UM CÁLCULO DE SEQUENTES A PARTIR DO SISTEMA TRIVALENTE E FRACAMENTE INTUICIONISTA I1

A SEQUENT CALCULUS FOR THE THREE-VALUED AND WEAKLY-INTUITIONISTIC LOGIC I1

Elias Oliveira Vieira dos Santos[1]
Luiz Henrique da Cruz Silvestrini[2]

Resumo: A lógica I1, um sistema trivalorado de caráter fracamente intuicionista, foi introduzida, via sistema axiomático (Hilbertiano) em 1995 por Sette e Carnielli. O presente artigo tem por objetivo apresentar esse sistema em um formalismo lógico em Cálculo de Sequentes, denominado de GI1, o qual se apresenta como um sistema de prova de teoremas, caracterizado como um algoritmo, sendo mais aplicável do ponto de vista computacional, por meio da dualização do sistema de tableaux analíticos TI1. Ademais, é apresentado a equivalência dedutiva entre o sistema de sequentes GI1 com o sistema Hilbertiano I1.

Palavras-chave: Lógica intuicionista. Lógica I1. Cálculo de sequentes.

Abstract: The logic I1, a three-valued system with an *weakly*-intuitionistic character, was introduced by Sette and Carnielli in 1995 via axiomatic (Hilbertian) system. The aim of this paper is to present this system in a logical formalism by sequent calculus, called GI1, which presents itself as a theorem proof system, characterized as an algorithm, being more applicable from a computational point of view, by means of the dualization of the analytical tableaux TI1. Furthermore, the deductive equivalence between the sequent system GI1 and the Hilbertian system I1 is presented.

Keywords: Intuitionistic logics. Logic I1. Sequent Calculus.

Introdução

A Teoria da Prova, que pode ter sua origem associada ao Programa de Hilbert, desenvolvido pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) no início do século XX, onde apresentou a proposta de que toda a Matemática deveria ser fundada em princípios axiomáticos, constitui-se atualmente uma importante área da Lógica. A Teoria da Prova atualmente é de extrema importância para a Teoria da Computação, a qual apresenta na subárea de Prova Automática de Teoremas, segundo Silva, Finger e Melo (2017, *apud* SANTOS, 2010), o desenvolvimento de programas de computador com o

[1] Mestrando em Matemática Aplicada e Computacional pela FCT-UNESP/Presidente Prudente. E-mail: elias.ov.santos@unesp.br. ORCID: 0000-0001-5205-640X
[2] Professor do Departamento de Matemática da FC-UNESP/Bauru; Professor do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UNESP/Marília. E-mail: lh.silvestrini@unesp.br. ORCID: 0000-0002-0064-9753

objetivo de mostrar que uma determinada sentença é uma consequência lógica de um conjunto de sentenças. Inicialmente voltados para solucionar problemas estritamente matemáticos, recentemente, os provadores são utilizados em várias áreas do conhecimento, como, por exemplo, Engenharia, Ciência da Computação e Ciência Social.

O matemático e lógico alemão Gerhard Gentzen (1909-1945) apresentou um importante marco para a Teoria da Prova, quando em 1935 motivado por produzir demonstrações meta-matemáticas, a fim de eliminar a crise pela qual a Matemática havia sido afetada devido ao surgimento das antinomias da teoria dos conjuntos, introduziu sistemas de provas alternativos aos axiomáticos, denominados Dedução Natural e Cálculo de Sequentes, os quais eram caracterizados por admitir o princípio das subfórmulas. Segundo Gentzen (1969) pretendeu-se "elaborar um formalismo que reflita tão exato quanto possível o efetivo raciocínio lógico envolvido nas provas matemáticas". Ademais, os sistemas desenvolvidos por Gentzen consistiam em demonstrar a validade de um argumento de uma maneira usualmente mais rápida, apenas trabalhando com regras em métodos finitários.

Uma das principais variantes do cálculo de sequentes, a saber, os sistemas de tableaux, surgiram das provas de completude para o cálculo de sequentes sem cortes, e foram descobertos independentemente em meados dos anos 50 pelo filósofo e lógico holandês Evert Willem Beth (1908-1964), pelo filósofo e lógico finlandês, Kaarlo Jaakko Juhani Hintikka (1929-2015), dentre outros (cf. Sundholm, 1983, p. 180). O sistema dos tableaux, também conhecido como árvores de refutação, um método de dedução indireta, ou redução ao absurdo, é utilizado para verificar a validade de um argumento. Um tableau também pode ser definido como uma árvore ordenada diádica. Ressaltamos que neste trabalho, adotamos o termo original do francês tableaux, por esta razão utilizaremos duas formas de escrita, a saber, tableau quando nos referirmos ao singular e tableaux para o uso no plural.

A lógica clássica é compreendida pelo cálculo de predicados de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais, com características a obediência aos princípios lógicos clássicos. O número de aplicações para a lógica clássica é enorme, porém, em alguns casos ela não é adequada. E para esses casos, surgiram as lógicas não clássicas, como o sistema I1, o qual abordamos em nosso trabalho.

A lógica I1, apresentada por Sette e Carnielli (1995), foi criada a partir da Semântica de Sociedades, de modo que é um tipo de construção lógica, introduzida em Carnielli e Lima-Marques (1999), a qual permite obter novas lógicas a partir da combinação dos agentes, i.e., das valorações de uma lógica já existente. Esta abordagem situa-se em uma área de estudo relativamente nova dentro da lógica, a qual estuda combinações entre diferentes sistemas lógicos. O sistema I1 é apresentado como uma lógica paracompleta, fracamente intuicionista, isto é, a lei do terceiro excluído, $A \vee \neg A$, não é válida (a partir da definição de disjunção do sistema), e trivalente, o qual apresenta além dos valores de verdade clássicos T e F, o valor de verdade F^*, que pode ser interpretado como "falsidade por falta de evidência positiva". Possui um caráter intuicionista no sentido de, por exemplo, $\neg\neg A \rightarrow A$, em sua forma atômica, não ser uma tautologia em I1 e é maximal com relação ao cálculo proposicional clássico. Abordaremos na Seção 1 mais detalhadamente como a lógica I1 é apresentada.

Santos e Silvestrini (2021), introduziram o sistema I1 em um sistema de tableaux analíticos, denotado por TI1, onde após a criação das cláusulas de fechamento e regras de expansão do sistema, é demonstrada a equivalência dedutiva entre o sistema axiomático I1 e o sistema de tableaux TI1, através de uma prova semântica, utilizando o seguinte caminho:

$$\begin{array}{ccc} \Delta \vdash_{\mathrm{I1}} \varphi & \Leftrightarrow & \Delta \vdash_{\mathrm{SI1}} \varphi \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \Delta \vdash_{\mathrm{TI1}} \varphi & \end{array}$$

onde denota-se por $\vdash_{\mathrm{I1}}$, $\vdash_{\mathrm{SI1}}$ e $\vdash_{\mathrm{TI1}}$, respetivamente, a consequência lógica (sintática) do sistema axiomático (Hilbertiano) da lógica I1, a consequência semântica de I1 e a consequência analítica do sistema de tableaux TI1, em que φ é a respectiva consequência a partir de um conjunto de fórmulas Δ, e a seta para baixo e a seta para cima do diagrama anterior, mostram as passagens originais do tralhalho de Santos e Silvestrini (2021). Tal sistema será apresentado na Seção 2.

O objetivo central deste artigo será introduzir a lógica trivalente e intuicionista I1 através do Cálculo de Sequentes. Para isso, utilizaremos o método de dualização de um sistema de sequentes a partir de um sistema de tableaux analíticos, para lógicas proposicionais polivalentes de n valores lógicos, conforme apresentado por Carnielli (1991). Desse modo, introduziremos, na Seção 3, o sistema de sequentes GI1, a partir da dualização com o sistema de tableaux TI1, estabelecendo as regras e axiomas do sistema proposto, e apresentando, de modo original, a equivalência dedutiva entre o sistema GI1 e o sistema I1, através de uma prova sintática de correção e completude.

1. A lógica intuicionista e trivalente I1

A lógica I1, apresentada por Sette e Carnielli em (1995), como uma lógica paracompleta e fracamente intuicionista, isto é, a lei do terceiro excluído, $A \vee \neg A$, não é válida a partir da definição de disjunção do sistema. Além disso, este sistema é trivalorado, o qual apresenta, além dos valores de verdade clássicos T e F, o valor de verdade F^*, que pode ser interpretado como "falsidade por falta de evidência positiva". No ambiente semântico desta lógica, somente o valor T é distinguido. No ambiente matricial, adotaremos as valorações 1, ½ e 0, para T, F^* e F, respectivamente.

O sistema I1 possui um caráter fracamente intuicionista no sentido de, por exemplo, $\neg\neg A \to A$, em sua forma atômica, não ser uma tautologia em I1 e é maximal com relação ao cálculo proposicional clássico, no sentido de que ao adicionarmos aos seus axiomas qualquer tautologia clássica que não seja uma I1-tautologia, o sistema resultante colapsa com o cálculo proposicional clássico. Neste sistema todos os axiomas do bem conhecido sistema de Heyting para a lógica intuicionista são válidos e pode ser caracterizada, axiomaticamente, da forma como veremos a seguir.

1.1 Sintaxe para a lógica I1

Introduziremos a sintaxe, segundo Carnielli e Lima-Marques (1999).

Esquemas de Axiomas

1. $A \to (B \to A)$
2. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$
3. $(\neg\neg A \to \neg B) \to \big((\neg\neg A \to B) \to \neg A\big)$
4. $\neg\neg(A \to B) \to (A \to B)$

E a *Modus Ponens* $(A,\ A \to \mathrm{B} \vdash B)$ é a única regra de inferência do sistema.

1.2 Semântica da lógica I1

O sistema I1 apresenta como conectivos primitivos $\to$ e $\neg$. Dessa forma, podemos definir a expressão matricial desse sistema da seguinte forma: I1 = $<\{1, ½, 0\}, \{\to, \neg\}, \{1\}>$, em que os valores de verdade são 1, ½, 0, dos quais apenas o valor 1 é distinguido.

Assim, seguem as interpretações, em matrizes desses operadores básicos da I1. De modo usual, o operador binário $A \rightarrow B$ (assim como os operadores $A \wedge B$ e $A \vee B$) adota A como um elemento da primeira coluna à esquerda e B como um elemento da primeira linha do topo da tabela a seguir. No sistema I1, segundo Carnielli e Lima-Marques (1999), é possível definir uma negação fraca $\tilde{\neg} A =_{def} A \rightarrow \neg A$, a qual apresenta todas as propriedades da negação clássica. E pode ser definida a conjunção A∧B e a disjunção A∨B para o sistema I1 como se segue:

$$A \wedge B =_{def} \neg (A \rightarrow \tilde{\neg} B); \quad A \vee B =_{def} \neg (\tilde{\neg} A \rightarrow B).$$

	1	½	0
¬	0	0	1

→	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	1
0	1	1	1

	1	½	0
$\tilde{\neg}$	0	1	1

∧	1	½	0
1	1	0	0
½	0	0	0
0	0	0	0

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	0	0
0	1	0	0

Para esta semântica, é demonstrada a adequação, i.e., os metateoremas de correção e completude, acerca do sistema axiomático I1, apresentada por Carnielli e Lima-Marques (1999).

2. A lógica I1 em um sistema de tableaux

Nesta seção, abordaremos o método dos tableaux analíticos para a lógica I1, denotado por TI1, apresentando as regras de expansão e cláusulas de fechamento.

O sistema TI1, introduzido pelos autores em Santos e Silvestrini (2021), foi apresentado como um formalismo lógico alternativo ao método axiomático (Hilbertiano) seguindo a formulação proposta por Smullyan (1968).

As regras de expansão para TI1 são classificadas em quatro tipos, de acordo com as suas ramificações, o que difere do tableau clássico, em que as fórmulas podem gerar no máximo dois ramos distintos. Deste modo, temos quatro tipos de fórmulas em TI1:

- Fórmulas do tipo α: são fórmulas em que suas consequências são diretas, i.e. permanecem no mesmo ramo, não havendo ramificações.
- Fórmulas do tipo β: neste caso, as consequências bifurcam em dois ramos, gerando dois ramos distintos.

- Fórmulas do tipo γ : são fórmulas com consequências indiretas e geram ramificações com três ramos distintos.
- Fórmulas do tipo δ : são fórmulas com consequências indiretas e geram ramificações com quatros ramos distintos.

2.1 Cláusulas de Fechamento TI1

Definição 2.1. (Ramo fechado em TI1). Um ramo no sistema TI1 é fechado quando uma mesma fórmula λ possui valores distintos neste mesmo ramo, ou seja, quando uma das três seguintes situações ocorrer:

i. 1 λ e ½ λ;

ii. 1 λ e 0 λ (cláusula clássica);

iii. ½ λ e 0 λ.

Ou ainda quando ocorrer o seguinte caso:

iv. encontramos uma fórmula α, sendo α uma proposição composta formada pelos conectivos ¬, →, ∧ ou ∨, com valor ½.

