TABLÔS PARA A LÓGICA INTUICIONISTA I[1]

TABLEAUX FOR THE INTUITIONISTIC LOGIC I[1]

Pedro Henrique Paiola[1]
Hércules Araújo Feitosa[2]

Resumo: Este artigo trata de uma lógica de caráter intuicionista (construtivista) e do método dos tablôs, que tem maior interesse computacional por ser procedimento dedutivo, em geral, mais rápido e eficaz que o axiomático dedutivo. A meta é apresentar a lógica intuicionista I[1], que foi originalmente apresentada em um sistema dedutivo axiomático, como em Sette e Carnielli (1995), através do método dos tablôs. Por ser considerada intuicionista, também deve ser considerado o aspecto construtivista da lógica I[1].

Palavras-chave: Lógicas intuicionistas. Lógica I[1]. Método dos tablôs.

Abstract: This paper detaches an intuitionistic (and constructivist) logic, the logic I[1], and the deductive systems of tableaux. The systems of tableaux have additional computational interest, for this deductive procedure is in general faster and effective than the axiomatic techniques. The aim is to introduce an original system of tableaux for the logic I[1], that was initially presented in an axiomatic deductive system, by Sette and Carnielli (1995). By the way it is highlighted the constructivist aspect of the logic I[1].

Keywords: Intuitionistic logics. Logic I[1]. Tableaux.

Introdução

"A Lógica surge como ciência na Antiguidade, principalmente a partir dos trabalhos de Aristóteles e, desde seus primórdios, tem como um objetivo central a análise dos raciocínios, o estudo das inferências" (FEITOSA; PAULOVICH, 2005).

Sistemas lógicos podem ser classificados em: lógicas clássicas e lógicas não clássicas.

A principal característica da lógica clássica é o respeito aos chamados princípios aristotélicos:

(i) Princípio da identidade: toda proposição é idêntica a si mesma;

[1] Mestrando em Ciência da Computação pela FC-UNESP/Bauru. E-mail: pedro.paiola@unesp.br. ORCID: 0000-0001-9093-535X
[2] Professor do Departamento de Matemática da FC-UNESP/Bauru; Professor do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UNESP/Marília. E-mail: hercules.feitosa@unesp.br. ORCID: 0000-0003-0023-4192

https://doi.org/10.36311/1984-8900.2021.v13n35.p268-297

(ii) Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;

(iii) Princípio do terceiro excluído: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não havendo uma terceira opção.

Segundo Feitosa e Paulovich (2005), a separação entre a lógica clássica e não clássica não é completamente clara, mas pode-se destacar alguns aspectos diferenciadores. As lógicas não clássicas costumam se diferenciar da lógica clássica por serem baseadas em linguagens com maior poder de expressão, por partilharem princípios distintos e/ou por admitirem semânticas distintas.

Tendo a lógica clássica como referência, são definidas duas categorias de lógicas não clássicas: as complementares e as alternativas (HAACK, 2002). As complementares são lógicas que respeitam os princípios aristotélicos da lógica clássica; enquanto que as alternativas negam um ou mais daqueles princípios.

Dentre as lógicas não clássicas alternativas, estão as lógicas intuicionistas. A principal característica das lógicas intuicionistas é que elas não respeitam o princípio do terceiro excluído, ou seja, para uma proposição φ qualquer, nem sempre vale $\varphi \vee \neg\varphi$. As lógicas intuicionistas estão fortemente associadas ao construtivismo matemático.

Neste texto é trabalhada uma lógica intuicionista em especial, a lógica I_1, introduzida por Sette e Carnielli (1995), apresentada originalmente em um sistema dedutivo axiomático e com uma semântica matricial trivalente.

Neste artigo está a elaboração de um sistema de tablôs para a lógica I^1. Ao iniciarmos o trabalho, não tínhamos encontrado na literatura um sistema de tablôs para tal lógica, contudo neste processo de avaliação e revisão, encontramos o artigo de Santos e Silvestrini (2021) que também apresenta um sistema de tablôs para I^1. Bem, considerando que o problema é o mesmo, mas as respostas não são idênticas, cremos que temos uma contribuição original. Tablôs para lógicas multivaloradas estão presentes na literatura por bastante tempo. O que caracteriza uma abordagem específica é a sua resposta à questão formulada. No caso, a formulação deste artigo tem o destaque de que embora I^1 seja um sistema trivalente, o sistema aqui apresentado não precisa de ramificações em três ramos, como usual, mas no máximo de dois ramos. Trata-se então de um sistema diádico e como os tablôs constituem um método de prova interessante do ponto de vista computacional, por se tratar de procedimento de caráter finito, de relativa eficiência e neste caso diádico, então ele tem alguma vantagem computacional, apesar de agora não mais ter a primazia de ser o primeiro.

A primeira seção traz uma breve visão sobre matemática construtiva e o intuicionismo, refletindo sobre a chamada "crise dos fundamentos" e os seus impactos.

A seguir, a lógica I^1 é apresentada como no original em (SETTE; CARNIELLI, 1995). Na terceira seção, por sua vez, é feita uma apresentação geral do método dos tablôs, trazendo um pouco de sua história e apresentando um sistema de tablôs para a lógica proposicional clássica. Também estão algumas reflexões sobre provadores automáticos de teoremas baseados em tablôs, vistos do ponto de vista da computação.

Por fim, em uma seção é apresentado o nosso sistema de tablôs para a lógica I^1, e nas duas seguintes fica demonstrado que tal sistema é completamente adequado para a lógica I^1.

1. Matemática construtiva e intuicionismo

Em certo momento da História, o homem de passado longínquo criou a noção de contagem, provavelmente para a contagem de objetos, pessoas, animais, elementos, que faziam parte de sua vida e eram importantes para sua sobrevivência. A partir da contagem, surgiu a ideia de número, e com a evolução da linguagem, surgiu também a aritmética, ainda que muito simples e rudimentar. E, por milhares de anos, a Matemática estava limitada a essas noções, trabalhando apenas com números e talvez formas elementares. Nesse contexto, temos o surgimento da geometria Euclidiana, na Grécia Antiga, de forma que a Matemática deixou de se restringir aos números, passando a tratar também de formas geométricas, dando origem ao conceito de objeto matemático (RAMOS, 2013).

Ao longo da História, a Matemática continuou a se desenvolver e, no século XIX, em especial, tivemos a criação de diversos novos conceitos abstratos, de novos objetos matemáticos, principalmente na geometria e na álgebra. E na mesma medida que esses conceitos eram desenvolvidos, crescia um incômodo em parte da comunidade matemática, incômodo que culminara na seguinte pergunta: "De onde vêm esses objetos matemáticos?". Uma possível resposta é baseada nas teorias de Platão, uma das filosofias da Matemática mais bem aceitas no século XIX, e ainda aceita por muitos, o platonismo.

Essa corrente defende a existência de um mundo abstrato e imutável, que contém todos os elementos matemáticos. E neste contexto, o papel do matemático não é, então, o de construir novos objetos matemáticos, mas especificamente de descobrir algum objeto que ainda não tenha sido descortinado, mas repousa neste mundo ideal (RAMOS, 2013).

Porém, parte da comunidade matemática não aceita muito naturalmente essas ideias, e o incômodo destes matemáticos cresce na medida em que a Matemática passa a lidar com conceitos cada vez mais abstratos, alguns ainda mal definidos, como era em certo momento o de infinitesimal, e outros considerados por alguns matemáticos como mal interpretados e/ou mal administrados, como o conceito de infinito. Isto acabou levando à chamada “crise dos fundamentos”, momento em que surgiu três novas escolas que rompiam com o pensamento platônico: o formalismo, o logicismo e o intuicionismo (FRAENKEL; YEHOSHUA; LEVY, 1984) e (RAMOS, 2013). Neste artigo, o foco é o intuicionismo.

Os intuicionistas seguem a corrente mais ampla de pensamento denominada de construtivismo matemático, tendo como precursor o matemático holandês L. E. J. Brouwer. Os seguidores dessa corrente defendem que um objeto matemático existiria apenas a partir do momento em que o agente matemático conseguisse construí-lo em sua teoria, através de uma atividade mental sequencial e metódica. Diferente da corrente clássica e do logicismo, o intuicionismo rejeita que a Matemática seja um produto derivado da lógica. Segundo Brouwer, os princípios básicos da Matemática (os axiomas) seriam resultados da intuição, o que motivou o nome dessa escola.

