

DA INTERPRETAÇÃO INTUICIONISTA DE PROVA À REJEIÇÃO DO PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO

FROM THE INTUITIONISTIC INTERPRETATION OF PROOF TO THE REJECTION OF THE LAW OF EXCLUDED MIDDLE

Filipe Borges Albernaz¹

Resumo: O presente artigo trata do argumento intuicionista para a rejeição do princípio do terceiro excluído. A intenção é apresentar de forma clara as motivações que sustentam uma posição, por um lado, polêmica, por outro lado, natural, quando vista como uma inevitável consequência dos fundamentos da teoria e não apenas como uma mera atitude anticlássica. Para tal, devemos enfatizar o papel fundamental da noção de *construção* para o intuicionismo, além das consequências que recaem sobre a interpretação da lógica subjacente e sobre a interpretação da noção de *verdade da proposição*. Ao término do artigo, esperamos ter apresentado um cenário mais claro acerca desse tema que marca um traço de continuidade da empreitada intuicionista desde Brouwer até Martin-Löf.

Palavras-chave: Fundamentos da Matemática. Intuicionismo. Prova. Construção. Existência. Lógica.

Abstract: This paper deals with the intuitionist argument for rejecting the law of excluded middle. The intention is to clearly present the motivations that support a position, on the one hand, of controversy, on the other hand, natural, when viewed as an inevitable consequence of the foundations of the theory and not just as a mere anticlassical attitude. To this end, we must emphasize the fundamental role of the notion of *construction* for intuitionism, in addition to the consequences that fall on the interpretation of the underlying logic and on the interpretation of the notion of *truth of the proposition*. By the end of the paper, we hope to have presented a clearer picture of this theme that marks a continuity trace of the intuitionist endeavor from Brouwer to Martin-Löf.

Keywords: Foundations of Mathematics. Intuitionism. Proof. Construction. Existence. Logic.

Introdução

A proposta intuicionista, desde Brouwer até Martin-Löf, tem como ponto de partida a interpretação de *provas como construções mentais*, também conhecida como BHK (das iniciais de Brouwer, Heyting e Kolmogorov) ou *proof interpretation*². Neste artigo apresentamos um argumento de que essa noção de *construção mental* é primitiva na proposta intuicionista, tendo importantes consequências para a interpretação de outras

¹ Doutorando em Filosofia - UFG. Financiamento: CAPES/FAPEG. E-mail: albernaz@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5350-5243>

² TROELSTRA; VAN DALEN, 1988, p. 9-10; 24.

noções matemáticas, mas também do ponto de vista da lógica, como a interpretação dos conectivos lógicos até a própria rejeição do princípio do terceiro excluído (PTE, de agora em diante), talvez uma das consequências menos compreendidas por parte dos matemáticos de tradição clássica e que devesse ser melhor apresentada. A interpretação BHK imediatamente chama atenção para a natureza dos objetos matemáticos e sua representação formal, de modo que a interpretação intuicionista de *proposição* rejeita a ideia de que o expediente linguístico concreto possa ter uma relação causal com a necessidade de um fato matemático. Na verdade, a proposta indica que apenas as construções mentais seriam tratadas como objetos matemáticos. Expedientes linguísticos, ao máximo, acompanhariam construções mentais, podendo ser tratadas como expressões de um conhecimento matemático individual por parte de um sujeito cognoscente. A proposição intuicionista é, então, interpretada como as condições a serem cumpridas por uma prova matemática, para que essa seja reconhecida como tal e afirmada por meio de uma asserção. Vemos que há aqui, do ponto de vista intuicionista, uma distinção fundamental entre proposição e asserção, mas que não devemos discutir nesse artigo. Nessa distinção, a prova ou construção mental, desempenha um papel fundamental que impossibilita o uso do princípio do terceiro excluído em determinados contextos matemáticos. Além da explicação do que leva o intuicionismo a rejeitar esse princípio lógico, deve-se sempre fazer a ressalva de que, apesar da recusa, os teoremas clássicos devem poder ser expressos intuicionisticamente, por ser a linguagem intuicionista mais expressiva que a clássica, conforme sugerido por Prawitz (2015, p. 28) e possibilitado pelo sistema formal conhecido como Teoria Intuicionista dos Tipos, desenvolvida por Martin-Löf. Assim, a rejeição do princípio do terceiro excluído deve ser tratada, não como uma opção arbitrária, mas como uma consequência da interpretação intuicionista de construção mental como prova, mas que em nada diminui ou limita a capacidade expressiva de uma linguagem intuicionista ou a prática matemática como já conhecemos.