Observação 2.1. Simbolizamos o ramo fechado colocando o símbolo '×' no final do ramo, seguido das informações (*a*, *b*) para os casos (i), (ii) e (iii), onde *a* e *b* são as linhas que ocorreram os valores distintos para o fechamento do tableau. Ou ainda, o símbolo '×' seguido de qual conectivo com valor ½ foi o responsável pelo fechamento do ramo, pois temos [½ ¬], [½ →], [½ ∧] e [½ ∨] como Cláusulas de Fechamento pelo caso (iv).

2.2 Regras de Expansão TI1

Uma vez definidas as cláusulas de fechamento do sistema TI1, os autores, em Santos e Silvestrini (2021) apresentam as regras de expansão para esta lógica, as quais estão classificadas de acordo com seus respectivos operadores:

Condicional

$$[T1]\ \frac{S,\ 1(A \to B)}{S,\ 0(A)\ \mid\ S,\ 1/2\ (A)\ \mid\ S,\ 1(B)};\qquad [T2]\ \frac{S,\ 0(A \to B)}{\begin{array}{c} S,\ 1(A)\ \mid\ S,\ 1(A) \\ S,\ 1/2\ (B)\ \mid\ S,\ 0(B) \end{array}};$$

Negação

$$[T3]\ \frac{S,\ 1(\neg A)}{S,\ 0(A)};\qquad [T4]\ \frac{S,\ 0(\neg A)}{S,\ 1(A)\ \mid\ S,\ 1/2\,(A)};$$

Conjunção

$$[T5]\ \frac{S,\ 1(A \wedge B)}{\begin{array}{c}S,\ 1(A)\\ S,\ 1(B)\end{array}};\qquad [T6]\ \frac{S,\ 0(A \wedge B)}{S,\ 0(A)\ \mid\ S,\ 1/2\,(A)\ \mid\ S,\ 0(B)\ \mid\ S,\ 1/2\,(B)};$$

Disjunção

$$[T7]\ \frac{S,\ 1(A \vee B)}{S,\ 1(A)\ \mid\ S,\ 1(B)};\qquad [T8]\ \frac{S,\ 0(A \vee B)}{\begin{array}{c}S,\ 0(A)\ \mid\ S,\ 1/2\,(A)\ \mid\ S,\ 0(A)\ \mid\ S,\ 1/2\,(A)\\ S,\ 1/2(B)\ \mid\ S,\ 1/2\,(B)\ \mid\ S,\ 0(B)\ \mid\ S,\ 0\,(B)\end{array}}.$$

Como não existe a valoração ½ para nenhum operador nas matrizes lógica I1, definidas por Carnielli e Lima-Marques (1999), então não há regras de expansão para as mesmas, uma vez que quando ocorrer esta situação no tableau, fechamos imediatamente o ramo. Por isso definimos tal situação como cláusula de fechamento, conforme Definição 2.1, item (iv).

O sistema TI1 é demonstrado ser adequado, i.e., os metateoremas de correção e completude, acerca do sistema axiomático I1, são apresentados em Santos e Silvestrini (2021).

3. A lógica I1 em um sistema de sequentes

Nesta seção consta o escopo de nosso trabalho, no qual apresentaremos um formalismo lógico em sistema de sequentes para a lógica trivalorada I1, exposta na Seção 1 em formato axiomático (Hilbertiano), tal como introduzida por Sette e Carnielli (1995). Ademais, Carnielli (1991) defende que por vezes é mais interessante trabalhar com sistemas de sequentes ao invés de formulações em tableau.

Dessa maneira, apresentaremos, de modo original, as regras para esse sistema de sequentes, o qual denotaremos por GI1, as quais foram desenvolvidas a partir do processo de dualização de um sistema de sequentes a partir de um sistema de tableaux, apresentado por Carnielli (1991), para lógicas multivaloradas, contudo, agora adaptado com os resultados para a lógica I1 trivalorada.

3.1 O sistema GI1

Definição 3.1. (Sequente). Sejam Θ_1, $\Theta_{1/2}$, Θ_0 conjuntos de sentenças da lógica I1, onde os índices {0, ½, 1} representam os valores lógicos presentes no sistema lógico, sendo {1} o único valor distinguido e {0, ½} os valores não distinguidos. Um sequente é um objeto lógico apresentando a seguinte forma de derivação:

$$\Theta_1 \ \Rightarrow \ \Theta_{1/2} \ \vee \ \Theta_0$$

O símbolo $\vee$ é utilizado como dispositivo mnemônico, o qual pode ser omitido.

Usaremos Γ para representar Θ_1 , contendo as fórmulas com valoração 1 (distinguido), Δ para representar $\Theta_{1/2}$, contendo as fórmulas com valoração ½, e Σ para representar Θ_0, contendo as fórmulas com valoração 0.

Trabalharemos então, no sistema GI1, com o sequente da seguinte forma:

$$\Gamma \Rightarrow \ \Delta, \Sigma$$

Definição 3.2. (Sequente Válido). Um sequente é válido se, para cada valoração *v* de I1, temos válido: $(\forall\, x \in \Theta_1)\,(v(A) = 1)$, *implica em* $\left(\exists\, A \in \Theta_{1/2}\right)(v(A) \neq 1/2) \ \wedge \ (\exists\, A \in \Theta_0)\,(v(A) \neq 0)$.

Definição 3.3. (Suporte do Sequente). Dado um sequente S: $\Theta_1 \ \Rightarrow \ \Theta_{1/2} \ \vee \ \Theta_0$, definimos o Suporte de S, denotado por Supp (S), como o seguinte conjunto:

$$\text{Supp}\ (S) = U_{0 \leq i \leq 1}\{a_i(A) \colon A \in \Delta_i\}$$

ou ainda: Supp $(S) \ = \ \{a_1(A) \colon A \in \Theta_1\} \ \cup \ \left\{a_{1/2}(A) \colon A \in \Theta_{1/2}\right\} \ \cup \ \{a_0(A) \colon A \in \Theta_0\}$.

Se Φ é um conjunto de sentenças marcadas, dizemos que Φ é satisfatível se existe uma valoração v em I1 tal que $(v(A) = i)$ se, e somente se $a_i(A) \colon A \in \Phi$. A partir disso, Carnielli (1991) demonstra o seguinte resultado:

Lema 3.1. Um sequente S: $\Theta_1 \ \Rightarrow \ \Theta_{1/2} \ \vee \ \Theta_0$, é válido se, e somente se, Supp (S) não é satisfatível.

Conforme apresentado por Carnielli (1991), em um sistema de sequentes para lógicas polivalentes, podemos ter regras e axiomas, dos seguintes tipos:

- Axiomas de sequentes próprios.
- Axiomas de sequentes não próprios.
- Regras de sequentes.

Os *axiomas de sequentes próprios* para o sistema GI1 são dados por $\binom{3}{2}$ sequentes, ou seja, teremos três *axiomas de sequentes próprios*, obtidos adicionando uma metavariável A, para representar sentenças, a todos os pares Θ_i e Θ_j, com $i \neq j$, do conjunto $\{\Theta_1, \Theta_{1/2}, \Theta_0\}$ respectivamente representado por $\{\Gamma,\ \Delta,\ \Sigma\}$. Denotaremos a união de A em cada conjunto Θ_i por (Θ_i, A). Utilizamos parênteses como dispositivos mnemônicos, os quais poderiam ser omitidos, para evidenciar em qual conjunto Θ_i adicionaremos a metavariável A. Temos então, *axiomas de sequentes próprios*, da seguinte forma:

$$[A1]\ \ (\Gamma, A) \Rightarrow (\Delta, A), \Sigma; \quad [A2]\ \ (\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A); \quad [A3]\ \ \Gamma \Rightarrow (\Delta, A), (\Sigma, A).$$

Observando os sequentes obtidos, podemos facilmente verificar pares de fórmulas idênticas A, que garantem que os sequentes sejam válidos, de acordo com Carnielli (1991).

Verifiquemos os *axiomas de sequentes não próprios* para o sistema GI1, visto que temos somente o valor ½ não presente nas tabelas semânticas dos conectivos do sistema I1 (apresentadas na Seção 1), e o valor ½ é um valor não distinguido.

Ou seja, os axiomas de sequentes não próprios traduzirão as cláusulas de fechamento de tableaux (apresentadas na Seção 2, Definição 2.1 (iv)), pois são os casos em que certos valores lógicos nunca ocorrem para um conectivo. Desse modo, teremos axiomas da seguinte forma: $\Theta_1\ \Rightarrow\ \Theta_{1/2} \vee \Theta_0$ unindo $K(A_1, \ldots, A_m)$ com $\Theta_{1/2}$ (ou seja, com Δ), sendo $K(A_1, \ldots, A_m)$ a notação utilizada para o conectivo K envolvendo as fórmulas A_1 a A_m.

Como o sistema de tableaux TI1 apresenta regras com os conectivos $\{\rightarrow, \neg, \wedge, \vee\}$ e em todos estes não temos o valor ½ nas tabelas, teremos os seguintes *axiomas de sequentes não próprios* para o sistema GI1:

$$[A4]\ \Gamma \Rightarrow (\Delta, \neg A), \Sigma;\ [A5]\ \Gamma \Rightarrow (\Delta, A \rightarrow B), \Sigma;\ [A6]\ \Gamma \Rightarrow (\Delta, A \wedge B), \Sigma;\ [A7]\ \Gamma \Rightarrow (\Delta, A \vee B), \Sigma.$$

Por fim, obteremos as regras de sequentes do sistema GI1 diretamente das regras de tableaux T1, T2, ..., T8 (apresentadas na Seção 2), as quais denotaremos, respectivamente, por S1, S2, ..., S8.

$$[S1]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A); \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta, A), \Sigma; \quad (\Gamma, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma}{(\Gamma,\ A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta, \Sigma};$$

$$[S2]\ \frac{(\Gamma, A) \Rightarrow (\Delta, B), \Sigma; \quad (\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, (\Sigma, B)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma,\ A \rightarrow B)};$$

$$[S3]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A)}{(\Gamma, \neg A) \Rightarrow \Delta, \Sigma};$$

$$[S4]\ \frac{(\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, \Sigma; \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta, A), \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, \neg A)};$$

$$[S5]\ \frac{(\Gamma, \mathrm{A}, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma}{(\Gamma,\ A \wedge B) \Rightarrow \Delta, \Sigma};$$

$$[S6]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A); \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta, A), \Sigma; \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, B); \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta, B), \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma,\ A \wedge B)};$$

$$[S7]\ \frac{(\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, \Sigma; \quad (\Gamma, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma}{(\Gamma,\ A \vee B) \Rightarrow \Delta, \Sigma};$$

$$[S8]\ \frac{\Gamma \Rightarrow (\Delta, B), (\Sigma, A); \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta, \mathrm{A}, B), \Sigma; \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, \mathrm{A}, B); \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta, A), (\Sigma, B)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma,\ A \vee B),}.$$

Temos ainda, a regra de corte no sistema GI1:

$$[Corte]\ \frac{(\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, \Sigma; \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta, A), \Sigma; \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A);}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Tal regra do corte é admissível no sistema, mas desnecessária, pelo teorema apresentado a seguir. A regra do corte para sistemas de sequentes é equivalente à regra do corte para sistemas de tableaux, pois as demonstrações podem ser traduzidas passo a passo para o sistema de sequentes. Omitiremos a demonstração da eliminação de cortes para sistemas de tableaux, por questão de espaço, mas esta pode ser encontrada em Carnielli (1991, p. 63).

Teorema 3.1. (Eliminação do corte para sistemas de sequentes):
Qualquer uso da regra do corte no sistema de sequentes é desnecessário.

3.2 Exemplo de dedução no sistema GI1

Ressaltamos que quando os conjuntos Γ, Δ, Σ do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma$ forem vazios, representaremos pelo símbolo $\emptyset$, para que possamos identificar quais fórmulas presentes estão unidas aos conjuntos Θ_1, $\Theta_{1/2}$ e Θ_0 qual deles é vazio.

Apresentaremos como exemplo de demonstração pelo sistema GI1 a seguinte fórmula:

Exemplo 3.1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

$$\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow (B \rightarrow A), \emptyset}\,[A5] \qquad \dfrac{\dfrac{}{(A,B) \Rightarrow A, \emptyset}\,[A1] \qquad \dfrac{}{(A,B) \Rightarrow \emptyset, A}\,[A2]}{A \Rightarrow \emptyset, (B \rightarrow A)}\,[S2]}{\Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A)}\,[S2]$$

3.3 Equivalência dedutiva entre o sistema I1 e o cálculo de sequentes GI1

Apresentaremos nessa seção a equivalência dedutiva entre o sistema I1, apresentado por Sette e Carnielli (1995) em sistema axiomático (Hilbertiano), com o sistema de sequentes GI1 introduzido nessa seção, através do Teorema 3.2, bem como do Lema 3.2 e Lema 3.3, onde utilizaremos a seguinte notação:

$\Delta \vdash_{\mathrm{I1}} \varphi$: no sistema axiomático (Hilbertiano) da lógica I1, φ uma consequência lógica (sintática) de um conjunto de fórmulas Δ.