O intuicionismo é conhecido por seus ataques às provas não-construtivas e ao princípio do terceiro excluído. Um dos pontos mais importantes que faz diferença entre a lógica intuicionista e a lógica clássica é exatamente a aceitação ou não do princípio do terceiro excluído.

Segundo a lei do terceiro excluído, para qualquer proposição φ é válida a fórmula $\varphi\vee\neg\varphi$. Para os matemáticos clássicos esse princípio é sempre válido, independente da natureza da proposição (sentença) φ. Já pela ótica de Brouwer, esse princípio é válido apenas para conjuntos finitos, ou situações muito bem postas, não podendo ser expandido para os conjuntos infinitos quaisquer. A rejeição do princípio do terceiro excluído por Brouwer se dá, basicamente, pela sua interpretação dos conectivos ou operadores lógicos.

Outra forma de entendermos essa visão intuicionista é relacionarmos os conceitos de prova e validade intuicionista com a Computação, ou mais especificamente, com a Computabilidade. Pode-se definir, intuitivamente, que um determinado objeto matemático é construtível se é possível obtê-lo através de uma atividade mental sequencial e metódica e é computável se existe um algoritmo, ou seja, uma sequência finita de regras ou instruções a serem aplicadas de forma mecânica, que o construa (Dias; Lima, 2010). Dessa forma, fica claro que existe uma forte relação entre os conceitos "construtível" e "computável".

Pensando por este aspecto, considere o problema da decisão para *C*, em que dado *x*, deseja-se saber se existe algum algoritmo que permite decidir se $x \in C$ ou $x \notin C$. Se a resposta é afirmativa, então o problema é algoritmicamente solúvel, e *C* é decidível. Caso contrário, o problema é algoritmicamente insolúvel, e *C* é indecidível (não decidível). Do ponto de vista clássico, a disjunção $x \in C \vee x \notin C$ deve ser considerada verdadeira, pelo princípio do terceiro excluído, independente do fato de se poder decidir, ou não, qual das duas proposições é a verdadeira. Para os intuicionistas, porém, isto não é o bastante, e a disjunção $x \in C \vee x \notin C$ só pode ser considerada verdadeira se é efetivamente possível decidir se $x \in C$ ou se $x \notin C$, em algum processo construtivo. Por isso, devido à existência de problemas indecidíveis e problemas em aberto na Matemática, os intuicionistas não consideram válido o princípio do terceiro excluído.

Em 1918, Brouwer passou a desenvolver uma nova teoria de conjuntos, independente do princípio do terceiro excluído, a qual romperia com as teorias mais aceitas até então. Esse trabalho no desenvolvimento de uma teoria intuicionista dos conjuntos é chamado de "segundo ato" do intuicionismo. Algumas das motivações para a criação de uma nova teoria de conjuntos é o fato de a análise clássica ser muito dependente da construção dos números reais, proposta, por exemplo, por Richard Dedekind, com uso do axioma da escolha. Todavia, estes resultados são considerados não construtivos, devido à construção de Dedekind com os conjuntos infinitos de cortes e o axioma da escolha, que impõe a existência de uma escolha, mas sem explicitar qual é essa escolha (RAMOS, 2013).

Em princípio, os intuicionistas esperavam que o desenvolvimento do intuicionismo culminaria em uma apresentação simples e elegante da matemática pura. Porém, ao contrário, a análise intuicionista se tornara cada vez mais complexa. Isso não preocupava Brouwer, que chegou a dizer que "as esferas da verdade são menos transparentes que as da ilusão" (FERREIRÓS, 2008). Todavia, isso impactou muito o intuicionismo, pois levou grande parte da comunidade de matemáticos da época a perder nele o interesse.

Posteriormente, com o aumento das pesquisas na área da computação, eminentemente algorítmica e construtiva, surgiu novamente o interesse nessa escola. Isso devido à que a computação resolve os problemas de forma algorítmica, em natureza construtiva, como já foi apontado anteriormente. Dessa forma, surgiram várias técnicas e teorias baseadas no intuicionismo, que possuem aplicações teóricas e práticas para a computação. Como exemplo, temos a teoria intuicionista dos tipos, criada por Martin-Löf em 1971, que além de sua importância teórica, pode ser utilizada de forma prática em programas feitos para auxiliar nas provas de teoremas e no desenvolvimento de linguagens funcionais (RAMOS, 2013).

A lógica I^1, de nosso interesse central neste trabalho, é de caráter intuicionista e passamos agora à sua apresentação.

2. A lógica I^1

A lógica I^1 foi introduzida por Sette e Carnielli (1995). Trata-se de uma lógica proposicional e intuicionista, que surge como contraparte da lógica paraconsistente P^1.

A lógica P^1 introduz um terceiro valor de verdade além dos valores Booleanos clássicos {T, F}, em que {T} representa o valor lógico verdadeiro, e {F} o valor falso. Esse terceiro valor foi originalmente representado por T* e difere de T apenas com relação à negação. Porém, tanto T* quanto $\neg$T* correspondem a verdades.

Por outro lado, a lógica I^1 também insere um terceiro valor de verdade, o valor lógico F*, que diferente de F apenas em relação à negação. De modo similar à P^1, tanto F* quanto $\neg$F* são considerados falsos. Neste artigo, usaremos outra notação para os valores de verdade: 1 para o valor V, 0 para F e ½ para F*.

A lógica I^1 é considerada intuicionista por não admitir o Princípio do Terceiro Excluído, para fórmulas atômicas, o que pode ser verificado a partir do modelo axiomático proposto por Sette e Carnielli (1995) para a caracterização de I^1. Esta caracterização é dada a seguir.

A *linguagem proposicional* de I^1 é composta por três grupos de símbolos: *variáveis proposicionais* $\{p_1, p_2, p_3, ...\}$, *operadores* (conectivos) lógicos $\{\neg, \rightarrow\}$ (para negação e implicação, respectivamente) e *símbolos auxiliares* {), (}.

As suas fórmulas são definidas indutivamente, como nas linguagens proposicionais, a partir das fórmulas atômicas, as variáveis proposicionais, pelos operadores lógicos.

Se $Var(I^1) = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$ é o conjunto das variáveis proposicionais da lógica I^1, então o conjunto das *fórmulas* de I^1, denotado por $For(I^1)$, é determinado por:

(i) se $i \in \mathbb{N}$ e $p_i \in Var(I^1)$, então $p_i \in For(I^1)$;

(ii) se $\alpha \in For(I^1)$, então $\neg\alpha \in For(I^1)$;

(iii) se α e $\beta \in For(I^1)$, então $\alpha\rightarrow\beta \in For(I^1)$.

Os parênteses servem como marcadores.

Se α, β e γ são fórmulas, então o sistema dedutivo de I^1 é determinado por:

Axiomas:

Ax_1: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Ax_2: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Ax_3: $(\neg \neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow ((\neg \neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg \alpha)$

Ax_4: $\neg \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

Regra de Dedução: a única regra de I^1 é a *Modus Ponens*:

MP: $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$.

Na presença dos axiomas Ax_1 e Ax_2 e da regra MP, certamente, em I^1 vale o Teorema da Dedução $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \gamma \rightarrow \delta$ (FEITOSA, PAULOVICH, 2005).

I^1 é uma lógica com três valores de verdade $\{0, ½, 1\}$, em que o único valor distinguido, que corresponde à verdade, é 1; e $\{\neg, \rightarrow\}$ são os seus operadores básicos, cujas tabelas de verdade destes operadores são:

	$\neg$
0	1
½	0
1	0

$\rightarrow$	0	½	1
0	1	1	1
½	1	1	1
1	0	0	1

Definição 2.1: A semântica matricial de I^1 é dada por:

$$\mathcal{M}_{I^1} = (\{0, ½, 1\}, \neg, \rightarrow, \{1\}),$$

com o conjunto de valores distinguidos $\{1\}$.