1. Início da disputa de fundamentos da matemática

Nada exprime melhor a importância da discussão de fundamentos da matemática do que a própria disputa, que já dura pelo menos desde o início do século XX. Poderíamos retroceder ainda mais e dizer que as sementes conceituais que motivariam a crise de fundamentos da matemática apareceram no fim do século XVIII e início do século XIX,

com Lobatchevsky (1834)³ e Dirichlet (1837)⁴, e as primeiras conexões de uma noção de *existência* (platônica) e a noção de *função matemática*. Por outro lado, também poderíamos citar Kronecker, no início do século XIX, e sua feroz rejeição a teoremas existenciais ou definições sem a devida contrapartida construtiva (EWALD, 1996, p. 942-3). Apesar de reconhecer o lastro dessa discussão, devemos avançar para o momento em que essas preocupações, por assim dizer, resultaram em uma reconhecida disputa de fundamentos da matemática.

A dissertação de Brouwer, de 1907, é considerada um dos marcos pois, até então, a Teoria dos Conjuntos parecia ser suficiente e satisfatória para a prática matemática tendo um crescente apoio no meio, não havendo até então um grande concorrente. Por outro lado, os problemas causados pelos paradoxos produzidos pela Teoria dos Conjuntos, em especial o de Russell, mas também alguns resultados polêmicos como o Axioma da Escolha de Zermelo de 1904, repercutiram muito negativamente na comunidade, dando algum espaço a movimentos anticlássicos, como o próprio intuicionismo.

Apesar de, já na dissertação, Brouwer enfatizar grande parte de suas ideias intuicionistas, como a de construções mentais como provas e a independência da matemática em relação à lógica ou qualquer linguagem, é mesmo em 1908 que Brouwer publica um artigo⁵ com duras críticas contra o PTE da maneira como era utilizado até então por adeptos da matemática tradicional. Essas ideias deram início a um período que Hermann Weyl posteriormente chamou de “nova crise de fundamentos da matemática”⁶, fortemente combatida por clássicos de grande envergadura intelectual à época. Certamente, a posição clássica era liderada por Hilbert que, em 1921, apresenta, em clara reação ao intuicionismo, seu audacioso programa formalista, com o qual buscava provar que a consistência formal de toda a matemática clássica. Coincidentemente ou não, o fim da chamada crise de fundamentos ocorre a partir de 1928, após Brouwer apresentar suas 4 intuições⁷ que, segundo o próprio, seriam suficientes para dar fim ao debate.

³ viz. Youschkevitch. (1976, p.76).

⁴ viz. Youschkevitch. (1976, p.78).

⁵ Artigo *The Unreliability of the Logical Principles* de 1908, traduzido em van ATTEN, Mark; SUNDHOLM, Göran. L.E.J. Brouwer's 'Unreliability of the logical principles': A new translation, with an introduction. 2015.

⁶ Weyl publica em 1921 o artigo *neue Grundlagenkrise* (Nova crise de fundamentos) e se declara publicamente intuicionista.

⁷ Brouwer apresenta, em dezembro de 1927 em Amsterdã, 4 intuições que basicamente reforçam as ideias intuicionistas contra as interpretações clássicas de existência: (1) distinção entre linguagem matemática e uma teoria intuitiva matemática, (2) rejeição do uso indiscriminado do PTE, (3) o problema do PTE e do

Como em qualquer disputa, foi necessário pesar prós e contras em relação às propostas disponíveis. A verdade é que a proposta de Brouwer apresentava uma dificuldade de reprodução dos resultados matemáticos que a Teoria dos Conjuntos já apresentava à época. Dificuldade essa que mesmo Weyl (em WEYL, 1921 *apud* MANCOSU, 1998, p. 136; WEYL, 1930 *apud* WEYL, 2012, p. 29; e, mesmo muitos anos após o fim do debate, em WEYL, 1946 *apud* WEYL, 2012, p. 141), apontava a eficiência conjuntística a ponto de, em 1930, sugerir que, do ponto de vista científico, a proposta de Hilbert seria mais produtiva, apesar de que, do ponto de vista estritamente intuitivo-matemático, a fundamentação intuicionista ser a correta.