$\Delta \vdash_{\mathrm{TI1}} \varphi$: no sistema de tableaux TI1, a fórmula φ é consequência analítica de um conjunto de fórmulas Δ.

$\Delta \vdash_{\mathrm{GI1}} \varphi$: no sistema de sequentes GI1, a fórmula φ é consequência por sequentes de um conjunto de fórmulas Δ.

Lema 3.2. $\Delta \vdash_{I1} \varphi \;\Rightarrow\; \Delta \vdash_{GI1} \varphi$

Para mostrar que toda prova válida no sistema I1 possui uma respectiva prova válida no sistema de sequente GI1, demonstraremos a seguir os quatro axiomas da lógica I1 e a regra *Modus Ponens*, a partir da prova pelo sistema de sequentes GI1. Ressaltamos que algumas demonstrações serão apresentadas em partes, por conta do espaço. Usaremos os símbolos $\#_1, \#_2, \cdots, \#_7$ para indicar a continuidade do ramo em outro local a fim de tornar a leitura possível.

Axioma 1. $\vdash_{\mathrm{GI1}} (A \to (B \to A))$

$$\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow (B \to A), \varnothing}\,[A5] \quad \dfrac{\dfrac{}{(A, B) \Rightarrow A, \varnothing}\,[A1] \quad \dfrac{}{(A, B) \Rightarrow \varnothing, A}\,[A2]}{A \Rightarrow \varnothing, (B \to A)}\,[S2]}{\varnothing \Rightarrow \varnothing, (A \to (B \to A))}\,[S2]$$

Axioma 2. $\vdash_{\mathrm{GI1}} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{}{(A, B) \Rightarrow \varnothing, (C, B)}\,[A2] \quad \dfrac{}{(A, B) \Rightarrow B, C}\,[A1] \quad \dfrac{}{(A, B, C) \Rightarrow \varnothing, C}\,[A2]}{\dfrac{(A, (B \to C), B) \Rightarrow \varnothing, C}{\#_1}}\,[S1]$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(A, (B \to C)) \Rightarrow \varnothing, (C, A)}\,[A2] \quad \dfrac{}{(A, (B \to C)) \Rightarrow A, C}\,[A1] \quad \#_1}{\dfrac{(A, (A \to B), (B \to C) \Rightarrow \varnothing, C}{\#_2}}\,[S1]$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(A, (A \to B)) \Rightarrow \varnothing, (C, A)}\,[A2] \quad \dfrac{}{(A, (A \to B)) \Rightarrow A, C}\,[A1] \quad \#_2}{\dfrac{((A \to (B \to C), (A \to B), A) \Rightarrow \varnothing, C}{\#_3}}\,[S1]$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(A, B, (A \to B)) \Rightarrow C, B}\,[A2] \quad \dfrac{}{(A, B, (A \to B)) \Rightarrow (C, B), \varnothing}\,[A1] \quad \dfrac{}{(A, B, (A \to B), C) \Rightarrow C, \varnothing}\,[A1]}{\dfrac{(A, (A \to B), (B \to C), B) \Rightarrow C, \varnothing}{\#_4}}\,[S1]$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(A, (B \to C)) \Rightarrow C, A}\,[A2] \quad \dfrac{}{(A, (B \to C)) \Rightarrow (C, A), \varnothing}\,[A1] \quad \#_4}{\dfrac{(A, (A \to B), (B \to C)) \Rightarrow C, \varnothing}{\#_5}}\,[S1]$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(A, (A \to B)) \Rightarrow C, A}\,[A2] \quad \dfrac{}{(A, (A \to B)) \Rightarrow (C, A), \varnothing}\,[A1] \quad \#_5}{\dfrac{((A \to (B \to C), (A \to B), A) \Rightarrow C, \varnothing}{\#_6}}\,[S1]$$

$$\dfrac{\dfrac{}{((A \to (B \to C)), (A \to B)) \Rightarrow (A \to C), \varnothing}\,[A5] \quad \dfrac{\#_6 \qquad \#_3}{((A \to (B \to C)), (A \to B)) \Rightarrow \varnothing, (A \to C)}\,[S2]}{\dfrac{(A \to (B \to C)) \Rightarrow \varnothing, ((A \to B) \to (A \to C))}{\#_7}}\,[S2]$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(A \to (B \to C)) \Rightarrow ((A \to B) \to (A \to C)), \varnothing}\,[A5] \quad \#_7}{\varnothing \Rightarrow \varnothing, ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))}\,[S2]$$

Axioma 3. $\vdash_{\mathrm{GI1}} (\neg\neg A \to \neg B) \to ((\neg\neg A \to B) \to \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \Rightarrow A, (A, A)}\,[A3]}{\neg A \Rightarrow A, A}\,[S3] \quad \dfrac{}{\varnothing \Rightarrow (A, \neg A), A}\,[A4]}{\varnothing \Rightarrow A, (\neg\neg A, A)}\,[S4]}{\neg A \Rightarrow A, \neg\neg A}\,[S3] \quad \dfrac{}{\varnothing \Rightarrow (A, \neg A), \neg\neg A}\,[A4]}{\varnothing \Rightarrow A, (\neg\neg A, \neg\neg A)}\,[S4]$$

$$\#_1$$

$$\dfrac{\#_1 \quad \dfrac{}{\varnothing \Rightarrow (A, \neg A), \neg\neg A}\,[A4] \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \Rightarrow A, (B, A)}\,[A3]}{\neg A \Rightarrow A, B}\,[S3] \quad \dfrac{}{\varnothing \Rightarrow (A, \neg A), B}\,[A4]}{\varnothing \Rightarrow A, (\neg\neg A, B)}\,[S4]}{\neg B \Rightarrow A, \neg\neg A}\,[S3]}{(\neg\neg A \to \neg B) \Rightarrow A, \neg\neg A}\,[S1]$$

$$\#_2$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \Rightarrow A, A}\,[A3]}{(B, \neg A) \Rightarrow A, \varnothing}\,[S3] \quad \dfrac{}{B \Rightarrow (A, \neg A), \varnothing}\,[A4]}{B \Rightarrow A, \neg\neg A}\,[S4] \quad \dfrac{}{B \Rightarrow (A, \neg\neg A), \varnothing}\,[A4] \quad \dfrac{\dfrac{}{B \Rightarrow A, B}\,[A2]}{(B, \neg B) \Rightarrow A, \varnothing}\,[S3]}{((\neg\neg A \to \neg B), B) \Rightarrow A, \varnothing}\,[S1]$$

$$\#_3$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A, B) \Rightarrow \varnothing, A}\,[A2]}{(A, B, \neg A) \Rightarrow \varnothing, \varnothing}\,[S3] \quad \dfrac{}{(A, B) \Rightarrow \neg A, \varnothing}\,[A4]}{(A, B) \Rightarrow \varnothing, \neg\neg A}\,[S4] \quad \dfrac{}{(A, B) \Rightarrow \neg\neg A, \varnothing}\,[A4] \quad \dfrac{\dfrac{}{(A, B) \Rightarrow \varnothing, B}\,[A2]}{(A, B, \neg B) \Rightarrow \varnothing, \varnothing}\,[S3]}{(A, (\neg\neg A \to \neg B), B) \Rightarrow \varnothing, \varnothing}\,[S1]$$

$$\#_4$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A, (\neg\neg A \to \neg B)) \Rightarrow \varnothing, A}\,[A2]}{(A, (\neg\neg A \to \neg B), \neg A) \Rightarrow \varnothing, \varnothing}\,[S3] \quad \dfrac{}{(A, (\neg\neg A \to \neg B)) \Rightarrow \neg A, \varnothing}\,[A4]}{(A, (\neg\neg A \to \neg B)) \Rightarrow \varnothing, \neg\neg A}\,[S4] \quad \dfrac{}{(A, (\neg\neg A \to \neg B)) \Rightarrow \neg\neg A, \varnothing}\,[A4] \quad \#_4}{((\neg\neg A \to \neg B), (\neg\neg A \to B), A) \Rightarrow \varnothing, \varnothing}\,[S1]$$

$$\#_5$$

$$\dfrac{\#_5 \quad \dfrac{\#_2 \quad \dfrac{}{(\neg\neg A \to \neg B)) \Rightarrow (A, \neg\neg A), \varnothing}\,[A4] \quad \#_3}{((\neg\neg A \to \neg B), (\neg\neg A \to B)) \Rightarrow A, \varnothing}\,[S1]}{((\neg\neg A \to \neg B), (\neg\neg A \to B)) \Rightarrow \varnothing, \neg\, A}\,[S4]$$

$$\#_6$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(\neg\neg A \to \neg B) \Rightarrow ((\neg\neg A \to B) \to \neg\, A), \varnothing}\,[A5] \quad \dfrac{\dfrac{}{((\neg\neg A \to \neg B), (\neg\neg A \to B)) \Rightarrow \neg\, A, \varnothing}\,[A4] \quad \#_6}{(\neg\neg A \to \neg B) \Rightarrow \varnothing, ((\neg\neg A \to B) \to \neg\, A)}\,[S2]}{\varnothing \Rightarrow \varnothing, ((\neg\neg A \to \neg B) \to ((\neg\neg A \to B) \to \neg\, A))}\,[S2]$$

Axioma 4. $\vdash_{\mathrm{GI1}} \neg\neg(A \to B) \ \to \ (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \Rightarrow B, A}\,{\scriptstyle [A2]} \quad \overline{A \Rightarrow (B, A), \varnothing}\,{\scriptstyle [A1]} \quad \overline{(A, B) \Rightarrow B, \varnothing}\,{\scriptstyle [A1]}}{(A, (A \to B)) \Rightarrow B, \varnothing}\,{\scriptstyle [S1]} \quad \overline{A \Rightarrow (B, (A \to B)), \varnothing}\,{\scriptstyle [A5]}}{A \Rightarrow B, \neg(A \to B)}\,{\scriptstyle [S4]}}{(\neg\neg(A \to B), A) \Rightarrow B, \varnothing}\,{\scriptstyle [S3]}$$
$$\#_1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \Rightarrow \varnothing, (B, A)}\,{\scriptstyle [A2]} \quad \overline{A \Rightarrow A, B}\,{\scriptstyle [A1]} \quad \overline{(A, B) \Rightarrow \varnothing, B}\,{\scriptstyle [A1]}}{(A, (A \to B)) \Rightarrow \varnothing, B}\,{\scriptstyle [S1]} \quad \overline{A \Rightarrow (A \to B), B}\,{\scriptstyle [A5]}}{A \Rightarrow \varnothing, (B, \neg(A \to B))}\,{\scriptstyle [S4]}}{(\neg\neg(A \to B), A) \Rightarrow \varnothing, B}\,{\scriptstyle [S3]}$$
$$\#_2$$

$$\dfrac{\overline{\neg\neg(A \to B) \Rightarrow (A \to B), \varnothing}\,{\scriptstyle [A5]} \quad \dfrac{\#_1 \qquad \#_2}{\neg\neg(A \to B) \Rightarrow \varnothing, (A \to B)}\,{\scriptstyle [S2]}}{\varnothing \Rightarrow \varnothing, (\neg\neg(A \to B) \to (A \to B))}\,{\scriptstyle [S2]}$$

Regra *Modus Ponens*. $A, \ (A \to \mathrm{B}) \ \vdash_{\mathrm{GI1}} B$

$$\dfrac{\overline{A \Rightarrow \varnothing, (B, A)}\,{\scriptstyle [A2]} \quad \overline{A \Rightarrow A, B}\,{\scriptstyle [A1]} \quad \overline{(A, B) \Rightarrow \varnothing, B}\,{\scriptstyle [A1]}}{(A, (A \to B)) \Rightarrow \varnothing, B}\,{\scriptstyle [S1]}$$

■

Lema 3.3. $\Delta \vdash_{GI1} \varphi \ \ \Rightarrow \ \Delta \vdash_{TI1} \varphi$

Para mostrar que toda prova válida no sistema GI1 possui uma respectiva prova válida no sistema de sequente TI1, demonstraremos a seguir os axiomas e regras do sistema de sequentes GI1, a partir da prova pelo sistema de tableaux TI1.

Nos axiomas $[Ai]$, com $i = \{1,2, \ldots, 7\}$, para o sequente na forma $\Gamma \Rightarrow \ \Delta, \Sigma$ existe uma prova Π onde pelo sistema de tableaux será demonstrado que

$$(A_1 \wedge \ A_2 \wedge \ \ldots \ \wedge \ A_n) \ \vdash \ (B_1 \vee \ B_2 \vee \ldots \vee B_m) \ \vee \ (C_1 \vee \ C_2 \vee \ldots \vee C_p)$$

é válido, onde temos que $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\Delta = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ e $\Sigma = \{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$ são multiconjuntos finitos de fórmulas.

Mostremos para $[A1]$, que o sequente gera um tableau fechado.

