própria essência do número primo, enquanto que a propriedade de “ser divisível apenas por 1 e ele próprio” é que seria, por assim dizer, uma propriedade externa, um acidente, o resultado de um “experimento aritmético”.

Se esta interpretação está correta, então encontramos em Wittgenstein, não só um construtivismo muito mais radical em relação àquilo que é comumente chamado de construtivismo<sup>40</sup>, mas também uma tensão, ainda pouco explorada pelos intérpretes, entre o que o autor entende por “problema aritmético” no capítulo XIII das *Philosophische Bemerkungen* e as observações sobre o que é “aritmeticamente interessante”, encontradas nos capítulos XVII e XVIII da mesma obra. Como se sabe, Wittgenstein defende um elo forte entre uma proposição matemática e sua prova. Isto é, a prova não é apenas um veículo para se chegar até a proposição, e após isto ser descartada, mas ela é a “proposição matemática completamente analisada”, isto é, nela está o “sentido” da proposição matemática. No entanto, se tomarmos esta afirmação “ao pé da letra”, ela elimina a existência de problemas matemáticos, pois, para estes problemas fazerem sentido, eles deveriam já ter sido provados. O filósofo, no entanto, afirma que sua explicação “não deve eliminar a existência de problemas matemáticos. Isto é, não é que uma proposição matemática só tenha sentido quando ela (ou seu contrário) tiver sido provada. (Isso significaria que seu contrário nunca teria um sentido

---

<sup>38</sup> “Mas nenhum deles foi capaz de demonstrá-lo, e Waring admite que a prova parece difícil de ser vista, já que não se pode imaginar nenhuma notação que pudesse exprimir um número primo. - Na nossa opinião, porém, tais verdades deveriam ser extraídas de noções ao invés de notações”.

<sup>39</sup> Dedekind, 1930, Band ii, pp. 54-5.

<sup>40</sup> Isto é, a recusa do uso da prova indireta para afirmar a existência de um certo objeto matemático. Tal objeto deve ser, ao invés disso, calculado, apresentado, construído.

[Weyl].)”<sup>41</sup>. Para afastar esta consequência desastrosa, Wittgenstein diz que se deve “distinguir entre uma prova e o método geral da prova. Eu não provei se  $347 \times 256 = 3820$  mas eu tenho um método geral que certamente conduz ao objetivo”<sup>42</sup>. É o método geral da prova que possibilita que se possa asserir uma proposição matemática mesmo antes dela ter sido respondida. A asserção deve, portanto, fazer referência ao sentido da proposição, não a sua verdade: “Voltamos à pergunta: em que sentido podemos asserir uma proposição matemática? Isto é: não significaria nada dizer que só posso asseri-la se ela for correta. – Não, para poder afirmá-la, tenho de fazê-lo em referência a seu sentido, não a sua verdade”<sup>43</sup>.

Wittgenstein demarca, então, um território de proposições matemáticas com sentido, sem que este sentido seja derivado de sua prova. Há apenas questões matemáticas, propriamente ditas, quando há um método geral de prova. Cada método define, para Wittgenstein, um espaço que torna possível uma busca (*suchen*) no interior deste espaço. Tal busca é conduzida sistematicamente em consonância com o método.

Ora, é exatamente esta busca que caracterizará, nos capítulos XVII e XVIII das *Philosophische Bemerkungen*, o “experimento aritmético”, que é, segundo o filósofo, “desinteressante”<sup>44</sup>. Ainda com relação ao problema dos números primos, Wittgenstein afirma: “Se eu procuro por números primos no intervalo entre  $n$  e  $(n!+1)-n$ , etc. então esta busca é sujeita a uma lei, ela segue uma lei, mas não o resultado”<sup>45</sup>. O que parece, paradoxalmente, seguir disto é que a “proposição aritmética” é “aritimeticamente desinteressante”, pois, embora seu resultado seja obtido por meio de um procedimento finito dado por uma lei, ele continua sendo o resultado de uma busca, de um experimento. Nós não vemos, no resultado, um nível da aplicação da lei.