Em I^1 pode-se definir uma negação forte, uma disjunção e uma conjunção da seguinte maneira:

$$\sim\alpha =_{\text{def}} \alpha \to \neg(\alpha\to\alpha)$$

$$\alpha\vee\beta =_{\text{def}} (\sim\alpha\to\beta)$$

$$\alpha\wedge\beta =_{\text{def}} \neg(\alpha\to\sim\beta),$$

com as seguintes tabelas:

	~
0	1
½	1
1	0

∨	0	½	1
0	0	0	1
½	0	0	1
1	1	1	1

∧	0	½	1
0	0	0	0
½	0	0	0
1	0	0	1

Pode-se, então, observar que as fórmulas compostas recebem valores apenas no conjunto {0, 1}.

Definição 2.2: Uma valoração para I^1 é uma função v: $Var(I^1) \to \{0, ½, 1\}$, que é estendida para o conjunto $For(I^1)$ segundo as interpretações dadas aos operadores introduzidos anteriormente.

Definição 2.3: Uma fórmula $\varphi \in For(I^1)$ é válida segundo $\mathcal{M}_{I^1}$, se, para toda I^1-valoração v, tem-se que $v(\varphi) = 1$.

Uma fórmula válida tem sua última coluna constituída apenas pelo valor 1.

A relação de implicação lógica ou consequência semântica para I^1 é dada da seguinte forma. Se $\Gamma \subseteq For(I^1)$, então temos que $v(\Gamma) = \{v(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$.

Definição 2.4: Se $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq For(I^1)$, então Γ implica φ quando para toda I^1-valoração v, se $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$, então $v(\varphi) = 1$.

Portanto:

$$\Gamma \vDash_{I^1} \varphi \Leftrightarrow v(\Gamma) \subseteq \{1\} \Rightarrow v(\varphi) = 1.$$

Pode-se construir tabelas de verdade de fórmulas da lógica I^1, que sendo uma lógica trivalente, terá tabelas com 3^n linhas, para n o número de variáveis proposicionais.

Tomando como exemplo as tabelas para o axioma Ax_1 e para as fórmulas $\alpha \vee \neg \alpha$ e $\neg\neg\alpha \to \alpha$:

(a) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$:

α	$\to$	$(\beta$	$\to$	$\alpha)$
0	**1**	0	1	0
0	**1**	½	1	0
0	**1**	1	0	0
½	**1**	0	1	½
½	**1**	½	1	½
½	**1**	1	0	½
1	**1**	0	1	1
1	**1**	½	1	1
1	**1**	1	1	1

(b) $\alpha \vee \neg\alpha$:

α	$\vee$	$(\neg$	$\alpha)$
0	**1**	1	0
½	**0**	0	½
1	**1**	0	1

(c) $\neg\neg\alpha \to \alpha$:

$(\neg\neg$	$\alpha)$	$\to$	α
0	0	**1**	0
1	½	**0**	½
1	1	**1**	1

Logo, a fórmula do exemplo (a) é válida em I^1, enquanto as dos exemplos (b) e (c), que são tautologias na lógica clássica, não valem em I^1.

Sette e Carnielli (1995) destacam que a fórmula $\neg\neg\alpha \to \alpha$ é I^1-válida para o caso em que α não é uma variável de I^1, não é atômica.

Eles apresentam uma prova a partir do sistema dedutivo axiomático, mas pela sua tabela de verdade também é possível perceber isso, visto que a fórmula $\neg\neg\alpha \to \alpha$ só é falsa quando $v(\alpha) = ½$, o que nunca acontece com fórmulas não atômicas. Tal característica desta proposição é importante para a demonstração de que o sistema axiomático da lógica I^1 é completo para a semântica matricial $\mathcal{M}_{I^1}$.

Agora, definiremos dois novos operadores a partir desta proposição:

$\circ\alpha =_{def} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

$\bullet\alpha =_{def} \neg \circ\alpha.$

Tais operadores apresentam as seguintes tabelas de verdade:

	o
0	1
½	0
1	1

	•
0	0
½	1
1	0

O sistema dedutivo axiomático da lógica I^1 é correto e completo para a semântica matricial $\mathcal{M}_{I^1}$.

Sette e Carnielli (1995) já realizaram tal demonstração. Uma demonstração alternativa está em (PAIOLA; FEITOSA, 2020).

3. Sobre os tablôs

Nesta seção é apresentado um método dedutivo alternativo ao axiomático, o método dos tablôs. Essa apresentação é relevante, pois posteriormente é apresentado a lógica I^1 em um sistema de tablôs.

O método dos tablôs é bastante interessante do ponto de vista computacional, pois é um sistema de prova, na maioria das vezes, mais rápido que a tabela-verdade, além de ser de mais fácil implementação.

A seguir, é abordado brevemente a origem do método, os principais autores que influenciaram o desenvolvimento desse sistema de prova e, também, explicitado algumas de suas características. Em seguida, apresenta-se, segundo Smullyan (1968), os tablôs analíticos para a lógica proposicional clássica (LPC).

Por fim, são feitas algumas considerações sobre os aspectos computacionais dos sistemas de tablôs analíticos, pensando em termos de implementação.

Além dos autores citados durante o texto, este capítulo tem como base as apresentações do método dos tablôs feitas por Helen Gomes da Silva (2018) e Luiz Henrique da Cruz Silvestrini (2005).

3.1 Histórico dos tablôs

Pode-se apontar Lewis Carroll como precursor do método dos tablôs, apesar de ser conhecido mundialmente por ser autor do famoso livro “Alice no país das maravilhas”, e não por seus trabalhos na área da lógica. Carrol introduziu um método de decisão para um encadeamento de silogismos e denominou esse sistema como árvore, devido à semelhança desse método com as árvores genealógicas, que crescem de cima para baixo. Outra semelhança é que este tipo de sistema também é um método de refutação (Silva, 2018).

A partir dos estudos de Gentzen (1935), foram introduzidos novos sistemas de provas, caracterizados por demonstrar a validade de um argumento (dedução) de forma mais rápida e finita. Esses sistemas de Gentzen assumem o princípio da subfórmula, isto é, se uma fórmula inicial φ tem uma demonstração, então existe uma demonstração de φ que contém apenas subfórmulas de φ.

Inspirado por Gentzen, Beth (1965) introduziu o método de tablôs semânticos. Sua motivação principal era a busca de contraexemplos. Anteriormente, Hintikka (1955) desenvolveu seu sistema de tablôs, também com inspirações semânticas. Para Hintikka, a prova é uma tentativa de construção de um modelo, no qual assumimos $\neg\varphi$ como verdadeira. Se a suposição falhar, então φ é verdadeira ou válida.

Motivada pelos trabalhos de Beth, Lis (1960) apresentou outro método de tablôs semânticos, além de um sistema de dedução natural, conhecido hoje como tablôs não assinalados.

Finalmente, Raymond Smullyan (1968) introduziu os tableaux analíticos, uma variante dos tablôs semânticos de Lis e, de acordo com Golzio (2011), uma versão mais simplificada de tablô, principalmente se comparado aos sistemas de Beth e de Hintikka.

A principal característica dos tablôs analíticos está no fato de que este sistema de prova assume o princípio da subfórmula, da mesma forma que nos sistemas de Gentzen. Porém, esse princípio não é seguido à risca, daí seu aspecto analítico, exigindo menos restrições. Para Smullyan, dada uma fórmula inicial, vamos às partes fundamentais desta, ou alguma fórmula equivalente, para que diminuamos seu grau, definido pelo número de ocorrências de conectivos lógicos (SILVESTRINI, 2005).

Esse sistema também é um método de refutação, visto que para provar que uma fórmula φ é válida, primeiramente assumimos que ela é não válida. A partir disso, se na expansão do tablô, encontrarmos uma contradição em todas as possibilidades de análise da fórmula, então concluímos que φ é válida. Caso contrário, ela não é válida.

Atualmente, o método de tablôs analíticos são considerados como uma possibilidade de implementação de provadores automáticos de teoremas, pois este sistema é caracterizado como um algoritmo. Silva, Finger e Melo (2006) apresentaram algumas formas de se fazer essa implementação. Em especial, eles destacam dois pontos fundamentais: as estratégias computacionais e as estruturas de dados. As estratégias computacionais são responsáveis por implementar uma condição determinística de escolha em cada etapa não-determinística do programa, ou seja, decidir como ocorrerá a expansão do tablô, qual regra deve ser aplicada, dentre as possíveis. Já as estruturas de dados se referem a como serão representadas e armazenadas as informações do tablô no programa.