Com Brouwer, a matemática ganha a mais alta clareza intuitiva; sua doutrina é idealismo em matemática pensada até o fim. Mas, cheio de dor, o matemático vê a maior parte de suas imponentes teorias se dissolver no nevoeiro. (WEYL, 1921 *apud* MANCOSU, 1998, p. 136, *tradução nossa*)

Se alguém toma a matemática por si só, deve restringir-se a Brouwer às verdades da intuição [...] Mas em ciência natural [...] eu concedo o ponto de vista de Hilbert. (WEYL, 1930 *apud* WEYL, 2012, p. 29, *tradução nossa*)

Mas, no geral, a matemática de Brouwer é menos simples e muito mais limitada em poder do que a nossa matemática “existencial” familiar. É por essa razão que a grande maioria dos matemáticos hesita em seguir sua reforma radical. (WEYL, 1946 *apud* WEYL, 2012, p. 141, *tradução nossa*)

Em 1931, Gödel publica seus Teoremas de Incompletude⁸, que, por um lado, inviabilizavam as ideias de Hilbert de que a matemática poderia ser completamente formalizável, e por outro, iam ao encontro da essência das ideias intuicionistas de Brouwer. No entanto, isso não foi suficiente para manter a discussão de fundamentos da matemática. Mesmo após os paradoxos e os teoremas de Gödel, nos 30 anos seguintes, sem uma proposta construtiva viável do ponto de vista da prática da matemática, a uniformização e padronização da linguagem matemática conjuntística realizada por

princípio da solubilidade (*solvability*) são um e o mesmo problema, e (4) justificação de uma matemática formalista por meio da consistência é um círculo vicioso (HESSELING, 2003, p. 78).

⁸ GÖDEL, Kurt. Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, p. 173-198, 1931. In: Feferman, S. (Ed.). *Collected Works*. V. I. Oxford: Oxford University Press, 1986-1995.

Nicolas Bourbaki⁹ foi disseminada por todo o mundo, garantindo assim a hegemonia do que se pôde salvar da Teoria dos Conjuntos.

O intuicionismo e a discussão de fundamentos da matemática só voltaria a ganhar uma maior visibilidade e interesse a partir da década de 1960, quando Bishop (1967) apresenta seu livro “Fundamentos da Análise Construtiva” favorecendo, juntamente com uma crescente capacidade dos computadores, uma enxurrada de novas pesquisas sobre intuicionismo e construtivismo já na década seguinte (Beeson, 1985, p. xiv-xv). Bishop não retoma a discussão de fundamentos, mas a reabilita ao demonstrar construtivamente os teoremas fundamentais da Análise e da Teoria da Medida. Assim, poderíamos dizer que o grande papel de Bishop nesse contexto de disputa de fundamentos da matemática foi mostrar que, ao assumir uma fundamentação intuicionista, a Análise não seria perdida¹⁰ como imaginava Weyl, e grande parte da comunidade matemática.

[...] ambos [Brouwer e Hilbert] pensavam que, se alguém levasse a sério a matemática construtiva, seria necessário “abrir mão” das partes mais importantes da matemática moderna (como, por exemplo, a teoria das medidas ou análise complexa). Bishop mostrou que isso era simplesmente falso”. (BEESON, 1985, p. xv, *tradução nossa*)