$[A1]$ $(\Gamma, A) \Rightarrow (\Delta, A), \Sigma$

1	$1\ \Gamma$
2	$1\ A$
3	$\frac{1}{2}\ ((\Delta \vee A) \vee \Sigma)$
	$\times$
	$[\frac{1}{2}\vee]$ em 3

1								$1\ \Gamma$									
2								$1\ A$									
3								$0\ ((\Delta \vee A) \vee \Sigma)$									
4	$0\ (\Delta \vee A)$					$\frac{1}{2}\ (\Delta \vee A)$			$0\ (\Delta \vee A)$						$\frac{1}{2}\ (\Delta \vee A)$		$[T8]$ em 3
5	$\frac{1}{2}\ \Sigma$					$\frac{1}{2}\ \Sigma$			$0\ \Sigma$						$0\ \Sigma$		$[T8]$ em 3
6	0Δ	$\frac{1}{2}\Delta$	0Δ	$\frac{1}{2}\Delta$		$\times$ $[\frac{1}{2}\vee]$ em 4			0Δ	$\frac{1}{2}\Delta$	0Δ	$\frac{1}{2}\Delta$			$\times$ $[\frac{1}{2}\vee]$ em 4		$[T8]$ em 4
7	$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{2}A$	$0A$	$0A$					$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{2}A$	$0A$	$0A$					$[T8]$ em 4
	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					
	(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)					(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)					

Mostremos para $[A2]$, que o sequente gera um tableau fechado.

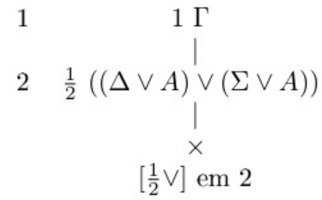
$[A2]$ $(\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A)$

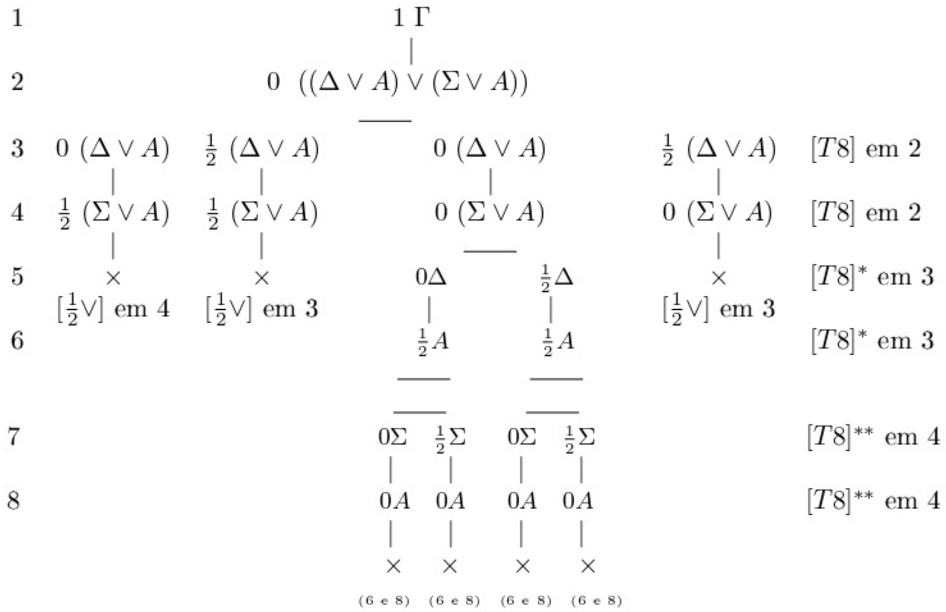
1	$1\ \Gamma$
2	$1\ A$
3	$\frac{1}{2}\ (\Delta \vee (\Sigma \vee A))$
	$\times$
	$[\frac{1}{2}\vee]$ em 3

1			$1\ \Gamma$								
2			$1\ A$								
3			$0\ (\Delta \vee (\Sigma \vee A))$								
4	$0\ \Delta$	$\frac{1}{2}\ \Delta$	$0\ \Delta$				$\frac{1}{2}\ \Delta$				$[T8]$ em 3
5	$\frac{1}{2}\ (\Sigma \vee A)$	$\frac{1}{2}\ (\Sigma \vee A)$	$0\ (\Sigma \vee A)$				$0\ (\Sigma \vee A)$				$[T8]$ em 3
6	$\times$ $[\frac{1}{2}\vee]$ em 5	$\times$ $[\frac{1}{2}\vee]$ em 5	0Σ	$\frac{1}{2}\Sigma$	0Σ	$\frac{1}{2}\Sigma$	0Σ	$\frac{1}{2}\Sigma$	0Σ	$\frac{1}{2}\Sigma$	$[T8]$ em 5
7			$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{2}A$	$0A$	$0A$	$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{2}A$	$0A$	$0A$	$[T8]$ em 5
			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
			(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)	(2 e 7)	

Mostremos para $[A3]$, que o sequente gera um tableau fechado.

$[A3]\ \Gamma \Rightarrow (\Delta, A), (\Sigma, A)$





* Observemos que a regra $[T8]$ gera ramificações com 4 ramos distintos. Porém, como na linha 5 e 6 da prova apresentada a regra está sendo aplicada na fórmula $(\Delta \vee A)$, localizada na linha 3, i.e., temos a fórmula $A \cup \Delta$, onde temos que $v(A) = 1/2$, para a fórmula A unida a Δ; dessa forma, na prova acima, denotamos a regra como $[T8]^*$ e consideramos somente dois ramos, onde temos $v(A) = 1/2$, desprezando os outros dois ramos onde $v(A) \neq 1/2$.

** De forma análoga à observação anterior, temos na linha 7 e 8 uma regra sendo aplicada na fórmula $(\Sigma \vee A)$, localizada na linha 4, i.e., temos a fórmula $A \cup \Sigma$, onde temos que $v(A) = 0$, para a fórmula A unida a Σ; dessa forma, na prova acima, denotamos a regra como $[T8]^{**}$ e consideramos somente dois ramos, onde temos $v(A) = 0$, desprezando os outros dois ramos onde $v(A) \neq 0$.

Uma alternativa para esses ajustes, seria adaptarmos as cláusulas de fechamento dos tableaux para esse caso em que já temos a valoração de certa fórmula por estar unida ao Δ ou ao Σ. Todavia, por uma questão de espaço, optou-se por adotar esta particularidade de tais regras, uma vez que pela forma apresentada, as regras com * desprezam os ramos em que há uma valoração/função atribuindo valores distintos daqueles que a própria premissa do sequente apresente.

Mostremos para $[A4]$, que o sequente gera um tableau fechado.

Observemos que uma prova em tableau apresenta todos os ramos, com todas as valorações possíveis das fórmulas em questão. Dado que na prova apresentada a seguir, a fórmula $(\neg A)$ está unida à Δ, temos que quando $(\neg A) \cup \Delta$ teremos $v(\neg A) = 1/2$. Dessa forma, podemos desconsiderar os ramos da regra $[T8]$ em que $v(\neg A) \neq 1/2$, denotando tal regra por $[T8]^{\star}$. O mesmo acontecerá nos axiomas $[A5]$, $[A6]$ e $[A7]$ apresentados a seguir, para as fórmulas $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$ e $(A \vee B)$ com valoração ½.

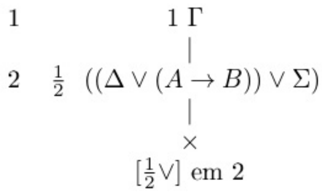
$[A4]$ $\Gamma \Rightarrow (\Delta, \neg A), \Sigma$

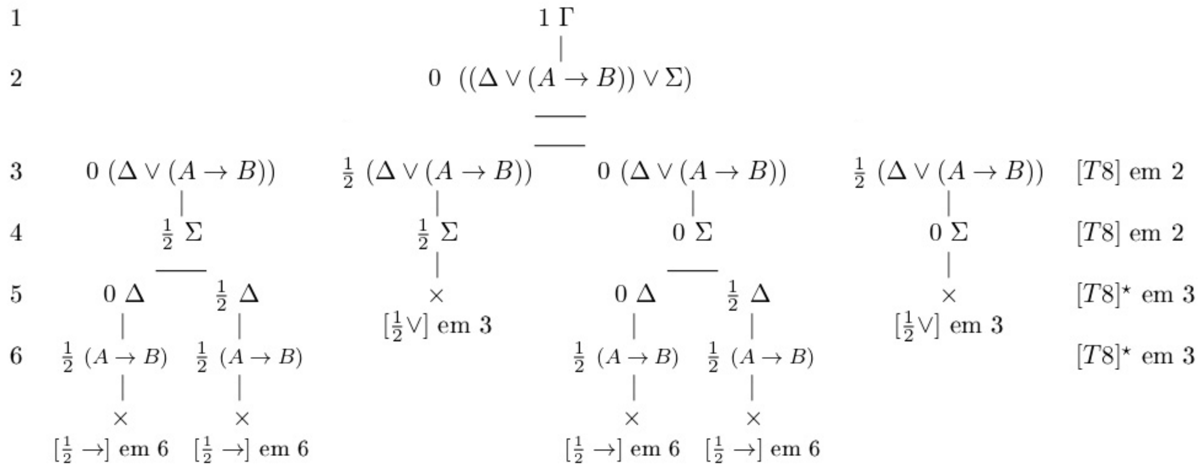
$$
\begin{array}{ll}
1 & 1\ \Gamma \\
 & | \\
2 & \tfrac{1}{2}\ ((\Delta \vee (\neg A)) \vee \Sigma) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
1 & & & & 1\ \Gamma & & & \\
 & & & & | & & & \\
2 & & & & 0\ ((\Delta \vee (\neg A)) \vee \Sigma) & & & \\
3 & 0\ (\Delta \vee (\neg A)) & & \tfrac{1}{2}\ (\Delta \vee (\neg A)) & 0\ (\Delta \vee (\neg A)) & & \tfrac{1}{2}\ (\Delta \vee (\neg A)) & [T8]\ \text{em } 2 \\
 & | & & | & | & & | & \\
4 & \tfrac{1}{2}\ \Sigma & & \tfrac{1}{2}\ \Sigma & 0\ \Sigma & & 0\ \Sigma & [T8]\ \text{em } 2 \\
 & & & | & & & | & \\
5 & 0\ \Delta & \tfrac{1}{2}\ \Delta & \times & 0\ \Delta & \tfrac{1}{2}\ \Delta & \times & [T8]^{\star}\ \text{em } 3 \\
 & | & | & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 3 & | & | & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 3 & \\
6 & \tfrac{1}{2}(\neg A) & \tfrac{1}{2}(\neg A) & & \tfrac{1}{2}(\neg A) & \tfrac{1}{2}(\neg A) & & [T8]^{\star}\ \text{em } 3 \\
 & | & | & & | & | & & \\
 & \times & \times & & \times & \times & & \\
 & [\tfrac{1}{2}\neg]\ \text{em } 6 & [\tfrac{1}{2}\neg]\ \text{em } 6 & & [\tfrac{1}{2}\neg]\ \text{em } 6 & [\tfrac{1}{2}\neg]\ \text{em } 6 & &
\end{array}
$$

Mostremos para $[A5]$, que o sequente gera um tableau fechado.

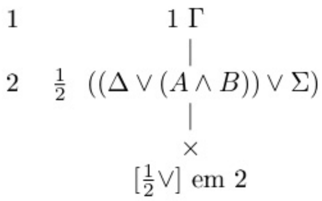
$[A5]$ $\Gamma \Rightarrow \big(\Delta, (A \rightarrow B)\big), \Sigma$

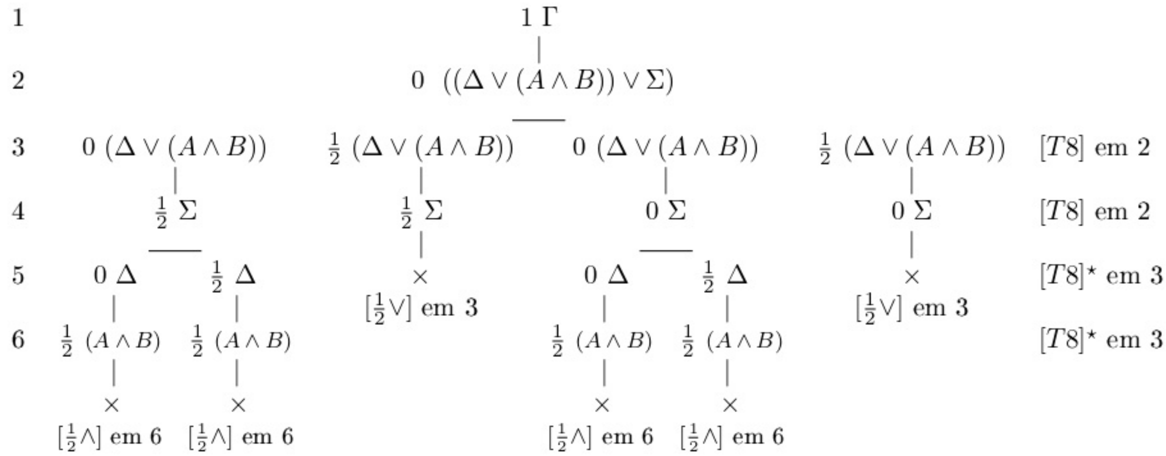




Mostremos para $[A6]$, que o sequente gera um tableau fechado.