3.2 Sistema de Tablôs para a LPC

O método de tablôs analíticos para a lógica proposicional clássica abordado nesta seção é baseado em Smullyan (1968).

A seguir, apresentamos algumas definições importantes para o método dos tablôs; algumas dessas definições, especialmente as relacionadas com árvores, também são baseadas em (Aho; Hopcroft; Ullman, 1983) e (Shaffer, 2011), para nos aproximarmos da terminologia da computação. Abordamos também as regras de expansão para a lógica proposicional clássica e trazemos alguns exemplos.

Definição 3.1: Uma árvore não ordenada **T** é uma coleção que contém os seguintes itens:

(i) um conjunto S de indivíduos denominados nós;

(ii) uma função h que relaciona à cada nó α de S um número inteiro positivo $h(\alpha)$, chamado de nível de α.

(iii) uma relação R definida sobre S, de modo que $\alpha\, R\, \beta$ significa que α é o pai, ou antecessor, de β, ou ainda, que β é filho, ou sucessor, de α.

A relação R deve satisfazer as seguintes condições:

(iv) existe um único nó α de nível 1. Este nó é denominado a raiz da árvore **T**.

(v) todo nó de S tem um único pai, exceto a raiz.

(vi) para quaisquer nós α e β, se α é o pai de β, então $h(\beta) = h(\alpha) + 1$.

Definição 3.2: O grau de α, denotado por $G(\alpha)$, é dado pela quantidade de filhos de α.

Definição 3.3: Se α não tem filhos, ou seja, $G(\alpha) = 0$, então α é um nó terminal ou folha.

Definição 3.4: Uma árvore **T** é ordenada quando há uma função ρ que associa a cada nó β, tal que $G(\beta) > 1$, uma sequência $\rho(\beta)$ de todos os filhos de β, sem repetições.

Definição 3.5: Uma árvore ordenada é diádica, ou binária no contexto da computação, quando cada nó tem no máximo dois filhos.

Definição 3.6: Uma árvore é finitamente gerada quando cada nó possui um número finito de filhos. Uma árvore **T** é finita se ela tem um número finito de nós.

Definição 3.7: Um ramo é um conjunto finito ou enumerável de nós a partir da raiz, de maneira que cada nó do ramo é pai do próximo.

Definição 3.8: Se o ramo tem um número finito de nós, então é chamado ramo finito, caso contrário, ele é um ramo infinito.

Para que o tablô seja desenvolvido, são necessárias as regras de expansão. Iniciamos a construção do tablô com a negação da fórmula inicial φ, ou seja, temos como nó inicial a fórmula $\neg\varphi$.

A partir dela, podemos encontrar dois tipos de fórmulas, que chamaremos de fórmulas do tipo A e do tipo B, de maneira que cada uma delas caracteriza um conjunto de regras.

A seguir, apresentamos estes tipos de fórmulas e suas características.

Fórmulas do tipo A: as consequências de uma fórmula do tipo A são consequências diretas, isto é, não geram ramificações. As regras de expansão que possuem fórmulas desse tipo são também denominadas regras do tipo conjuntivo.

Fórmulas do tipo B: no caso das fórmulas do tipo B, as consequências não são diretas, gerando dois ramos distintos, cada um deles sendo uma possibilidade de análise da fórmula inicial. As regras de expansão que contém fórmulas do tipo B são chamadas de regras do tipo disjuntivo.

Seguem abaixo as regras de expansão para a LPC. Usamos tablôs com fórmulas sinalizadas, com 1 para indicar a verdade e 0 para indicar a falsidade. Sobre cada regra colocamos o nome que estamos dando a ela, e que usaremos na construção dos tablôs para indicar quais regras estão sendo aplicadas em cada passo.

Regras do tipo A:

A¬	A¬	A∧	A∨	A→
$0\ \neg\alpha$ | $1\ \alpha$	$1\ \neg\alpha$ | $0\ \alpha$	$1\ \alpha\wedge\beta$ | $1\ \alpha$ $1\ \beta$	$0\ \alpha\wedge\beta$ | $0\ \alpha$ $0\ \beta$	$0\ \alpha\to\beta$ | $1\ \alpha$ $0\ \beta$

Regras do tipo B:

A∧	A∨	A→
$0\ \alpha\wedge\beta$ / \\ $0\ \alpha$ $0\ \beta$	$1\ \alpha\vee\beta$ / \\ $1\ \alpha$ $1\ \beta$	$1\ \alpha\to\beta$ / \\ $0\ \alpha$ $1\ \beta$

Após a aplicação de todas as regras de expansão possíveis no tablô, temos as seguintes situações:

(i) ou encontramos uma contradição φ e $\neg\varphi$ em cada possibilidade de análise da fórmula, isto é, em cada ramo, e diante disso concluímos que a fórmula inicial é válida.

(ii) outra situação é, em ao menos um ramo, não encontrarmos nenhuma contradição após a aplicação de todas as regras de expansão possíveis. Neste caso, temos um contraexemplo e podemos concluir que a fórmula φ é não válida.

Apresentamos, agora, algumas definições para formalizar as noções acima.

Definição 3.9: Um ramo é fechado quando ocorrem nele fórmulas φ e $\neg\varphi$, ou com fórmulas sinalizadas, $0\ \varphi$ e $1\ \varphi$.

Para indicarmos que um ramo é fechado usaremos o símbolo $\times$.

Definição 3.10: Um ramo é aberto se não é fechado.

Definição 3.11: Um tablô analítico **T** para a fórmula φ é uma árvore ordenada diádica, em que os seus nós são fórmulas e sua construção ocorre da seguinte maneira. Iniciamos ao colocar $\neg\varphi$ (ou $0 \quad \varphi$) na raiz. A seguir, considerando-se que **T** é um tablô construído para φ e que ψ é uma fórmula não atômica e uma de suas folhas, então podemos expandir **T** de acordo com uma das duas operações abaixo:

(i) se a fórmula ψ é do tipo A, então o tablô é expandido em um único ramo pelas consequências diretas de ψ;

(ii) se a fórmula ψ é do tipo B, então o tablô é expandido com dois ramos a partir de ψ, o que gera uma bifurcação dada pelas consequências diretas de ψ. Teremos então o filho esquerdo e o filho direito de ψ.

Definição 3.12: Um tablô é fechado quando todos os seus ramos são fechados e é aberto se algum ramo não é fechado.

Definição 3.13: Um conjunto Δ de fórmulas é fechado se há um tablô fechado para uma conjunção das fórmulas de Δ.

Esta definição fica evidente quando Δ é um conjunto finito de fórmulas.

Definição 3.14: Uma fórmula δ é consequência analítica de um conjunto de fórmulas Δ, o que denotamos por $\Delta \Vdash \delta$, quando o conjunto $\Delta \cup \{\neg\delta\}$ é um conjunto fechado de fórmulas.

Se tratamos com fórmulas sinalizadas, então temos o caso em que $\Delta \cup \{0 \quad \delta\}$ é um conjunto fechado de fórmulas. Como nos mostra Smullyan (1968), as duas apresentações são equivalentes.

Sendo assim, para avaliarmos a consequência analítica $\Delta \Vdash \delta$, construímos o tablô de $\Delta \cup \{\neg\delta\}$. Se ele for fechado, então vale a consequência, e se ele não for fechado, não vale, pois há pelo menos um contraexemplo.

Definição 3.15: Uma fórmula φ é demonstrável pelo tablô **T**, o que é denotado por $\Vdash \varphi$, somente se é possível gerar um tablô fechado a partir da fórmula inicial ¬φ, ou seja, se o conjunto {¬φ} é fechado.

Definição 3.16: Um ramo de **T** é completo se ele é fechado ou se não existem mais possibilidades de aplicação de regras de expansão no ramo.

Definição 3.17: Se todos os ramos de **T** são completos, então ele é um tablô completo.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de dedução de fórmulas pelo método dos tablôs analíticos para a LPC, em que, de acordo com os tablôs analíticos de Smullyan, as fórmulas são marcadas ou sinalizadas, atribuindo valor 1 para as fórmulas verdadeiras e 0 para as falsas.