Com a eliminação do suposto impacto negativo da adoção da fundamentação intuicionista para a matemática, passam a se tornar mais promissores os esforços em desenvolver uma proposta de formalização de uma matemática construtiva¹¹. Sem dúvida, a mais bem-sucedida é a Teoria Intuicionista dos Tipos de Martin-Löf, de 1984, que aparece como algo realmente inédito e promissor, ao oferecer uma fundamentação robusta e uma linguagem de alta capacidade expressiva, capaz de reproduzir os resultados da análise desenvolvida por Bishop. Portanto, a proposta de Martin-Löf é uma fundamentação intuicionista, mas também uma linguagem formal para uma matemática construtiva que a permite ser, atualmente, utilizada e reconhecida como uma alternativa para a fundamentação clássica. No entanto, cabe ressaltar que a base conceitual do Intuicionismo de Martin-Löf conta com a mesma noção fundamental de *construção*

⁹ Pseudônimo utilizado pelo coletivo de autores, de maioria francesa, que assinou uma série de publicações em matemática entre 1934 e 2016.

¹⁰ viz Beeson (1985, p. xv)

¹¹ Dentre essas tentativas, destacamos os casos de Nicolaas Govert de Bruijn chamado Automath (DE BRUIJN, 1968), mas também de Feferman, Friedman, Myhill (BEESON, 1985, p. xvi), Heyting e Kreisel (SUNDHOLM, 1983, p. 151). No entanto, nenhuma dessas tentativas era suficientemente confiável ou expressiva a ponto de ser considerada como uma alternativa viável para a fundamentação ou a linguagem conjuntística da matemática.

mental oferecida originalmente por Brouwer, bem como muitas das consequências filosóficas, para a lógica e, certamente, matemáticas. O mesmo pode ser dito de todas as tentativas anteriores de desenvolver um sistema formal para a matemática ou de desenvolver verificadores automáticos de provas¹², todos eles têm suas bases conceituais fundadas na obtenção construtiva de provas.

Assim, passa a ser de primeira importância esclarecer o possível mal-entendido acerca do que leva o intuicionismo a rejeitar o PTE, de modo que fique claro que não há qualquer implicância ou razão de cunho arbitrário por parte dessa proposta. De fato, o que vemos é uma consequência inevitável e, de certa maneira, de pouca importância, não fosse o caso de a fundamentação hegemônica conjuntística divergir quanto a sua utilização, e ter naquele princípio um expediente tão caro para a obtenção de provas matemáticas e para a compreensão da sua noção de *existência*.

2. Construção e existência

Ainda hoje, é possível ver o intuicionismo ser tratado, em departamentos de matemática, filosofia ou lógica, como sendo meramente uma fundamentação da matemática que essencialmente opta pela rejeição do PTE ou que admite apenas provas construtivas. Essa conclusão não é de todo incorreta, mas trata-se de uma visão simplista do que realmente é o intuicionismo. A principal razão para a não compreensão do intuicionismo em sua profundidade talvez recaia justamente na conclusão apressada quanto aos motivos que levam à rejeição do PTE. A partir do que entendemos ser a noção intuicionista fundamental, extraem-se consequências inevitáveis para a matemática e para a lógica, dentre elas a rejeição do PTE, bem como a conclusão de que provas intuicionistas devem ser necessariamente construtivas.

Daí a importância em se entender o contexto em que as ideias intuicionistas apareceram e ganharam eco. Como vimos, nas primeiras décadas do século XIX, deu-se o início da disputa de fundamentos da matemática polarizada entre defensores da Teoria dos Conjuntos e Intuicionistas. A disputa girava essencialmente em torno da noção de *existência*, de modo que a *existência* clássica era garantida por um realismo platônico, enquanto que o Intuicionismo se apresentava como um idealismo cuja noção fundamental de *existência* recaía sobre a noção de *construção mental* matemática, o único objeto

¹² Como nos casos do Automath (DE BRUIJN, 1968) e do Coq (BERTOT; CASTÉLAN, 2004).

matemático genuíno. Como consequência, temos a conhecida interpretação BHK, ou *construções* como provas de *proposições* matemáticas¹³.

Assim, a compreensão das ideias intuicionistas e suas consequências para a matemática passam necessariamente pela adequada compreensão da tese central da interpretação BHK. E entendemos que, para tal, o primeiro passo é proceder uma adequada caracterização da noção de *construção mental* enquanto prova matemática. Cabe dizer que essa noção não parece ser disputada no meio intuicionista e, segundo essa fundamentação, podemos dizer que a noção de *construção*:

- i. introduz a noção fundamental de *existência* intuicionista;
- ii. é uma atividade mental, independente da atividade linguística;
- iii. é sinônimo de prova.