$[A6]\ \Gamma \Rightarrow (\Delta, (A \wedge B)), \Sigma$





Mostremos para $[A7]$, que o sequente gera um tableau fechado.

$[A7]\ \Gamma \Rightarrow (\Delta, (A \vee B)), \Sigma$

$$
\begin{array}{ll}
1 & 1\ \Gamma \\
 & | \\
2 & \frac{1}{2}\ ((\Delta \vee (A \vee B)) \vee \Sigma) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccl}
1 & & & & 1\ \Gamma & & & & \\
2 & & & & 0\ ((\Delta \vee (A \vee B)) \vee \Sigma) & & & & \\
3 & \multicolumn{2}{c}{0\ (\Delta \vee (A \vee B))} & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee (A \vee B)) & & \multicolumn{2}{c}{0\ (\Delta \vee (A \vee B))} & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee (A \vee B)) & [T8] \text{ em } 2 \\
4 & \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}\ \Sigma} & \frac{1}{2}\ \Sigma & & \multicolumn{2}{c}{0\ \Sigma} & 0\ \Sigma & [T8] \text{ em } 2 \\
5 & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & \times & & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & \times & [T8]^{\star} \text{ em } 3 \\
 & & & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 3 & & & & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 3 & \\
6 & \frac{1}{2}\ (A \vee B) & \frac{1}{2}\ (A \vee B) & & & \frac{1}{2}\ (A \vee B) & \frac{1}{2}\ (A \vee B) & & [T8]^{\star} \text{ em } 3 \\
 & \times & \times & & & \times & \times & & \\
 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 6 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 6 & & & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 6 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 6 & &
\end{array}
$$

Mostremos agora as regras de sequentes do sistema GI1, para o sequente na forma $\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma$ existe uma prova Π onde pelo sistema de tableaux será demonstrado que $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vdash (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m) \vee (C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_p)$ é válido, onde temos que $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\Delta = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ e $\Sigma = \{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$ são multiconjuntos finitos de fórmulas.

Assim, temos para as regras de sequentes na forma:

$$\frac{S/\Omega_1, S/\Omega_2, \cdots, S/\Omega_r}{S/K(A_1, A_2, \cdots, A_m)}$$

sendo $S/K(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ um sequente, que contém o conectivo K utilizando as fórmulas $A_1 a\ A_m$, da seguinte forma

$$\left(\Theta_1, K(A_1, A_2, \cdots, A_m)\right) \Rightarrow \Theta_{1/2} \vee \Theta_0$$

se a valoração i do conectivo k for distinguido. Ou ainda:

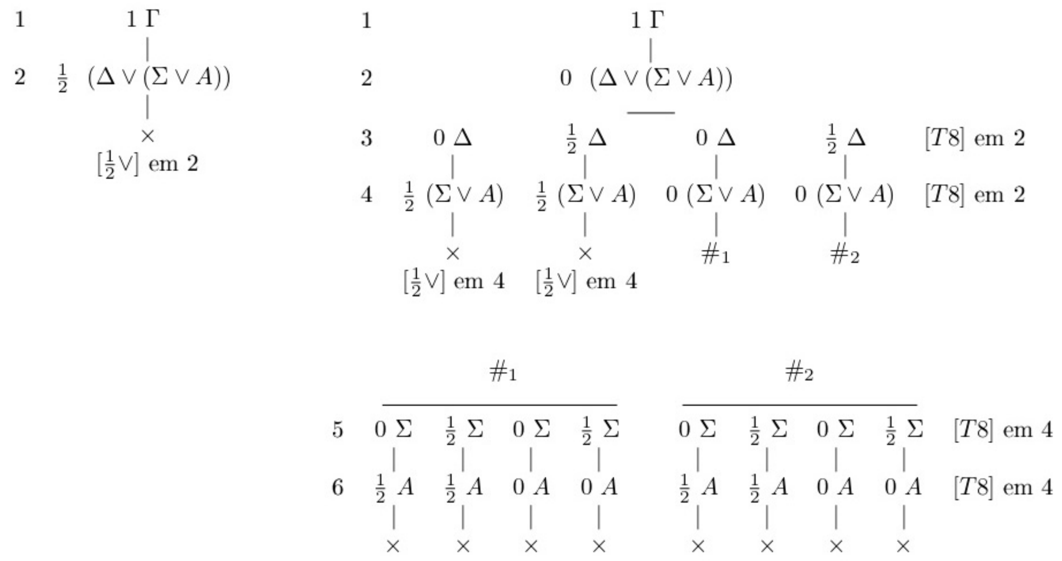
$$\Theta_1 \Rightarrow \left(\Theta_{1/2}, K(A_1, A_2, \cdots, A_m)\right) \vee \Theta_0, \text{ ou } \Theta_1 \Rightarrow \Theta_{1/2} \vee \left(\Theta_0, K(A_1, A_2, \cdots, A_m)\right)$$

se a valoração i do conectivo k for não distinguido.

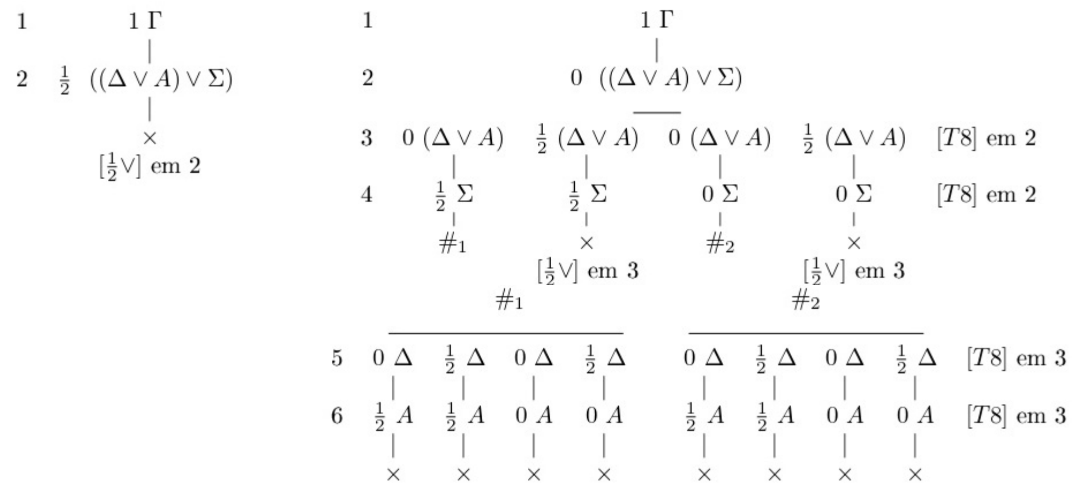
Onde temos que, se existem os sequentes $S/\Omega_1, S/\Omega_2, \cdots, S/\Omega_r$ que geram tableaux fechados, teremos o sequente $S/K(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ como um tableau fechado.

Mostremos para a regra $[S1]$ $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,A); \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta,A),\Sigma; \quad (\Gamma,B) \Rightarrow \Delta,\Sigma}{(\Gamma,A \to B) \Rightarrow \Delta,\Sigma}$, que se existem os sequentes $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A)$; $\Gamma \Rightarrow (\Delta, A), \Sigma$; e $(\Gamma, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$ que geram tableaux fechados, teremos o sequente $(\Gamma,\ A \to B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$ como um tableau fechado.

i) $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A)$



ii) $\Gamma \Rightarrow (\Delta, A), \Sigma$



iii) $(\Gamma, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$

$$\begin{array}{ll} 1 & 1\,\Gamma \\ & | \\ 2 & 1\,B \\ & | \\ 3 & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee \Sigma) \\ & | \\ & \times \\ & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 3 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} 1 & & & 1\,\Gamma & & \\ & & & | & & \\ 2 & & & 1\,B & & \\ & & & | & & \\ 3 & & & 0\ (\Delta \vee \Sigma) & & \\ 4 & 0\,\Delta & \frac{1}{2}\,\Delta & 0\,\Delta & \frac{1}{2}\,\Delta & [T8] \text{ em } 3 \\ & | & | & | & | & \\ 5 & \frac{1}{2}\,\Sigma & \frac{1}{2}\,\Sigma & 0\,\Sigma & 0\,\Sigma & [T8] \text{ em } 3 \\ & | & | & | & | & \\ & \times & \times & \times & \times & \end{array}$$

Em (i), (ii) e (iii) temos todos os ramos fechados pela hipótese da regra $[S1]$; desta forma, mostraremos que, tendo as provas por tableaux dos sequentes apresentados, temos um tableau fechado para o sequente $(\Gamma,\ A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

$$\begin{array}{ll} 1 & 1\,\Gamma \\ & | \\ 2 & 1\ (A \rightarrow B) \\ & | \\ 3 & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee \Sigma) \\ & | \\ & \times \\ & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 3 \end{array} \qquad \begin{array}{lcccl} 1 & & 1\,\Gamma & & \\ & & | & & \\ 2 & & 1\ (A \rightarrow B) & & \\ & & | & & \\ 3 & & 0\ (\Delta \vee \Sigma) & & \\ 4 & 0\ A & \frac{1}{2}\ A & 1\ B & [T1] \text{ em } 2 \\ 5 & 0\Delta\ \frac{1}{2}\Delta\ 0\Delta\ \frac{1}{2}\Delta & 0\Delta\ \frac{1}{2}\Delta\ 0\Delta\ \frac{1}{2}\Delta & 0\Delta\ \frac{1}{2}\Delta\ 0\Delta\ \frac{1}{2}\Delta & [T8] \text{ em } 3 \\ 6 & \frac{1}{2}B\ \frac{1}{2}B\ 0B\ 0B & \frac{1}{2}B\ \frac{1}{2}B\ 0B\ 0B & \frac{1}{2}B\ \frac{1}{2}B\ 0B\ 0B & [T8] \text{ em } 3 \\ & |\ \ |\ \ |\ \ | & |\ \ |\ \ |\ \ | & |\ \ |\ \ |\ \ | & \\ & \times\ \times\ \times\ \times & \times\ \times\ \times\ \times & \times\ \times\ \times\ \times & \end{array}$$

Mostremos para a regra $[S2]\ \frac{(\Gamma,A) \Rightarrow (\Delta,B),\Sigma; \quad (\Gamma,A) \Rightarrow \Delta,(\Sigma,B)}{\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,A \rightarrow B)}$, que se existem os sequentes $(\Gamma, A) \Rightarrow (\Delta, B), \Sigma$; e $(\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, (\Sigma, B)$ que geram tableaux fechados, teremos o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma,\ A \rightarrow B)$ como um tableau fechado.

i) $(\Gamma, A) \Rightarrow (\Delta, B), \Sigma$

$$\begin{array}{lc}
1 & 1\ \Gamma \\
 & | \\
2 & 1\ A \\
 & | \\
3 & \frac{1}{2}\ \ ((\Delta \vee B) \vee \Sigma) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl}
1 & & & 1\ \Gamma & & \\
2 & & & 1\ A & & \\
3 & & & 0\ \ ((\Delta \vee B) \vee \Sigma) & & \\
4 & 0\ (\Delta \vee B) & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee B) & 0\ (\Delta \vee B) & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee B) & [T8]\ \text{em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
5 & \frac{1}{2}\ \Sigma & \frac{1}{2}\ \Sigma & 0\ \Sigma & 0\ \Sigma & [T8]\ \text{em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
 & \#_1 & \times & \#_2 & \times & \\
 & & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 4 & & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccl}
 & & \#_1 & & & & \#_2 & & & \\
6 & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & [T8]\ \text{em } 4 \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & \\
7 & \frac{1}{2}\ B & \frac{1}{2}\ B & 0\ B & 0\ B & \frac{1}{2}\ B & \frac{1}{2}\ B & 0\ B & 0\ B & [T8]\ \text{em } 4 \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times &
\end{array}$$

ii) $(\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, (\Sigma, B)$

$$\begin{array}{lc}
1 & 1\ \Gamma \\
 & | \\
2 & 1\ A \\
 & | \\
3 & \frac{1}{2}\ \ (\Delta \vee (\Sigma \vee B)) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl}
1 & & & 1\ \Gamma & & \\
2 & & & 1\ A & & \\
3 & & & 0\ \ (\Delta \vee (\Sigma \vee B)) & & \\
4 & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & [T8]\ \text{em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
5 & \frac{1}{2}\ (\Sigma \vee B) & \frac{1}{2}\ (\Sigma \vee B) & 0\ (\Sigma \vee B) & 0\ (\Sigma \vee B) & [T8]\ \text{em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \#_1 & \#_2 & \\
 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 5 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 5 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccl}
 & & \#_1 & & & & \#_2 & & & \\
6 & 0\ \Sigma & \frac{1}{2}\ \Sigma & 0\ \Sigma & \frac{1}{2}\ \Sigma & 0\ \Sigma & \frac{1}{2}\ \Sigma & 0\ \Sigma & \frac{1}{2}\ \Sigma & [T8]\ \text{em } 5 \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & \\
7 & \frac{1}{2}\ B & \frac{1}{2}\ B & 0\ B & 0\ B & \frac{1}{2}\ B & \frac{1}{2}\ B & 0\ B & 0\ B & [T8]\ \text{em } 5 \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times &
\end{array}$$

Em (i) e (ii) temos todos os ramos fechados pela hipótese da regra $[S2]$; desta forma, mostraremos que, tendo as provas por tableaux dos sequentes apresentados, temos um tableau fechado para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma,\ A \rightarrow B)$.