Exemplos:

(a) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & 0 \quad (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi) & \\
 & | & \\
 & 1 \quad (\neg\psi \to \neg\varphi) & \\
 & 0 \quad (\varphi \to \psi) & \\
 & | & \\
 & 1 \quad \varphi & \\
 & 0 \quad \psi & \\
 / & & \backslash \\
0 \ \neg\psi & & 1 \ \neg\varphi \\
| & & | \\
1 \ \psi & & 0 \ \varphi \\
\times & & \times
\end{array}
$$

Como encontramos um tablô fechado para a fórmula inicial, provamos que a fórmula $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ é válida.

A seguir, por simplicidade, não indicaremos mais o traço vertical | nos tablôs.

(b) $\varphi\vee\neg\varphi$

$$
\begin{array}{c}
0 \quad \varphi\vee\neg\varphi \\
0 \quad \varphi \\
0 \quad \neg\varphi \\
1 \quad \varphi \\
\times
\end{array}
$$

A demonstração desta fórmula é praticamente imediata, ainda assim este exemplo foi apresentado por se tratar da demonstração de que vale a Lei do Terceiro Excluído para a LPC. Posteriormente é apresentado um tablô para a mesma fórmula, mas para a lógica I^1.

Agora um exemplo de não validade.

(c) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & 0 \quad (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi) & \\
 & 1 \quad (\varphi \rightarrow \psi) & \\
 & 0 \quad (\varphi \wedge \psi) & \\
 & 0 \quad \varphi & \\
 & 0 \quad \psi & \\
/ & & \backslash \\
0 \quad \varphi & & 1 \quad \psi \\
 & & \times
\end{array}
$$

Neste exemplo, não encontramos contradição em todos os ramos do tablô, sendo que todos estão completos. Logo, a fórmula inicial não é válida.

3.3 Provadores automáticos de teoremas a partir de sistemas de tablôs

Provadores automáticos de teoremas são programas computacionais utilizados para a demonstração de teoremas.

Assim, um provador estabelece se uma determinada sentença (uma conjectura) é uma consequência lógica de um conjunto de sentenças (axiomas e hipóteses).

Provadores de teoremas são usados na formalização e resolução de problemas em várias áreas, permitindo lidar com certos tipos de provas que, por seu tamanho ou complexidade, seriam difíceis de se construir manualmente (SANTOS, 2010).

Dependendo da lógica escolhida, o problema de decidir a validade de uma conjectura pode variar desde o trivial até o impossível. Para a LPC, o problema é decidível, porém NP-completo, o que significa que podemos precisar de algoritmos de tempo exponencial para resolvê-lo (SANTOS, 2010). Um tal método de prova que poderia ser implementado computacionalmente, por exemplo, é o das tabelas-verdade. Todavia, um grande problema é que este método é bastante exaustivo, pois verifica todos os valores de verdade de todas as proposições envolvidas no teste.

Neste sentido, o método dos tablôs já é uma alternativa mais favorável, pois nem sempre tem que se verificar todos os valores de verdade possíveis para cada proposição.

Contudo, em muitos casos o seu custo computacional ainda se equipara às tabelas de verdade. Por isso, os provadores de teoremas para a LPC e para a lógica clássica de primeira ordem, geralmente, são baseados no método de provas por resolução, que usam como base a forma normal conjuntiva (ou clausal) (COUTINHO, 2017) ou (SILVA; FINGER; MELO, 2006).

O método por resolução ainda tem um custo computacional alto, em princípio, porém existem técnicas, normalmente tendo como base teórica teoremas da lógica clássica, como o Teorema de Herbrand, que permitem que provadores feitos a partir desse método tenham mais eficiência, ainda que tenham custo exponencial em certos casos (COUTINHO, 2017) ou (RODRIGUES, 2010).

Sendo assim, pode parecer que o método dos tablôs não seja um bom método para ser usado em um provador automático de teoremas. Todavia, quando lógicas não clássicas são colocadas em jogo, deve-se que considerar que nem todas admitem que qualquer fórmula tem uma fórmula equivalente na forma clausal (RODRIGUES, 2010), impedindo o uso do método por resolução.

Mesmo para as lógicas que admitem forma clausal, faz-se necessário um estudo mais aprofundado para descobrir se as técnicas que melhoram sua eficiência também podem ser aplicadas à lógica em questão, ou então descobrir técnicas específicas para aquela lógica.

De alguma forma, para uma lógica não clássica que admita um método de tablôs, um provador de teoremas baseado nesse método parece uma solução atraente, ao menos até que se desenvolva um método de prova mais eficiente, que possa ser implementado para este sistema.

Considerando a implementação de um provador de teoremas a partir do método dos tablôs, Silva, Finger e Melo (2006) apresentaram algumas formas de se fazer isso, ressaltando dois pontos fundamentais que precisam ser analisados: as estratégias computacionais e as estruturas de dados.

As estratégias computacionais são importantes, pois o método dos tablôs pode ser caracterizado por um algoritmo não-determinístico, de modo que certas escolhas devem ser feitas em determinados pontos dos algoritmos. Nesse caso temos dois pontos de escolha: a escolha do ramo sobre o qual procedemos a expansão do tablô, e a escolha da regra a ser aplicadas.

Em resumo, as estratégias computacionais têm como objetivo acrescentar uma etapa determinística em um programa não determinístico, para possibilitar a sua implementação, e buscar isso de forma que o algoritmo obtenha a melhor eficiência possível.

As estruturas de dados tratam de como as fórmulas e o próprio tablô são representados e armazenados computacionalmente. O uso adequado de estruturas de dados ajuda a gerar provadores mais sofisticados e eficientes, além de facilitar a implementação.

4. Tablôs para a lógica I^1

Nesta seção é apresentado um método de tablôs para a lógica I^1, que foi inicialmente apresentada em um sistema axiomático por Sette e Carnielli (1995). Tal método será denotado a partir de agora por $\mathbf{T}[I^1]$.

Primeiramente, deve-se que considerar que o método de tablôs analíticos de Smullyan (1968) foi dado para a lógica proposicional clássica e para a lógica de primeira ordem clássica, porém a lógica I^1 é intuicionista e trivalente. Sendo assim, não se pode simplesmente usar as regras de expansão apresentadas por Smullyan, pois há a necessidade de regras de expansão específicas para o desenvolvimento dos tablôs da lógica I^1.

Para se evitar a criação de muitos ramos pela aplicação de uma única regra, incluiremos um novo operador, o operador $\square$ (análogo ao operador de necessidade das lógicas modais), definido como segue:

$$\square\alpha =_{\text{def}} \neg(\alpha \to \neg\alpha).$$

Dessa forma, temos a seguinte interpretação para este operador:

	$\square$
0	0
½	0
1	1

Agora, podemos apresentar as regras de expansão e de fechamento de ramo do sistema $\mathbf{T}[I^1]$.

Definição 4.1: Um ramo no sistema $\mathbf{T}[I^1]$ é fechado quando ocorre um dos seguintes casos:

(i) $v(\alpha) = m$ e $v(\alpha) = n$, com $m \neq n$

(ii) $v(\alpha) = ½$, para $\alpha \notin Var(I^1)$.

Segundo as tabelas de I^1, a condição (i) é encontrada se ocorrer:

(1) $v(\alpha) = 0$ e $v(\alpha) = ½$
(2) $v(\alpha) = 0$ e $v(\alpha) = 1$
(3) $v(\alpha) = ½$ e $v(\alpha) = 1$
(4) $v(\Box\alpha) = 0$ e $v(\alpha) = 1$
(5) $v(\Box\alpha) = 1$ e $v(\alpha) = 0$
(6) $v(\Box\alpha) = 1$ e $v(\alpha) = ½$.

Definição 4.2: Um tablô de **T**[I^1] é fechado se todos os seus ramos são fechados.

As condições de fechamento da observação acima, que envolvem o operador de necessidade, permitem evitar algumas ramificações, tornando o tablô mais simples e curto. Em alguns dos tablôs que serão apresentados adiante, estas regras não serão consideradas, sempre aplicando as regras de expansão para o operador de necessidade; isso é feito para que se possa perceber o quanto o tablô seria menos extenso caso os ramos tivessem sido fechados antes da aplicação das regras de expansão para tal operador.