Como mencionado anteriormente, a discussão acerca da noção de *existência* é central na disputa de fundamentos da matemática do início do século XIX¹⁴. A nosso ver, essa é a principal distinção entre a fundamentação clássica e a intuicionista, a raiz de todos os problemas. Assim, do ponto de vista filosófico, podemos dizer que atualmente temos duas importantes propostas de fundamentação da matemática, a já bastante difundida Teoria dos Conjuntos e a mais contemporânea e, por isso, menos conhecida, Teoria Intuicionista dos Tipos. Essa distinção quanto à interpretação da noção de *existência* diz respeito à forma como é concebida a lógica subjacente a cada teoria, ou ao menos é o que alegam alguns autores como Hesselring (2003, p. 187) e de Bruijn (1995, p. 46).

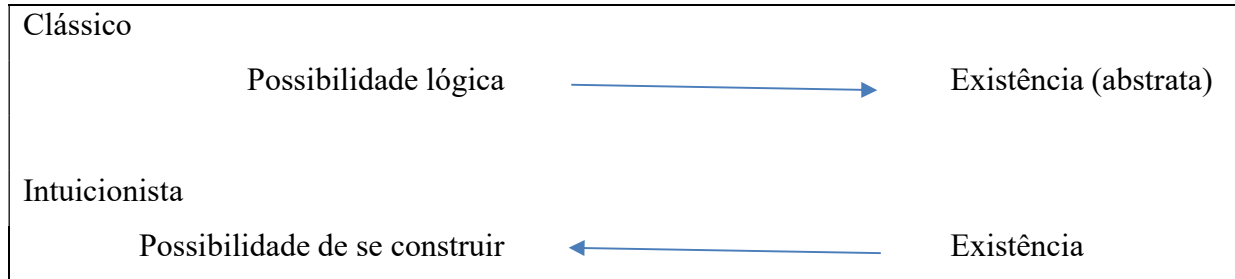
O tratamento da noção de *construção* resulta em uma interpretação própria da noção de *existência* no contexto intuicionista¹⁵. Talvez uma maneira simples, porém didática e iluminadora, de abordar o tema seja a partir da conexão entre possibilidade e existência. Para o clássico, possibilidade lógica garante uma existência abstrata do objeto. Já para o intuicionista, é a existência da construção garante a possibilidade de se construir o objeto. Em outras palavras, a possibilidade é dada como algo trivial a partir da

¹³ Brouwer (1975, p. 72) trata *proposições* como condições a serem cumpridas por uma *prova*.

¹⁴ The basic difference between intuitionism and formalism is, in Brouwer's view, a matter of ontology. (HESSELING, 2003, p. 76)

¹⁵ Devemos fazer a observação de que a noção de *existência* que tratamos aqui é uma noção fundamental e que não se confunde com a *existência* do quantificador existencial ou com as distinções acerca da noção de *existência* feitas por Martin-Löf em seu sistema. Por exemplo, para Martin-Löf a *existência* de objetos em seu sistema é condicionada à posse de um método de obtenção. Apesar de ter uma correspondência com a noção de *existência* apresentada por Brouwer, é uma caracterização particular do sistema de Martin-Löf.

“existência da construção” e não o contrário. Do ponto de vista clássico, a existência a partir de uma possibilidade “meramente” lógica, produz casos em que se deve admitir a incognoscibilidade de fatos e verdades matemáticas.



Na proposta de Brouwer, a *construção* matemática é tratada como “objeto matemático” que é, invariavelmente, uma entidade mental para os intuicionistas. O que nos resta é, então, apontar para a noção de *construção* como sendo a mais adequada e próxima a o que o clássico interpreta como “existência objetual”. Segundo essa interpretação, a noção de *existência* clássica tem sua equivalente intuicionista na noção de *construção*, i.e., pode-se falar de um objeto matemático, num contexto intuicionista, se e somente se ele pode ser construído (mentalmente), de modo que passa a ser redundante dizer de uma *construção* que ela existe ou mesmo que seria absurdo um objeto matemático existir sem ter sido devidamente construído. Nas palavras de Heyting (1956, p. 2, *grifo nosso, tradução nossa*): “No estudo de construções matemáticas mentais ‘**existir**’ deve ser sinônimo de ‘**ser construído**’”.