1	$1\ \Gamma$
2	$\frac{1}{2}\ (\Delta \vee (\Sigma \vee (A \to B)))$
	$\times$
	$[\frac{1}{2}\vee]$ em 2

1		$1\ \Gamma$			
2		$0\ (\Delta \vee (\Sigma \vee (A \to B)))$			
3	$0\ \Delta$	$\frac{1}{2}\ \Delta$	$0\ \Delta$	$\frac{1}{2}\ \Delta$	$[T8]$ em 2
4	$\frac{1}{2}\ (\Sigma \vee (A \to B))$	$\frac{1}{2}\ (\Sigma \vee (A \to B))$	$0\ (\Sigma \vee (A \to B))$	$0\ ((\Sigma \vee (A \to B))$	$[T8]$ em 2
	$\times$	$\times$	$\#_1$	$\#_2$	
	$[\frac{1}{2}\vee]$ em 4	$[\frac{1}{2}\vee]$ em 4			

$\#_1$

5	$0\ \Sigma$	$\frac{1}{2}\ \Sigma$	$0\ \Sigma$		$\frac{1}{2}\ \Sigma$		$[T8]$ em 4
6	$\frac{1}{2}\ (A \to B)$	$\frac{1}{2}\ (A \to B)$	$0\ (A \to B)$		$0\ (A \to B)$		$[T8]$ em 4
7	$\times$	$\times$	$1\ A$	$1\ A$	$1\ A$	$1\ A$	$[T2]$ em 6
	$[\frac{1}{2} \to]$ em 6	$[\frac{1}{2} \to]$ em 6					
8			$\frac{1}{2}\ B$	$0\ B$	$\frac{1}{2}\ B$	$0\ B$	$[T2]$ em 6
			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

$\#_2$

5	$0\ \Sigma$	$\frac{1}{2}\ \Sigma$	$0\ \Sigma$		$\frac{1}{2}\ \Sigma$		$[T8]$ em 4
6	$\frac{1}{2}\ (A \to B)$	$\frac{1}{2}\ (A \to B)$	$0\ (A \to B)$		$0\ (A \to B)$		$[T8]$ em 4
7	$\times$	$\times$	$1\ A$	$1\ A$	$1\ A$	$1\ A$	$[T2]$ em 6
	$[\frac{1}{2} \to]$ em 6	$[\frac{1}{2} \to]$ em 6					
8			$\frac{1}{2}\ B$	$0\ B$	$\frac{1}{2}\ B$	$0\ B$	$[T2]$ em 6
			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

Mostremos para a regra $[S3]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,A)}{(\Gamma,\neg A)\Rightarrow \Delta,\Sigma}$, que se existe o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A)$ que gera tableaux fechados, teremos o sequente $(\Gamma, \neg A)\Rightarrow \Delta, \Sigma$ como um tableau fechado.

i) $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, A)$

Sequente já demonstrado na regra $[S1]$, sequente (i).

Dado que em (i) temos todos os ramos fechados pela hipótese da regra $[S3]$; desta forma, mostraremos que, tendo a prova por tableaux do sequente apresentado, temos um tableau fechado para o sequente $(\Gamma, \neg A)\Rightarrow \Delta, \Sigma$.

$$
\begin{array}{lc}
1 & 1\ \Gamma \\
 & | \\
2 & 1\ \neg A \\
 & | \\
3 & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee \Sigma) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccccl}
1 & & 1\ \Gamma & & & \\
 & & | & & & \\
2 & & 1\ \neg A & & & \\
 & & | & & & \\
3 & & 0\ (\Delta \vee \Sigma) & & & \\
 & & | & & & \\
4 & & 0\ A & & & [T3]\ \text{em } 2 \\
\hline
5 & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & [T8]\ \text{em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
6 & \frac{1}{2}\ \Sigma & \frac{1}{2}\ \Sigma & 0\ \Sigma & 0\ \Sigma & [T8]\ \text{em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \times & \times &
\end{array}
$$

Mostremos para a regra $[S4]$ $\frac{(\Gamma,A)\Rightarrow \Delta,\Sigma; \quad \Gamma\Rightarrow (\Delta,A),\Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,\neg A)}$, que se existem os sequentes $(\Gamma, A)\Rightarrow \Delta, \Sigma$; e $\Gamma\Rightarrow (\Delta, A), \Sigma$ que geram tableaux fechados, teremos o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, \neg A)$ como um tableau fechado.

i) $(\Gamma, A)\Rightarrow \Delta, \Sigma$

$$
\begin{array}{lc}
1 & 1\ \Gamma \\
 & | \\
2 & 1\ A \\
 & | \\
3 & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee \Sigma) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccccl}
1 & & 1\ \Gamma & & & \\
 & & | & & & \\
2 & & 1\ A & & & \\
 & & | & & & \\
3 & & 0\ (\Delta \vee \Sigma) & & & \\
\hline
4 & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & [T8]\ \text{em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
5 & \frac{1}{2}\ \Sigma & \frac{1}{2}\ \Sigma & 0\ \Sigma & 0\ \Sigma & [T8]\ \text{em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \times & \times &
\end{array}
$$

ii) $\Gamma\Rightarrow (\Delta, A), \Sigma$

Sequente já demonstrado na regra $[S1]$, sequente (ii).

Dado que em (i) e (ii) temos todos os ramos fechados pela hipótese da regra $[S4]$, desta forma, mostraremos que, tendo as provas por tableaux dos sequentes apresentados, temos um tableau fechado para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, \neg A)$.

$$
\begin{array}{lc}
1 & 1\ \Gamma \\
 & | \\
2 & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee (\Sigma \vee (\neg A))) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccccl}
1 & & & 1\ \Gamma & & \\
 & & & | & & \\
2 & & & 0\ (\Delta \vee (\Sigma \vee (\neg A))) & & \\
\hline
3 & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & 0\ \Delta & \frac{1}{2}\ \Delta & [T8]\ \text{em } 2 \\
 & | & | & | & | & \\
4 & \frac{1}{2}\ (\Sigma \vee (\neg A)) & \frac{1}{2}\ (\Sigma \vee (\neg A)) & 0\ (\Sigma \vee (\neg A)) & 0\ (\Sigma \vee (\neg A)) & [T8]\ \text{em } 2 \\
 & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \#_1 & \#_2 & \\
 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 4 & [\frac{1}{2}\vee]\ \text{em } 4 & & &
\end{array}
$$

$\#_1$

5	$0\ \Sigma$	$\frac{1}{2}\ \Sigma$	$0\ \Sigma$		$\frac{1}{2}\ \Sigma$		$[T8]$ em 4
6	$\frac{1}{2}\ (\neg A)$	$\frac{1}{2}\ (\neg A)$	$0\ (\neg A)$		$0\ (\neg A)$		$[T8]$ em 4
7	$\times$	$\times$	$1\ A$	$\frac{1}{2}\ A$	$1\ A$	$\frac{1}{2}\ A$	$[T4]$ em 6
	$[\frac{1}{2}\neg]$ em 6	$[\frac{1}{2}\neg]$ em 6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

$\#_2$

5	$0\ \Sigma$	$\frac{1}{2}\ \Sigma$	$0\ \Sigma$		$\frac{1}{2}\ \Sigma$		$[T8]$ em 4
6	$\frac{1}{2}\ (\neg A)$	$\frac{1}{2}\ (\neg A)$	$0\ (\neg A)$		$0\ (\neg A)$		$[T8]$ em 4
7	$\times$	$\times$	$1\ A$	$\frac{1}{2}\ A$	$1\ A$	$\frac{1}{2}\ A$	$[T4]$ em 6
	$[\frac{1}{2}\neg]$ em 6	$[\frac{1}{2}\neg]$ em 6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

Mostremos para a regra $[S5]$ $\frac{(\Gamma, A, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma}{(\Gamma, A \wedge B) \Rightarrow \Delta, \Sigma}$, que se existe o sequente $(\Gamma, A, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$ que gera tableaux fechados, teremos o sequente $(\Gamma,\ A \wedge B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$ como um tableau fechado.

i) $(\Gamma, A, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$

1	$1\ \Gamma$
2	$1\ A$
3	$1\ B$
4	$\frac{1}{2}\ (\Delta \vee \Sigma)$
	$\times$
	$[\frac{1}{2}\vee]$ em 4

1	$1\ \Gamma$				
2	$1\ A$				
3	$1\ B$				
4	$0\ (\Delta \vee \Sigma)$				
5	$0\ \Delta$	$\frac{1}{2}\ \Delta$	$0\ \Delta$	$\frac{1}{2}\ \Delta$	$[T8]$ em 4
6	$\frac{1}{2}\ \Sigma$	$\frac{1}{2}\ \Sigma$	$0\ \Sigma$	$0\ \Sigma$	$[T8]$ em 4
	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

Dado que em (i) temos todos os ramos fechados pela hipótese da regra $[S5]$; desta forma, mostraremos que, tendo a prova por tableaux do sequente apresentado, temos um tableau fechado para o sequente $(\Gamma,\ A \wedge B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

$$
\begin{array}{ll}
1 & 1\,\Gamma \\
 & | \\
2 & 1\,(A \wedge B) \\
 & | \\
3 & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee \Sigma) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llllll}
1 & & 1\,\Gamma & & & \\
2 & & 1\,(A \wedge B) & & & \\
3 & & 0\,(\Delta \vee \Sigma) & & & \\
4 & & 1\,A & & & [T5] \text{ em } 2 \\
5 & & 1\,B & & & [T5] \text{ em } 2 \\
6 & 0\,\Delta & \frac{1}{2}\,\Delta & 0\,\Delta & \frac{1}{2}\,\Delta & [T8] \text{ em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
7 & \frac{1}{2}\,\Sigma & \frac{1}{2}\,\Sigma & 0\,\Sigma & 0\,\Sigma & [T8] \text{ em } 3 \\
 & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \times & \times &
\end{array}
$$

Mostremos para a regra $[S6]$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,A);\quad \Gamma \Rightarrow (\Delta,A),\Sigma;\quad \Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,B);\quad \Gamma \Rightarrow (\Delta,B),\Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,A \wedge B)}$, que se existem os sequentes $\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,A)$; $\Gamma \Rightarrow (\Delta,A),\Sigma$; $\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,B)$; e $\Gamma \Rightarrow (\Delta,B),\Sigma$ que geram tableaux fechados, teremos o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,\ A \wedge B)$ como um tableau fechado.

i) $\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,A)$

Sequente já demonstrado na regra $[S1]$, sequente (i).

ii) $\Gamma \Rightarrow (\Delta,A),\Sigma$

Sequente já demonstrado na regra $[S1]$, sequente (ii).

iii) $\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,B)$

$$
\begin{array}{ll}
1 & 1\,\Gamma \\
 & | \\
2 & \frac{1}{2}\ (\Delta \vee (\Sigma \vee B)) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
1 & & & 1\,\Gamma & & \\
2 & & & 0\ (\Delta \vee (\Sigma \vee B)) & & \\
3 & 0\,\Delta & \frac{1}{2}\,\Delta & 0\,\Delta & \frac{1}{2}\,\Delta & [T8] \text{ em } 2 \\
 & | & | & | & | & \\
4 & \frac{1}{2}\ (\Sigma \vee B) & \frac{1}{2}\ (\Sigma \vee B) & 0\ (\Sigma \vee B) & 0\ (\Sigma \vee B) & [T8] \text{ em } 2 \\
 & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \#_1 & \#_2 & \\
 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 4 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 4 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & & \#_1 & & & & \#_2 & & & \\
5 & 0\,\Sigma & \frac{1}{2}\,\Sigma & 0\,\Sigma & \frac{1}{2}\,\Sigma & 0\,\Sigma & \frac{1}{2}\,\Sigma & 0\,\Sigma & \frac{1}{2}\,\Sigma & [T8] \text{ em } 4 \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & \\
6 & \frac{1}{2}\,B & \frac{1}{2}\,B & 0\,B & 0\,B & \frac{1}{2}\,B & \frac{1}{2}\,B & 0\,B & 0\,B & [T8] \text{ em } 4 \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times &
\end{array}
$$

iv) $\Gamma \Rightarrow (\Delta, B), \Sigma$

$$
\begin{array}{ll}
1 & 1\,\Gamma \\
 & \mid \\
2 & \tfrac{1}{2}\ ((\Delta \vee B) \vee \Sigma) \\
 & \mid \\
 & \times \\
 & [\tfrac{1}{2}\vee]\text{ em } 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
1 & & & 1\,\Gamma & & \\
 & & & \mid & & \\
2 & & & 0\ ((\Delta \vee B) \vee \Sigma) & & \\
3 & 0\ (\Delta \vee B) & \tfrac{1}{2}\ (\Delta \vee B) & 0\ (\Delta \vee B) & \tfrac{1}{2}\ (\Delta \vee B) & [T8]\text{ em } 2 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
4 & \tfrac{1}{2}\ \Sigma & \tfrac{1}{2}\ \Sigma & 0\ \Sigma & 0\ \Sigma & [T8]\text{ em } 2 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
 & \#_1 & \times & \#_2 & \times & \\
 & & [\tfrac{1}{2}\vee]\text{ em } 3 & & [\tfrac{1}{2}\vee]\text{ em } 3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & & \#_1 & & & & \#_2 & & & \\
5 & 0\,\Delta & \tfrac{1}{2}\,\Delta & 0\,\Delta & \tfrac{1}{2}\,\Delta & 0\,\Delta & \tfrac{1}{2}\,\Delta & 0\,\Delta & \tfrac{1}{2}\,\Delta & [T8]\text{ em } 3 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
6 & \tfrac{1}{2}\,B & \tfrac{1}{2}\,B & 0\,B & 0\,B & \tfrac{1}{2}\,B & \tfrac{1}{2}\,B & 0\,B & 0\,B & [T8]\text{ em } 3 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times &
\end{array}
$$