Regras de expansão do tipo A:

$1\neg$	$1\Box$	$1\wedge$	$0\vee$	$0\rightarrow$
$1\ \neg\alpha$ ↓ $0\ \alpha$	$1\ \Box\alpha$ | $1\ \alpha$	$1\ \alpha\wedge\beta$ | $1\ \alpha$ $1\ \beta$	$0\ \alpha\vee\beta$ | $0\ \Box\alpha$ $0\ \Box\beta$	$0\ \alpha\rightarrow\beta$ | $1\ \alpha$ $0\ \Box\beta$

Regras de expansão do tipo B:

$0\neg$	$0\Box$	$0\wedge$	$1\vee$	$1\rightarrow$
$0\ \neg\alpha$ / \\ $1\ \alpha$ $½\ \alpha$	$0\ \Box\alpha$ / \\ $0\ \alpha$ $½\ \alpha$	$0\ \alpha\wedge\beta$ / \\ $0\ \Box\alpha$ $0\ \Box\beta$	$1\ \alpha\vee\beta$ / \\ $1\ \alpha$ $1\ \beta$	$1\ \alpha\rightarrow\beta$ / \\ $0\ \Box\alpha$ $1\ \alpha$ $1\ \beta$

Estas regras de expansão foram obtidas a partir da análise da interpretação dos operadores segundo a semântica matricial $\mathcal{M}_{I^1}$.

O nosso sistema de tablôs não é exatamente analítico, no sentido de Smullyan, posto que para os operadores binários, para alguns casos, dada a fórmula γ, na regra de expansão introduzimos $\Box\gamma$, que não é uma subfórmula da fórmula da dada. Contudo, esse é o único caso em que isso ocorre, e as regras do operador de Necessário ainda tendem para as suas subfórmulas atômicas.

As regras de Necessário poderiam não ser inclusas, mas os tablôs teriam muito mais ramificações e possivelmente seriam mais complexos. Além disso, com a inserção deste operador, as regras de expansão se tornam muito mais intuitivas, bastante semelhantes com as regras do sistema de tablôs para a lógica proposicional clássica, o que julgamos ser um aspecto positivo de tal avaliação.

Diferente da lógica proposicional clássica, a lógica I^1 é trivalente, possuindo três possíveis valores de verdade e sendo apenas um deles distinguido. Sendo assim, se quisermos demonstrar em I^1 que, $\Gamma \vdash \varphi$, não basta se verificar que o conjunto $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é um conjunto fechado de fórmulas, como acontecia no método dos tablôs para a lógica proposicional clássica, pois isso só mostraria que não pode acontecer que $v(\varphi) = 0$, supondo que Γ não é um conjunto fechado de fórmulas, mas não engloba o caso em que $v(\varphi) = ½$.

Para resolver essa questão, pode-se utilizar o operador $\Box$, definido nessa seção, pois se $\Gamma \cup \{\neg\Box\varphi\}$ for um conjunto fechado de fórmulas, então não pode acontecer $v(\varphi) = 0$ e nem $v(\varphi) = ½$, como pode ser facilmente verificado a partir da interpretação do operador $\Box$. Contudo, pode-se dispensar a inserção do operador $\Box$ quando φ é uma fórmula não atômica, porque sabemos que fórmulas não atômicas não podem assumir o valor ½. A partir dessas considerações, temos as seguintes definições.

Definição 4.3: Uma fórmula φ é consequência analítica de um conjunto de fórmulas Γ, o que denotamos por $\Gamma \Vdash \varphi$, quando $\Gamma \cup \{\neg\Box\varphi\}$ é um conjunto fechado de fórmulas.

Definição 4.4: Uma fórmula não atômica ψ, isto é, $\psi \notin Var(I^1)$, é consequência analítica de um conjunto de fórmulas Γ, o que denotamos por $\Gamma \Vdash \varphi$, quando o conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é fechado.

Como é usual, uma fórmula é demonstrável em $\mathbf{T}[I^1]$ se ela é uma consequência analítica do conjunto $\varnothing$. Certamente, uma fórmula atômica não pode ter uma demonstração. Assim:

Definição 4.5: Uma fórmula ψ, $\psi \notin \mathrm{Var}(\mathrm{I}^1)$, é demonstrável pelo tablô $\mathbf{T}[\mathrm{I}^1]$, o que é denotado por $\Vdash \psi$, se é possível gerar um tablô fechado a partir da fórmula inicial $\neg\psi$, ou seja, se o conjunto $\{\neg\psi\}$ é fechado.

Como exemplo de demonstração via o sistema de tablôs $\mathbf{T}[\mathrm{I}^1]$, considere-se a fórmula $\alpha \vee \neg\alpha$, que é um teorema da lógica proposicional clássica, mas não da lógica I^1.

```
              0   α ∨ ¬α
                    |
                 0   □α
               0   □¬α
              /         \
        0  α              ½   α
       /     \           /    \
  0 ¬α     ½ ¬α     0 ¬α     ½ ¬α
  /   \       ×     /   \       ×
1 α    ½ α        1 α    ½ α
 ×      ×          ×
```

Como previsto, não encontramos um tablô fechado. Além disso, também podemos perceber que apenas um ramo ficou aberto, ramo no qual a fórmula α assume o valor ½, o que também era esperado, pois anteriormente foi demonstrado que esse é o único caso para qual não vale a fórmula $\alpha \vee \neg\alpha$.

A seguir é demonstrado a adequação deste método, isto é, a prova da equivalência entre o sistema axiomático da lógica I^1 e o sistema de tablôs $\mathbf{T}[\mathrm{I}^1]$. Deste modo, apresenta-se a prova da dedução axiomática para a consequência analítica, e a demonstração de que todos os resultados obtidos em $\mathbf{T}[\mathrm{I}^1]$ também são demonstrados na semântica matricial $\mathcal{M}_{\mathrm{I}^1}$.

Assim, para provar que todas as deduções obtidas na lógica I^1 também são deduzidas no nosso sistema $\mathbf{T}[\mathrm{I}^1]$ e vice-versa, deve-se que provar o seguinte:

$$\Gamma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

A segunda equivalência já foi demonstrada em (SETTE; CARNIELLI, 1995) e também em (PAIOLA; FEITOSA, 2020), então o caminho a ser seguido será:

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

5. Da dedução axiomática para a dedução nos tablôs

Nessa seção está a demonstração de que se há uma prova segundo o método axiomático de I^1, também há uma prova no sistema de tablôs $\mathbf{T}[I^1]$.

Teorema 5.1: Se $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi$.

Demonstração: Por indução no comprimento de dedução $\Gamma \vdash \varphi$.

Se $n = 1$, então temos os seguintes casos: $\varphi \in \Gamma$ ou φ é um axioma.

Se $\varphi \in \Gamma$, naturalmente $\Gamma \Vdash \varphi$, pois φ ocorre com valores distintos no tablô e por isso o tablô fecha.

Agora, se φ é um axioma, então $\Vdash \varphi$ e, portanto, $\Gamma \Vdash \varphi$. Diante disso, provamos agora que cada axioma da lógica I^1 gera um tablô fechado em $\mathbf{T}[I^1]$.