Por fim, um outro ponto que, ao nosso ver, mereceria ser estudado com mais profundidade é a relação entre a oposição apresentação/descrição e a oposição dizer/mostrar. No *Tractatus*, formas eram tratadas por meio de conceitos formais, e o próprio sinal do objeto *mostrava* que ele era subsumido por aquele conceito<sup>46</sup>. Já nos

---

<sup>41</sup> Wittgenstein, 1964, p. 170.

<sup>42</sup> Wittgenstein, 1999, Band i, p. 159.

<sup>43</sup> Wittgenstein, 1964, p. 172.

<sup>44</sup> Cf. Wittgenstein, 1999, Band ii, p. 69: “O experimento aritmético não pode ser aritimeticamente interessante. Ele deve ser sempre o ponto acessório do ponto principal. O inessencial em algo essencial. / Na aritmética, o que não é claramente regido por leis é desinteressante.”

<sup>45</sup> Wittgenstein, 1999, Band ii, p. 70.

<sup>46</sup> Cf. Wittgenstein, 2004, p. 169 (aforismo 4.126). “Que algo caia sob um conceito formal como seu objeto não pode ser expresso por uma proposição. Isso se mostra, sim, no próprio sinal desse objeto. (O nome mostra que designa um objeto; o numeral, que designa um número, etc.)”

manuscritos de 1929/30, embora a distinção entre dizer e mostrar ainda esteja presente, é a distinção apresentação/descrição que é movida contra tentativas de *descrever* uma forma, como ocorre na teoria dos conjuntos. O termo “conceito formal” (*formalen Begriff*), de suma importância para o *Tractatus*, não é mencionado sequer uma vez, e formas passam a ser *apresentadas* por esquemas. Ainda são pouco claras as razões para esta mudança de vocabulário. No entanto, acreditamos que uma investigação detalhada a este respeito pode fornecer importantes chaves para a interpretação da evolução do pensamento de Wittgenstein.

## Referências

- CAUCHY, A. L. *Cours d'analyse algébrique*. Paris: Imprimerie Royal, 1921.
- DEDEKIND, R. *Gesammelte mathematische Werke*. Eds. R. Fricke, E. Noether and O. Ore. 3 vols. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn 1930/1932.
- D'ALEMBERT, J. R. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. In: *Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin*, v. 3, pp. 214-19, 1747.
- DIRICHLET, J. P. G. L. *G. Lejeune Dirichlet's Werke*. Eds. L. Kronecker and L. Fuchs. Berlin: Reimer, 1897.
- EDWARDS, H. M. The genesis of ideal theory. In: *Archive for History of Exact Sciences*, v. 23, pp. 321-78, 1980.
- FERREIRÓS, J. *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its role in modern Mathematics*. 2ª edição. Basel/Boston/Berlin : Birkhäuser, 2007.
- HILBERT, D. *Gesammelte Abhandlungen*. 3 vols. Berlin: Springer, 1932/35.
- KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey . In: *The College Mathematics Journal*, v. 20, n. 4, pp. 282–300, set. 1989.
- LAUGWITZ, D. “Das letzte Ziel ist immer die Darstellung einer Funktion”: Grundlagen der Analysis bei Weierstrass 1886, historische Wurzeln und Parallelen. In: *Historia Mathematica*, v. 19., pp. 341-355, 1992.
- RIEMANN, B. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, with Nachträge*. Eds. M. Noether and W. Wirtinger . New York: Dover, 1953.
- WEIERSTRASS, K. *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionslehre*. Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus d. Jahren 1870 bis 1880/86. Leipzig: Teubner, 1988.
- WITTGENSTEIN, L. *Tractatus logico-philosophicus*. São Paulo: Edusp, 2004.
- \_\_\_\_\_. *Wiener Ausgabe*. Michael Nedo (ed.). Bände 1-5. Wien/New York: Springer Verlag, 1999.
- \_\_\_\_\_. *Philosophische Bemerkungen*. Frankfurt: Suhrkamp, 1964.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. In: *Archive for History of exact sciences*. v. 16, n. 1, pp. 37-85, 1976.