Em (i), (ii), (iii) e (iv) temos todos os ramos fechados pela hipótese da regra $[S6]$; desta forma, mostraremos que, tendo as provas por tableaux dos sequentes apresentados, temos um tableau fechado para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma,\ A \wedge B)$.

$$
\begin{array}{ll}
1 & 1\,\Gamma \\
 & \mid \\
2 & \tfrac{1}{2}\ (\Delta \vee (\Sigma \vee (A \wedge B)) \\
 & \mid \\
 & \times \\
 & [\tfrac{1}{2}\vee]\text{ em } 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
1 & & & 1\,\Gamma & & \\
 & & & \mid & & \\
2 & & & 0\ (\Delta \vee (\Sigma \vee (A \wedge B)) & & \\
3 & 0\,\Delta & \tfrac{1}{2}\,\Delta & 0\,\Delta & \tfrac{1}{2}\,\Delta & [T8]\text{ em } 2 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
4 & \tfrac{1}{2}\ (\Sigma \vee (A \wedge B)) & \tfrac{1}{2}\ (\Sigma \vee (A \wedge B)) & 0\ (\Sigma \vee (A \wedge B)) & 0\ (\Sigma \vee (A \wedge B)) & [T8]\text{ em } 2 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
 & \times & \times & \#_1 & \#_2 & \\
 & [\tfrac{1}{2}\vee]\text{ em } 4 & [\tfrac{1}{2}\vee]\text{ em } 4 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & & \#_1 & & & & \#_2 & & & \\
5 & 0\,\Sigma & \tfrac{1}{2}\,\Sigma & 0\,\Sigma & \tfrac{1}{2}\,\Sigma & 0\,\Sigma & \tfrac{1}{2}\,\Sigma & 0\,\Sigma & \tfrac{1}{2}\,\Sigma & [T8]\text{ em } 4 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
6 & \tfrac{1}{2}\,(A \wedge B) & \tfrac{1}{2}\,(A \wedge B) & 0\,(A \wedge B) & 0\,(A \wedge B) & \tfrac{1}{2}\,(A \wedge B) & \tfrac{1}{2}\,(A \wedge B) & 0\,(A \wedge B) & 0\,(A \wedge B) & [T8]\text{ em } 4 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
 & \times & \times & \#_3 & \#_4 & \times & \times & \#_5 & \#_6 & \\
 & [\tfrac{1}{2}\wedge]\text{ em } 6 & [\tfrac{1}{2}\wedge]\text{ em } 6 & & & [\tfrac{1}{2}\wedge]\text{ em } 6 & [\tfrac{1}{2}\wedge]\text{ em } 6 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllllllllllll}
 & \#_3 & & & & \#_4 & & & & \#_5 & & & & \#_6 & & & & \\
7 & 0A & \tfrac{1}{2}A & 0B & \tfrac{1}{2}B & 0A & \tfrac{1}{2}A & 0B & \tfrac{1}{2}B & 0A & \tfrac{1}{2}A & 0B & \tfrac{1}{2}B & 0A & \tfrac{1}{2}A & 0B & \tfrac{1}{2}B & [T6]\text{ em } 6 \\
 & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \mid & \\
 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times &
\end{array}
$$

Mostremos para a regra $[S7]$ $\frac{(\Gamma,A) \Rightarrow \Delta,\Sigma; \quad (\Gamma,B) \Rightarrow \Delta,\Sigma}{(\Gamma,A \vee B) \Rightarrow \Delta,\Sigma}$, que se existem os sequentes $(\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, \Sigma$; e $(\Gamma, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$ que geram tableaux fechados, teremos o sequente $(\Gamma,\ A \vee B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$ como um tableau fechado.

i) $(\Gamma, A) \Rightarrow \Delta, \Sigma$

Sequente já demonstrado na regra $[S4]$, sequente (i).

ii) $(\Gamma, B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$

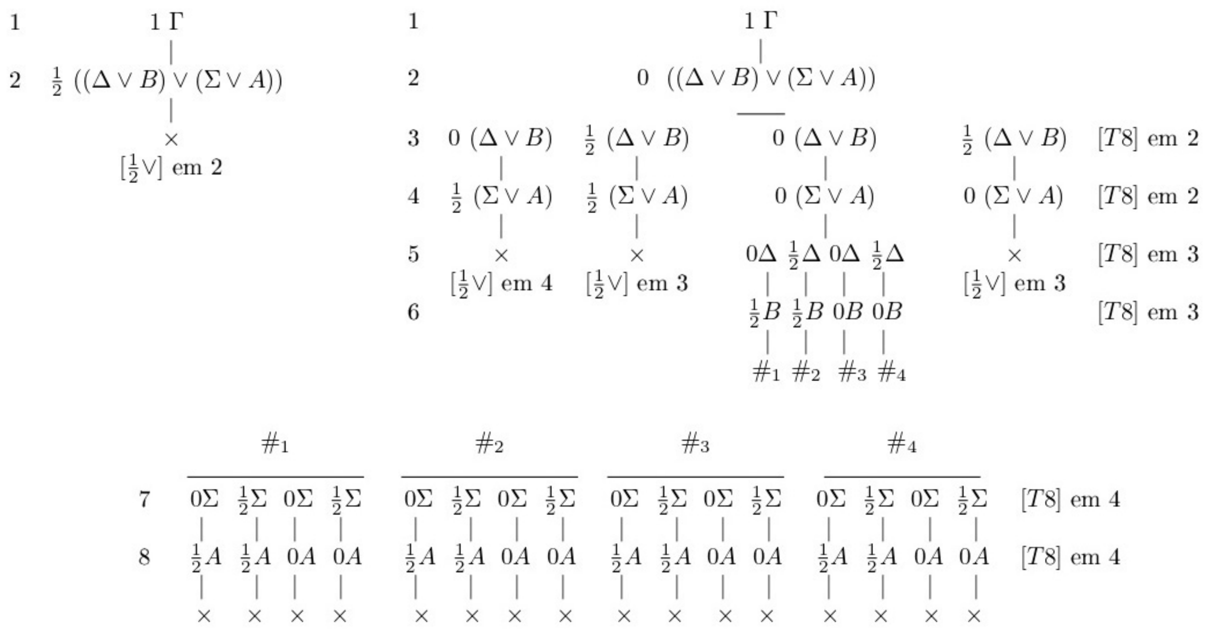
Sequente já demonstrado na regra $[S1]$, sequente (iii).

Em (i) e (ii) temos todos os ramos fechados pela hipótese da regra $[S7]$; desta forma, mostraremos que, tendo as provas por tableaux dos sequentes apresentados, temos um tableau fechado para o sequente $(\Gamma,\ A \vee B) \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

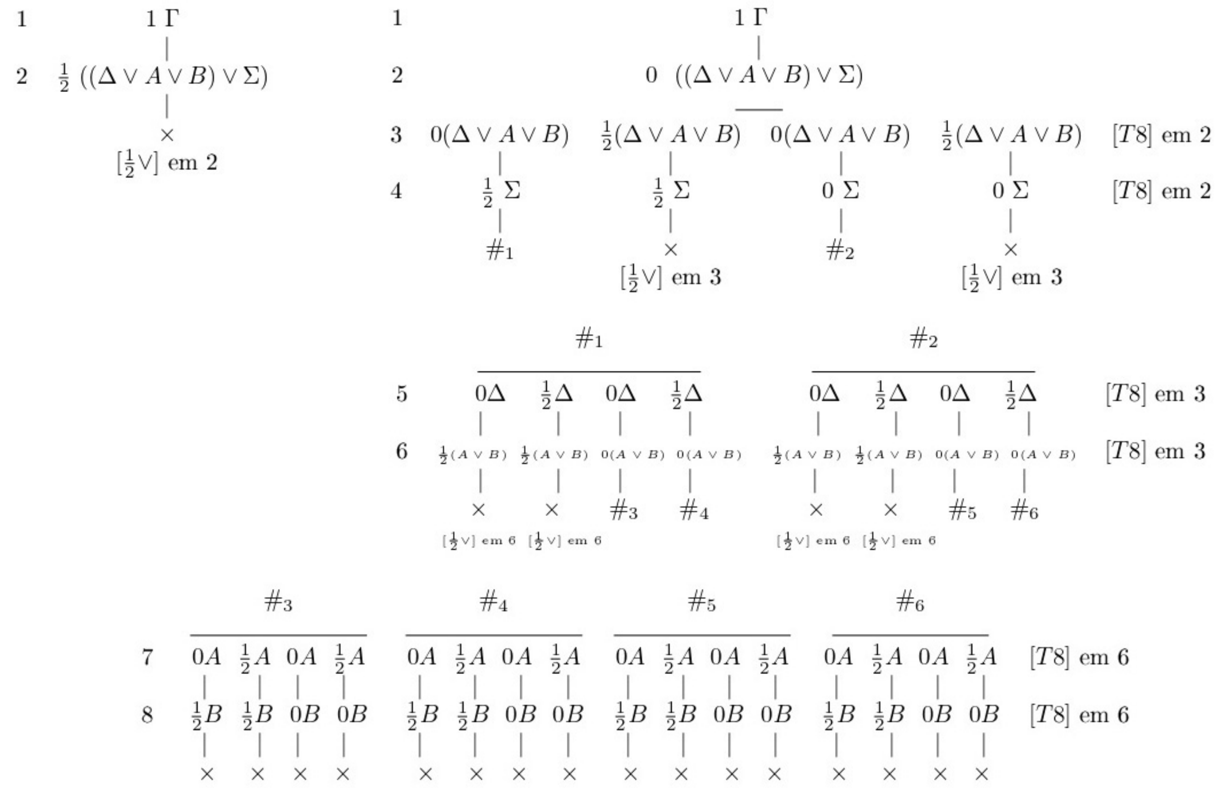
$$
\begin{array}{cc}
1 & 1\,\Gamma \\
 & | \\
2 & 1\,(A \vee B) \\
 & | \\
3 & \frac{1}{2}\,(\Delta \vee \Sigma) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\frac{1}{2}\vee] \text{ em } 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc|cccc|l}
1 & & & 1\,\Gamma & & & & & & \\
2 & & & 1\,(A \vee B) & & & & & & \\
3 & & & 0\,(A \vee B) & & & & & & \\
4 & & 1\,A & & & & 1\,B & & & [T7] \text{ em } 2 \\
5 & 0A & \frac{1}{2}A & 0A & \frac{1}{2}A & 0A & \frac{1}{2}A & 0A & \frac{1}{2}A & [T8] \text{ em } 3 \\
6 & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}B & 0B & 0B & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}B & 0B & 0B & [T8] \text{ em } 3 \\
 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times &
\end{array}
$$

Mostremos para a regra $[S8]$ $\frac{\Gamma \Rightarrow (\Delta,B),(\Sigma,A); \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta,\mathrm{A},B),\Sigma; \quad \Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,\mathrm{A},B); \quad \Gamma \Rightarrow (\Delta,A),(\Sigma,B)}{\Gamma \Rightarrow \Delta,(\Sigma,A \vee B)}$ que se existem os sequentes $\Gamma \Rightarrow (\Delta, B), (\Sigma, A)$; $\Gamma \Rightarrow (\Delta, \mathrm{A}, B), \Sigma$; $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, \mathrm{A}, B)$ e $\Gamma \Rightarrow (\Delta, A), (\Sigma, B)$ que geram tableaux fechados, teremos o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma,\ A \vee B)$ como um tableau fechado.