Ax_1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$$\begin{array}{ccc}
 & 0\ \alpha \to (\beta \to \alpha) & \\
 & | & \\
 & 1\ \alpha & \\
 & 0\ \square(\beta \to \alpha) & \\
/ & & \backslash \\
0\ \beta \to \alpha & & \tfrac{1}{2}\ \beta \to \alpha \\
| & & \times \\
1\ \beta & & \\
0\ \square\alpha & & \\
\times & &
\end{array}$$

Ax_2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

$$\begin{array}{ccc}
 & 0\ (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) & \\
 & 1\ \alpha \to (\beta \to \gamma) & \\
 & 0\ \square((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) & \\
/ & & \backslash \\
0\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) & & \tfrac{1}{2}\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \\
1\ (\alpha \to \beta) & & \times \\
0\ \square(\alpha \to \gamma) & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
/ & & \backslash \\
\tfrac{1}{2}\ (\alpha \to \gamma) & & 0\ (\alpha \to \gamma) \\
\times & & 1\ \alpha \\
 & & 0\ \square\gamma \\
 & & /\quad\backslash
\end{array}$$

$0\ \Box\alpha$ $\quad$ $1\ \alpha$
$\times$ $\quad$ $1\ \beta$
/ \
$0\ \Box\alpha$ $\quad$ $1\ \alpha$
$\times$ $\quad$ $1\ (\beta \rightarrow \gamma)$
/ \
$0\ \Box\beta$ $\quad$ $1\ \beta$
$\times$ $\quad$ $1\ \gamma$
$\times$

Ax3: $(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)$

$0\ (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)$
$1\ (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$
$0\ \Box((\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)$
/ \
$0\ (\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha$ $\quad$ $½\ (\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha$
$1\ (\neg\neg\alpha \rightarrow \beta)$ $\quad$ $\times$
$0\ \Box\neg\alpha$
/ \
$½\ \neg\alpha$ $\quad$ $0\ \neg\alpha$
$\times$ $\quad$ / \
$0\ \Box(\neg\neg\alpha)$ $\quad$ $1\ \neg\neg\alpha$
/ \ $\quad$ $1\ \beta$
$0\ \neg\neg\alpha$ $\quad$ $½\ \neg\neg\alpha$ $\quad$ $0\ \neg\alpha$
$\times$ $\quad$ $\times$ $\quad$ / \
$0\ \Box(\neg\neg\alpha)$ $\quad$ $1\ \neg\neg\alpha$
$\times$ $\quad$ $1\ \neg\beta$
$0\ \beta$
$\times$

Ax4: $\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

$0\ \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
$1\ \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$
$0\ \Box(\alpha \rightarrow \beta)$
$0\ \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
/ \
$1\ \alpha \rightarrow \beta$ $\quad$ $½\ \alpha \rightarrow \beta$
/ \ $\quad$ $\times$
$0\ \alpha \rightarrow \beta$ $\quad$ $½\ \alpha \rightarrow \beta$
$\times$ $\quad$ $\times$

Se $n > 1$, então no último passo da dedução aplicamos a regra MP. Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \Vdash \sigma \rightarrow \varphi$ e $\Gamma \Vdash \sigma$. Daí, segue que para toda valoração v, se $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$. Então $v(\sigma \rightarrow \varphi) = 1$ e $v(\sigma) = 1$.

Deste modo, consideraremos o tablô $\Gamma, \sigma, \sigma \rightarrow \varphi \Vdash \varphi$.

$1\ \sigma$

$$
\begin{array}{ccc}
 & 1\ \sigma \rightarrow \varphi & \\
 & 0\ \Box\varphi & \\
 / & & \backslash \\
0\ \Box\sigma & & 1\ \sigma \\
\times & & 1\ \varphi \\
 & & \times
\end{array}
$$

Portanto, $\Gamma \Vdash \varphi$. ■

6. Da dedução nos tablôs para a consequência semântica

Na seção anterior foi provado que a dedução axiomática da lógica I^1 implica na dedução em tablôs de $\mathbf{T}[I^1]$. Para concluir a demonstração de equivalência entre o sistema de tablôs $\mathbf{T}[I^1]$ e a lógica I^1, falta provar: $\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$. Contudo, para poder fazer esta demonstração, serão introduzidos antes alguns resultados e definições.

Definição 6.1: Um conjunto Θ de fórmulas sinalizadas é saturado para baixo se satisfaz as seguintes condições:

(i) nenhuma fórmula sinalizada ocorre em Θ com dois valores distintos;

(ii) se em Θ ocorre alguma fórmula sinalizada α de tipo A, então $\alpha_1 \in \Theta$ e $\alpha_2 \in \Theta$, em que α_1 e α_2 são fórmulas sinalizadas e imediatas de α, conforme sua respectiva regra;

(iii) se em Θ ocorre alguma fórmula sinalizada β do tipo B, então $\beta_1 \in \Theta$ ou $\beta_2 \in \Theta$, para β_1 e β_2 fórmulas sinalizadas e imediatas de β, conforme sua respectiva regra.

Lema 6.2: Todo ramo saturado e aberto de um tablô é um conjunto saturado para baixo.

Demonstração: Como o ramo é aberto, então nenhuma fórmula aparece no ramo com duas valorações distintas, o que satisfaz a condição (i) da definição de conjunto saturado para baixo.

Além disso, como o ramo é saturado, segue que todas as possíveis regras do tablô já foram utilizadas e o tablô não pode mais ser expandido.

Logo, se existe uma fórmula do tipo A no ramo, então α_1 e α_2 também estão no ramo, o que atende a condição (ii).

Pelo mesmo motivo, se há uma fórmula do tipo B no ramo, então ou β_1 ou β_2 está no ramo, o que cumpre a condição (iii). ■

Agora, estendemos a noção de valoração para as fórmulas sinalizadas.

 Kínesis, Vol. XIII, n° 35, dezembro 2021, p.268-297

Definição 6.3: Se v é uma valoração e k $\in$ {0, ½, 1}, então a fórmula sinalizada k φ é distinguida segundo a valoração v, o que é denotado por k $\varphi \in$ D, se $v(\varphi)$ = k.

Assim, k $\varphi \in$ D $\Leftrightarrow$ se $v(\varphi)$ = k.

Definição 6.4: Uma valoração v satisfaz um conjunto Θ de fórmulas sinalizadas se para toda fórmula sinalizada k ψ que ocorre em Θ, tem-se k $\psi \in$ D.

Definição 6.5: Um conjunto Θ de fórmulas sinalizadas é satisfatível se existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq$ D, ou seja, para toda $\psi \in \Theta$, k $\psi \in$ D.

Lema 6.6: Se Θ é um conjunto satisfatível de fórmulas sinalizadas, então:

(i) se uma fórmula α do tipo A está em Θ, então $\Theta\cup\{\alpha_1, \alpha_2\}$ é satisfatível;

(ii) se uma fórmula β do tipo B está em Θ, então $\Theta\cup\{\beta_1\}$ é satisfatível ou $\Theta\cup\{\beta_2\}$ é satisfatível.

Demonstração: (i) Regras do tipo A:

Tomemos a fórmula 1 $\neg\varphi$. Como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq$ D. Daí, $v(\neg\varphi)$ = 1 e, então, $v(\varphi)$ = 0 e, portanto, $v(\Theta\cup\{0\ \ \varphi\})$ $\subseteq$ D.

Agora, para 1 $\Box\varphi$. Como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq$ D. Daí, $v(\Box\varphi)$ = 1 e, então, $v(\varphi)$ = 1 e, portanto, $v(\Theta\cup\{1\ \ \varphi\}) \subseteq$ D.

Se temos a fórmula marcada 0 $\varphi \rightarrow\psi$, como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq$ D . Logo, se $v(\varphi \rightarrow \psi)$ = 0 , então, $v(\varphi)$ = 1 e $v(\Box\psi)$ = 0 , portanto, $v(\Theta\cup\{1\ \ \varphi, 0\ \ \Box\psi\}) \subseteq$ D .

Para a fórmula 1 $\varphi\wedge\psi$, como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq$ D . Logo, se $v(\varphi\wedge\psi)$ = 1, então, $v(\varphi)$ = 1 e $v(\psi)$ = 1 e, portanto, $v(\Theta\cup\{1\ \ \varphi, 1\ \ \psi\}) \subseteq$ D.

Já para a fórmula $0\ \ \varphi\vee\psi$, como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Logo, se $v(\varphi\vee\psi) = 0$, então, $v(\Box\varphi) = 0$ e $v(\Box\psi) = 0$ e, portanto, $v(\Theta\cup\{0\ \ \Box\varphi, 0\ \ \Box\psi\}) \subseteq D$.

(ii) Regras do tipo B:

Tomemos a fórmula $0\ \ \neg\varphi$. Como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\neg\varphi) = 0$ e, então, $v(\varphi) = 1$ ou $v(\varphi) = ½$. Se $v(\varphi) = 1$, então $v(\Theta\cup\{1\ \ \varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\varphi) = ½$, então $v(\Theta\cup\{½\ \ \varphi\}) \subseteq D$. De qualquer modo há um ramo tal que $v(\Theta\cup\{k\ \ \varphi\}) \subseteq D$.