Está bem claro que a noção de existência que entra aqui não é a noção de existência que é expressa por meio do quantificador existencial: a noção de existência que entra aqui é a noção filosófica tradicional de existência de um conceito, ou existência de uma essência, se preferir, onde **ao dizer que um conceito tem existência, eu quero dizer que existe um objeto que se enquadra no conceito.** (MARTIN-LÖF, 1990, p. 141, *grifo nosso, tradução nossa*)

Como vemos, em Teoria dos Conjuntos, a noção de *existência* é conectada à ideia de uma realidade abstrata, de modo que a existência dos objetos estaria garantida independentemente de qualquer instância epistemológica. O resultado é uma lógica que admite algumas asserções, no mínimo, desafiadoras à compreensão, mas que são explicadas e, por que não dizer, respaldadas pela lógica subjacente à teoria. Um exemplo é a disjunção sobre a verdade ou falsidade da Conjectura de Goldbach, como sendo uma

proposição trivialmente verdadeira¹⁶, admitida classicamente, mas não intuicionisticamente. Isso porque, classicamente, a bivalência dessa, ou de qualquer outra conjectura, é dada como garantida a partir do PTE.

Do lado clássico, poder-se-ia argumentar que a conjectura de Goldbach trata basicamente de duas coisas: 1. da existência de números naturais pares, o que não é disputado intuicionisticamente, justamente por se ter um método construtivo para se obter qualquer natural, e 2. da possibilidade de se verificar construtivamente se um número natural par é igual à soma de dois primos, o que também não disputado intuicionisticamente por se ter um método de prova construtivo. No entanto, o que não se tem, até o momento, é um único método construtivo que, digamos, contemple os dois métodos anteriores, de modo a provar a conjectura. Não se coloca em questão a existência dos números naturais pares, ou de um método que verifique se um número específico é igual à soma de dois primos, mas sim a *existência* da prova de uma proposição específica, no caso, a conjectura de Goldbach.

Isso se deve porque, no intuicionismo, a noção de *existência* é conectada a uma noção de *atualidade da posse de um objeto* ou de *um método*, que permita, mesmo que em princípio, a obtenção do objeto. A lógica intuicionista, por sua vez, é considerada parte da linguagem e, portanto, dependente da fundamentação da matemática, não sendo possível extrair ou explicar a teoria a partir da lógica, tanto quanto não se deve esperar ser possível explicar ou extrair uma teoria a partir de qualquer linguagem que se proponha a exprimir essa teoria. Por exemplo, a partir da dedução natural de Gentzen e Prawitz¹⁷, não se extrai a interpretação fundamental intuicionista de *construções como provas*, mas sim o contrário.

As palavras de sua demonstração matemática meramente acompanham uma **construção matemática que é realizada sem palavras**. [...] As pessoas tentam, por meio de sons e símbolos, originar em outras pessoas **cópias de construções matemáticas** e raciocínios **que elas mesmas criaram; da mesma forma que elas tentam ajudar a própria memória**. Dessa maneira, a *linguagem matemática* surge, e como seu caso especial, a *linguagem do raciocínio lógico*. (BROUWER, 1975, p. 73, grifo nosso, tradução nossa)

Essa explicação nos parece crucial para a compreensão das consequências da fundamentação intuicionista para a lógica. Portanto, fica claro o ponto de vista de

¹⁶ Este exemplo é utilizado por Martin-Löf (1996, p. 27) para exemplificar a não admissibilidade de uma proposição verdadeira classicamente, mas que não foi provada.

¹⁷ PRAWITZ, Dag. Natural Deduction – A Proof-Theoretical Study. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1965.