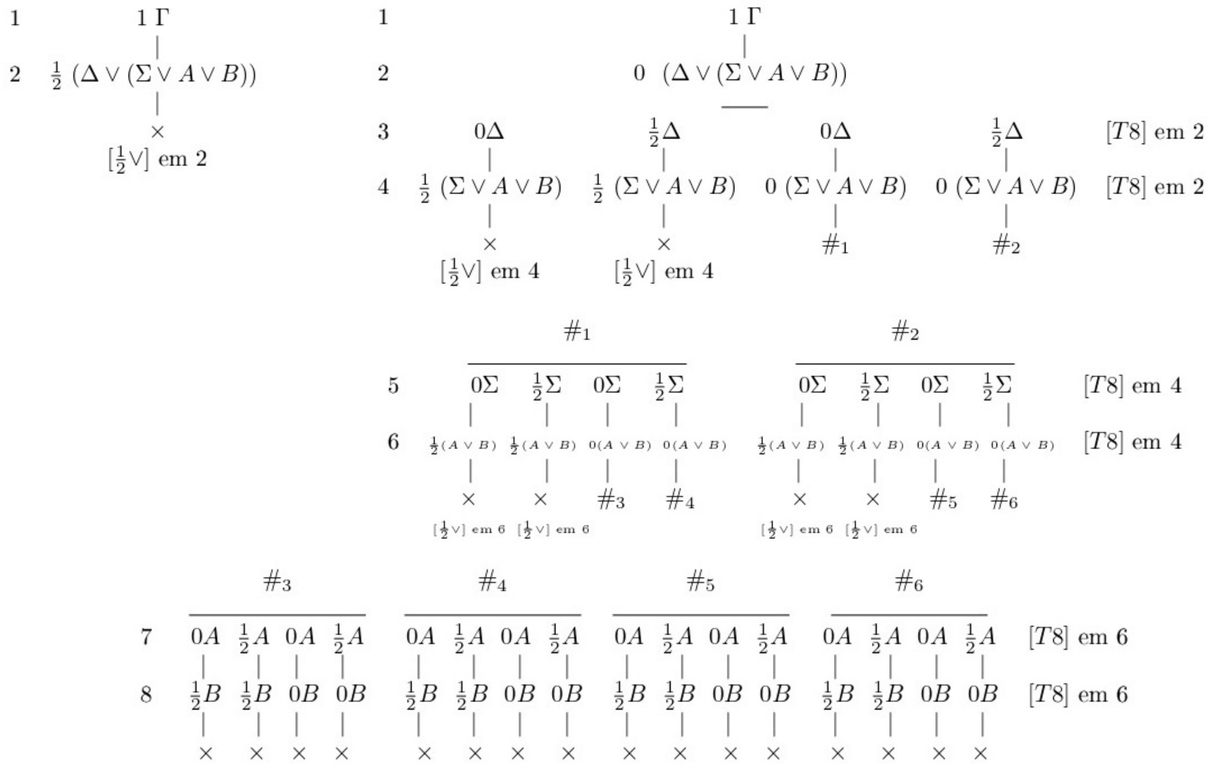
i) $\Gamma \Rightarrow (\Delta, B), (\Sigma, A)$



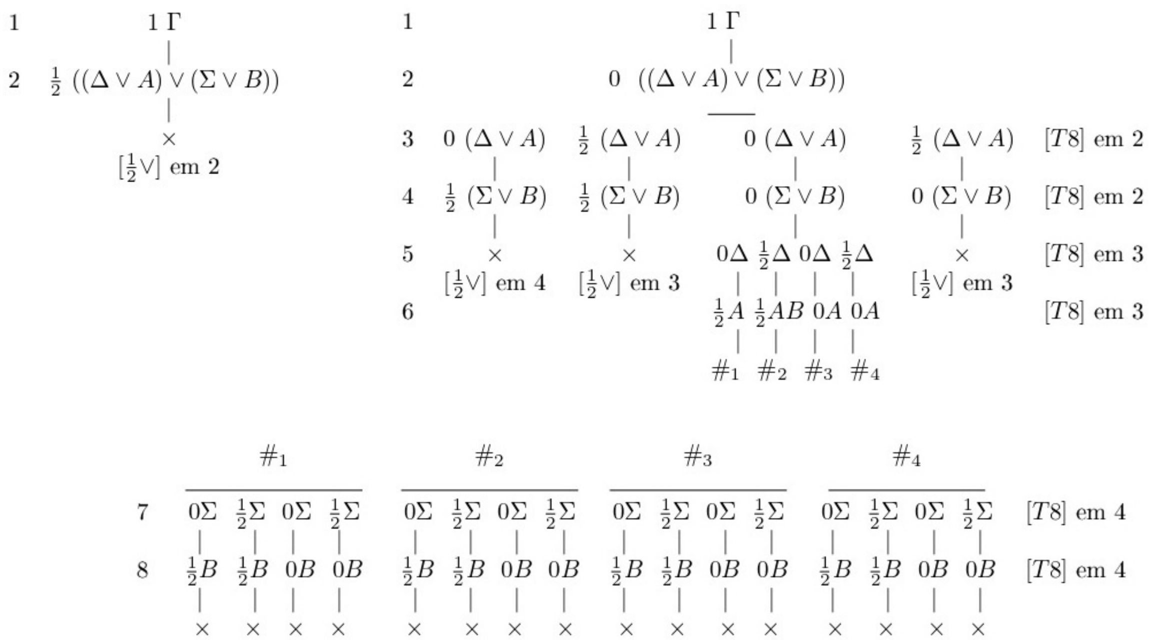
ii) $\Gamma \Rightarrow (\Delta, A, B), \Sigma$



iii) $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma, \mathrm{A}, B)$



iv) $\Gamma \Rightarrow (\Delta, A), (\Sigma, B)$



Em (i), (ii), (iii) e (iv) temos todos os ramos fechados pela hipótese da regra $[S8]$; desta forma, mostraremos que, tendo as provas por tableaux dos sequentes apresentados, temos um tableau fechado para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\Sigma,\ A \vee B)$.

$$
\begin{array}{lc}
1 & 1\,\Gamma \\
 & | \\
2 & \tfrac{1}{2}\ \ (\Delta \vee (\Sigma \vee (A \vee B))) \\
 & | \\
 & \times \\
 & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccl}
1 & & & 1\,\Gamma & & \\
 & & & | & & \\
2 & & & 0\ \ (\Delta \vee (\Sigma \vee (A \vee B))) & & \\
 & & & \overline{} & & \\
3 & 0\Delta & \tfrac{1}{2}\Delta & 0\Delta & \tfrac{1}{2}\Delta & [T8]\ \text{em } 2 \\
 & | & | & | & | & \\
4 & \tfrac{1}{2}\ (\Sigma \vee (A \vee B)) & \tfrac{1}{2}\ (\Sigma \vee (A \vee B)) & 0\ (\Sigma \vee (A \vee B)) & 0\ (\Sigma \vee (A \vee B)) & [T8]\ \text{em } 2 \\
 & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \#_1 & \#_2 & \\
 & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 4 & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 4 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccccl}
 & \multicolumn{4}{c}{\#_1} & & \multicolumn{4}{c}{\#_2} & \\
5 & 0\Sigma & \tfrac{1}{2}\Sigma & 0\Sigma & \tfrac{1}{2}\Sigma & & 0\Sigma & \tfrac{1}{2}\Sigma & 0\Sigma & \tfrac{1}{2}\Sigma & [T8]\ \text{em } 4 \\
 & | & | & | & | & & | & | & | & | & \\
6 & \tfrac{1}{2}(A \vee B) & \tfrac{1}{2}(A \vee B) & 0(A \vee B) & 0(A \vee B) & & \tfrac{1}{2}(A \vee B) & \tfrac{1}{2}(A \vee B) & 0(A \vee B) & 0(A \vee B) & [T8]\ \text{em } 4 \\
 & | & | & | & | & & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \#_3 & \#_4 & & \times & \times & \#_5 & \#_6 & \\
 & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 6 & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 6 & & & & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 6 & [\tfrac{1}{2}\vee]\ \text{em } 6 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l cccc c cccc c cccc c cccc l}
 & \multicolumn{4}{c}{\#_3} & & \multicolumn{4}{c}{\#_4} & & \multicolumn{4}{c}{\#_5} & & \multicolumn{4}{c}{\#_6} & \\
7 & 0A & \tfrac{1}{2}A & 0A & \tfrac{1}{2}A & & 0A & \tfrac{1}{2}A & 0A & \tfrac{1}{2}A & & 0A & \tfrac{1}{2}A & 0A & \tfrac{1}{2}A & & 0A & \tfrac{1}{2}A & 0A & \tfrac{1}{2}A & [T8]\ \text{em } 6 \\
 & | & | & | & | & & | & | & | & | & & | & | & | & | & & | & | & | & | & \\
8 & \tfrac{1}{2}B & \tfrac{1}{2}B & 0B & 0B & & \tfrac{1}{2}B & \tfrac{1}{2}B & 0B & 0B & & \tfrac{1}{2}B & \tfrac{1}{2}B & 0B & 0B & & \tfrac{1}{2}B & \tfrac{1}{2}B & 0B & 0B & [T8]\ \text{em } 6 \\
 & | & | & | & | & & | & | & | & | & & | & | & | & | & & | & | & | & | & \\
 & \times & \times & \times & \times & & \times & \times & \times & \times & & \times & \times & \times & \times & & \times & \times & \times & \times &
\end{array}
$$

■

Teorema 3.2. $\Delta \vdash_{\mathrm{I1}} \varphi$ se, e somente se, $\Delta \vdash_{\mathrm{GI1}} \varphi$.

Demonstração:

Seguiremos o seguinte caminho para mostrar que $\Delta \vdash_{\mathrm{I1}} \varphi \iff \Delta \vdash_{\mathrm{GI1}} \varphi$:

$\Delta \vdash_{\mathrm{I1}} \varphi \Rightarrow \Delta \vdash_{\mathrm{GI1}} \varphi$, apresentado no Lema 3.2.

$\Delta \vdash_{\mathrm{GI1}} \varphi \Rightarrow \Delta \vdash_{\mathrm{TI1}} \varphi$, apresentado no Lema 3.3.

Ademais, dado que $\Delta \vdash_{\mathrm{TI1}} \varphi \iff \Delta \vdash_{\mathrm{I1}} \varphi$ é demonstrada em Santos e Silvestrini (2021, p. 401), tendo em vista os lemas apresentados, temos provado que, de fato, $\Delta \vdash_{\mathrm{I1}} \varphi \iff \Delta \vdash_{\mathrm{GI1}} \varphi$.

■

4. Considerações finais

Neste artigo, apresentamos a lógica trivalente e fracamente intuicionista I1, originalmente introduzida por Sette e Carnielli (1995). Apresentamos o sistema I1 em tableaux analíticos, introduzido em Santos e Silvestrini (2021), denotado por TI1, e inspirados na sistematização de como introduzir um sistema em sequentes como duais de um sistema de tableaux, dado por Carnielli (1991), de modo original, apresentamos um sistema de sequentes, o qual denotamos por GI1, para o sistema I1, que fora inicialmente apresentado via sistema axiomático (Hilbertiano), e estabelecemos a equivalência dedutiva entre os sistemas.

Ademais, destacamos a vantagem de nosso sistema de sequentes, GI1, se apresentar como um algoritmo, tornando este mais aplicável do ponto de vista computacional, por ser um método, por vezes, mais prático e rápido, pois constitui-se num sistema de prova automática de teoremas, enquanto em I1 falta localidade quando da escolha de axiomas e sua respectiva instanciação na construção de uma dedução.

Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo fomento a esta pesquisa, processo FAPESP n. 2019/15963-5.

Referências

CARNIELLI, W. A.; LIMA-MARQUES M. Society semantics for multiple-valued Logics. **Advances in Contemporary Logic and Computer Science** (W. Carnielli and I. D'Ottaviano, eds.), vol. 235 of Contemporary Mathematics Series, p. 33-52, American Mathematical Society, 1999.

CARNIELLI, W. A. On sequents and tableaux for many-valued logics. **Journal of Non-Classical Logic**, v. 8, p. 59-76, 1991.

GENTZEN G. **The collected papers of Gerhard Gentzen** (M. E. Szabo, ed.), North-Holland Publishing Company, 1969.

SANTOS, E. O. V.; SILVESTRINI, L. H. C. O Método dos tableaux aplicado ao Cálculo Trivalente e Intuicionista I1. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, v. 22, n. 3, p. 393-412, 2021.

SANTOS, J. B. **Infraestrutura para provadores interativos de teoremas na web**. Dissertação de Mestrado, PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2010.

SETTE, A. M.; CARNIELLI. W. A. Maximal weakly-intuicionistic logics. **Studia Logica,** v. 55, p. 181-203, 1995.

SUNDHOLM. G. Systems of deduction. In D. Gabbay and R Guenthner, editors, **Handbook of Philosophical Logic**, v. I, chapter I.2, p. 133–188. Reidel, Dordrecht, 1983.

SMULLYAN, R. M. **First-order logic**. New York: Dover Publication, 1968.

Recebido em: 17/10/22
Aprovado em: 26/04/23