Agora, para $0\ \ \Box\varphi$. Como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Daí, $v(\Box\varphi) = 0$ e, então, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = ½$. Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\Theta\cup\{0\ \ \varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\varphi) = ½$, então $v(\Theta\cup\{½\ \ \varphi\}) \subseteq D$.

Se temos a fórmula $1\ \varphi \rightarrow\psi$, como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Logo, se $v(\varphi \rightarrow\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$, ou $v(\Box\varphi) = 0$. Se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$, então $v(\Theta\cup\{1\ \ \varphi, 1\ \ \psi\}) \subseteq D$; e se $v(\Box\varphi) = 0$, então $v(\Theta\cup\{0\ \ \Box\varphi\}) \subseteq D$.

Para a fórmula $0\ \ \varphi\wedge\psi$, como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Logo, se $v(\varphi\wedge\psi) = 0$, então, $v(\Box\varphi) = 0$ ou $v(\Box\psi) = 0$. Se $v(\Box\varphi) = 0$, então $v(\Theta\cup\{0\ \ \Box\varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\Box\psi) = 0$, então $v(\Theta \cup\{0\ \ \Box\psi\}) \subseteq D$.

Já para a fórmula $1\ \varphi\vee\psi$, como o conjunto Θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\Theta) \subseteq D$. Logo, se $v(\varphi\vee\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$. Se $v(\varphi) = 1$, então $v(\Theta\cup\{1\ \ \varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\psi) = 1$, então $v(\Theta\cup\{1\ \ \psi\}) \subseteq D$.

Em todos os casos, algum ramo do tablô é satisfatível. ■

Diante dessas definições e do lema acima podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 6.7: $\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$.

Demonstração: Faremos a demonstração pela contrapositiva.

Se $\Gamma \nvDash \varphi$, então existe uma valoração v, tal que $v(\Gamma) \subseteq D$ e $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = ½$.

Seja Θ_0 o conjunto de fórmulas sinalizadas que ocorrem no tablô inicial de Γ, de modo que $v(\Theta_0) \subseteq D$. Mostramos que a cada passo de expansão do tablô, sempre vai existir um ramo Θ_i tal que $v(\Theta_i) \subseteq D$.

Suponha que $v(\Theta_{i-1}) \subseteq D$. Se o ramo Θ_{i-1} é expandido por uma fórmula do tipo A, pelo lema anterior (i), temos que $v(\Theta_i) \subseteq D$. No caso do ramo Θ_{i-1} ser expandido por uma fórmula do tipo B, segue pelo lema anterior (ii), que $v(\Theta_i) \subseteq D$.

Assim, em todos os casos, temos um ramo Θ_i tal que $v(\Theta_i) \subseteq D$. Logo, sempre haverá um ramo satisfatível em Θ, o qual é um conjunto saturado para baixo.

Portanto, $\Gamma \nVdash \varphi$. ■

Diante destes resultados, temos que o nosso sistema de tablôs $\mathbf{T}[I^1]$ é dedutivamente equivalente à lógica I^1.

Considerações finais

A meta principal deste trabalho era a elaboração de um sistema de tablôs para a lógica I^1. E assim foi feito, com as devidas demonstrações da adequação deste sistema à versão lógica axiomática de I^1.

Tal sistema de tablôs possui diversas vantagens, iniciando por ser um método de prova bastante intuitivo e mais rápido do que o método axiomático ou pela justificação via tabelas de verdade.

Também é importante destacar as vantagens computacionais deste método, caracterizado como um procedimento evidentemente algorítmico e que permite o uso de diversas estratégias na sua implementação com o objetivo de melhorar sua eficiência.

O sistema de tablôs aqui arquitetado não é exatamente analítico, devido a que algumas regras de expansão, para uma dada a fórmula γ, introduzem a fórmula $\Box\gamma$, que não é subfórmula de γ. Porém, as regras de expansão para o operador de necessidade geram apenas subfórmulas daquela fórmula, de modo que cada tablô ainda tende para as suas subfórmulas atômicas, com eventuais inserções temporárias do operador de necessidade.

Isso poderia ter sido contornado facilmente, porém os tablôs possuiriam mais ramificações, se tornando mais complexos e menos intuitivos.

Além disso, a inserção do operador não só posterga as ramificações como permite que elas sejam em alguns casos evitadas, uma vez que podemos fechar o ramo caso já tenha sido encontrada alguma contradição envolvendo este operador, como por exemplo, casos em que ocorre no mesmo ramo as fórmulas sinalizadas $0 \quad \Box\gamma$ e $1 \quad \gamma$. Isso permite com que as provas sejam mais simples e curtas.

Este trabalho trouxe ainda uma breve revisão sobre lógicas não clássicas, intuicionismo e métodos de provas, e, sempre que possível, estes conceitos foram analisados de um ponto de vista computacional.

Referências

J AHO, A. V; HOPCROFT, J. E; ULLMAN, D. *Data Structures and Algorithms*. Boston: Addison-Wesley Professional, 1983.

BETH, E. W. *The foundations of mathematics***:** a study in the philosophy of science. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1965. v.581.

COUTINHO, J. V. S. F. *Apostila de Lógica*. 2017. Disponível em: <\url{http://www.cin.ufpe.br/~mlogica/livros/Apostila_joao_victor.pdf}>. Acesso em: 10 mar. 2019.

DIAS, M. F.; LIMA, L. W. C. *Teoria da recursão*. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FERREIRÓS, J. The Crisis in the Foundations of Mathematics. In: GOWERS, T. *Princeton Companion to Mathematics*. Princeton: Princeton University Press 2008. p. 142-156.

FRAENKEL, A. A.; YEHOSHUA, B; LEVY, A. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Volume 67: Foundations of Set Theory. Amsterdam: North Holland Publishing, 1984.

GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische Schlieben. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 39, n. 1, p. 405-431, 1935.

GOLZIO, A. C. J. *Elementos algébricos para a noção de 'poucos' e sua formalização em sistemas dedutivos*. Dissertação de mestrado, FFC - Universidade Estadual Paulista. Marília, 2011.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. Tradução de Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

HINTIKKA, J. Form and content in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica*, v. 8, 1955.

LIS, Z. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica*, v. 10, 1960.

PAIOLA, P. H.; FEITOSA, H. A. Lógica intuicionista I_1: correção e completude. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 17, p. 01-11, 2020.

RAMOS, A. F. *Matemática Construtiva e o Intuicionismo*. Trabalho de Graduação, Centro de Informática - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013. Disponível em: <\url{https://www.cin.ufpe.br/~tg/2013-1/afr.pdf}>. Acesso em: 22 ago. 2019.

RODRIGUES, R. G. *Sobre os Fundamentos da Programação Lógica Paraconsistente*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2010. Disponível em: <\url{https://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/dissertacao_Tarcisio.pdf}>. Acesso em: 10 mar. 2019.

SANTOS, E. O. V.; SILVESTRINI, L. H. C. O Método dos tableaux aplicado ao Cálculo Trivalente e Intuicionista I1. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, v. 22, n. 3, p. 393-412, 2021.

SANTOS, J. B. *Infraestrutura para provadores interativos de teoremas na Web*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010. Disposto em: <\url{https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/16318/16318_2.PDF}>. Acesso em: 09 mar. 2019.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A. *Maximal Weakly-Intuitionistic Logics*. Studia Logica, Springer, v. 55, n. 1, p. 181-203, 1995.

SHAFFER, C. A. *Data Structures and Algorithm Analysis in C++*. Mineola: Dover Publications, 2011.

SILVA, F. S. C.; FINGER, M.; MELO, A. C. V. *Lógica para computação*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

SILVA, H. G. *A Lógica da Verdade Pragmática em tableaux*. Dissertação de Mestrado, FFC - Universidade Estadual Paulista. Marília, 2018.

SILVESTRINI, L. H. C. *Tableaux e indução na lógica do plausível*. Dissertação de Mestrado, FFC - Universidade Estadual Paulista. Marília, 2005.

SMULLYAN, R. M. *First-order logic*. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.

Recebido em: 17/08/2021
Aprovado em: 26/10/2021