Brouwer de que uma fundamentação da matemática deve preceder qualquer linguagem, inclusive a lógica. Em consequência, podemos dizer que ter a lógica como o início da fundamentação da teoria clássica significaria dizer que não há uma interpretação dessa lógica, de modo que ela não teria uma relação de dependência em relação à teoria, mas sim que a lógica é propriamente parte da teoria. Assim, a lógica seria prescritiva podendo ser utilizada para explicar a própria realidade abstrata admitida por aquela teoria. Uma das consequências negativas dessa falta de interpretação na concepção da lógica, apontada por de Bruijn, foi a dificuldade de compreensão das críticas de Brouwer ao uso clássico do PTE por parte da comunidade matemática, uma vez que até então o uso dessa lei era admitido em qualquer contexto, inclusive infinitos. “A ideia de que os valores da verdade são a base da lógica pode ter sido uma das razões pelas quais a rejeição de Brouwer da lei do terceiro excluído foi tão pouco compreendida em seu tempo” (DE BRUIJN, 1995, p. 46, *tradução nossa*).

Podemos dizer, então, que o intuicionismo não se inicia na lógica, mas isso por si só não diz onde se dá o início da teoria. Essa resposta encontra-se na noção intuicionista de “construção mental”. O termo “construção” é amplamente utilizado por autoproclamados construtivistas e intuicionistas e entendemos haver um consenso quanto a sua interpretação, i.e., ambos se referem à noção de *construção* explicada por Brouwer e Heyting. A interpretação de “construção como atividade mental” também não parece ser disputada, tornando-se bastante iluminadora a ideia de uma atividade mental como forma de evidência convincente¹⁸ a partir da qual é possível produzir uma asserção em uma dada linguagem, que nada mais é que uma alegação acerca de algo necessário, como deve ser qualquer asserção matemática. Essa interpretação faz da atividade mental a essência da matemática (e de sua prática), sendo utilizada por intuicionistas desde Brouwer, Heyting, Dummett, e mais recentemente, Martin-Löf e Prawitz.

Temos, portanto, na proposta intuicionista, um início a partir da noção fundamental de *construção* mental, independentemente de qualquer expediente linguístico, e tomada como único objeto matemático e sinônimo de prova. Como consequência, a noção fundamental de *existência* intuicionista está intimamente

¹⁸ A ideia de convencimento é utilizada por Martin-Löf (1984), especificamente de autoconvencimento, e fazendo a observação de que não há melhor maneira de se convencer alguém, como a si próprio, do que por meio de uma evidência ou prova, tratados como sinônimos por Martin-Löf (1987, p. 417), sendo também utilizada por Beeson (1985, p. xv) para dizer que as provas construtivas são convincentes.

conectada à noção de *construção*, sendo as *construções* os únicos objetos matemáticos considerados “existentes”.

Consistia na investigação da **construção matemática mental** como tal, sem referência a questões relativas à natureza dos **objetos construídos**, tais como se esses objetos existem independentemente de nosso conhecimento deles. (Heyting, 1956, p. 1, *grifo nosso, tradução nossa*) O principal ponto de vista [de Brouwer] é que a matemática como **uma construção mental não deve ser confundida com sua expressão linguística**. (BROUWER, 1975, p. XIV, *grifo nosso, tradução nossa*)

As expressões linguísticas teriam, assim, um papel específico para Brouwer. Elas seriam um meio para “originar cópias de construções matemáticas”, de modo que outras pessoas que tenham acesso a essas expressões possam, elas próprias, reproduzir a construção relativa àquelas expressões. Inclusive, um sujeito que executa o ato mental, a construção, e produz uma expressão linguística relativa a ela, pode a usar para, posteriormente, lembrar e executar novamente a construção, de modo que temos duas instâncias aqui, a expressão linguística (como uma demonstração matemática escrita no papel), entidade física, e a construção matemática, entidade mental subjetiva.

As palavras de sua demonstração matemática meramente acompanham uma **construção matemática que é realizada sem palavras**. [...] As pessoas tentam, por meio de sons e símbolos, originar em outras pessoas **cópias de construções matemáticas** e raciocínios **que elas mesmas criaram; da mesma forma que elas tentam ajudar a própria memória**. Dessa maneira, a *linguagem matemática* surge, e como seu caso especial, a *linguagem do raciocínio lógico*. (BROUWER, 1975, p. 73, *grifo nosso, tradução nossa*)

A construção é, portanto, um ato, um processo no tempo, e tem a si atribuído um caráter temporal, atual, podendo naturalmente ser executado novamente ou quantas vezes se queira. Por se tratar de um ato empírico, não se pode fazer a errônea conexão entre o ato de provar e aquilo que ele prova, a *proposição*¹⁹. No entanto, a asserção, o enunciado produzido a partir do ato da prova, esse sim é uma entidade física e que depende da execução do ato, i.e., construções são necessárias sempre que um sujeito produzir uma asserção nesse contexto de necessidade; i.e., em um contexto matemático. Em outras palavras, podemos dizer que construções e asserções têm uma relação de coincidência,

¹⁹ A relação de ordem entre *construção* e *proposição* não será explicada neste artigo, mas cabe dizer que a *proposição* não depende da execução de um ato construtivo.

i.e., não faz sentido falar em construção fora do contexto de uma asserção ou asserção sem uma correspondente construção.

Isso mostra o caráter fundamental e primitivo da noção de *construção* e sua função no contexto da matemática: dar o direito ao sujeito cognoscente de produzir um enunciado, proferimento ou asserção. Como consequência, a própria lógica e sua interpretação são tributárias da noção de *construção*, i.e., as construções, e somente as construções, permitem a produção de asserções, matemáticas e necessárias, em uma determinada linguagem.

Em se tratando especificamente do intuicionismo, o termo “prova” é tomado como sinônimo de “construção”, de modo a facilitar a compreensão do que se pretende com essa noção fundamental.

[...] nós lembramos que a proposição matemática p sempre exige uma construção matemática com certas propriedades dadas; ela pode ser asserida assim que tal construção tenha sido realizada. **Dizemos, neste caso, que a construção prova a proposição p e a chamamos de prova de p .** (HEYTING, 1956, p. 102, *grifo nosso, tradução nossa*)

Martin-Löf é ainda mais enfático ao apresentar seu entendimento da noção dizendo que provas são atos mentais e que os termos “construção” e “prova” são, de fato, sinônimos.²⁰

Assim uma prova é, não um objeto, mas apenas um ato. Isso é o que Brouwer queria enfatizar dizendo que uma prova é uma construção mental, porque aquilo que é mental, ou psíquico, é precisamente nossos atos, e **a palavra construção**, como usada por Brouwer, **é apenas um sinônimo para prova.** (MARTIN-LÖF, 1996, p. 18, *grifo nosso, tradução nossa*)

Neste momento, podemos fazer uma observação acerca do tratamento mais cuidadoso de Martin-Löf sobre a noção de *prova*. Por se tratar de um sistema formal, Martin-Löf entende que, nesse contexto formal, o que designamos por “prova” ou “construção” pode ser entendido como um ato ou processo, conforme a ideia de Brouwer, mas que esse processo não se pode confundir com a construção enquanto resultado desse ato, que, por sua vez, não deve ser confundido com a asserção produzida a partir desse produto do ato ou mesmo com as expressões que servem como demonstração em um

²⁰ Devemos enfatizar que, aqui, citamos Martin-Löf em um tratamento do termo “prova” conforme admitido por Brouwer e não propriamente conforme Martin-Löf utiliza em seu sistema em suas variações de “prova de proposição” ou “objeto-prova” e “prova de juízo” ou “demonstração”.

sistema formal. Dessa análise inicial, Martin-Löf propõe três entidades relacionadas à noção intuicionista de “prova”: o ato de provar, o produto desse ato e o que ele próprio chama de “rastros de prova”. Além dessa distinção, Martin-Löf (1998) também menciona uma outra interpretação da noção de *existência* que impacta na noção de *construção* intuicionista como ele vinha utilizando até então, trata-se da *existência potencial* de uma prova de proposição. Todo esse tratamento que Martin-Löf faz de noções intuicionistas, explicitando essas e outras distinções, são cruciais e caras ao seu trabalho. Porém, por não serem objeto deste artigo, cabe aqui apenas mencioná-las, lembrando que elas não interferem na teoria como um todo ou na utilização de seu sistema formal intuicionista.

3. Rejeição do princípio do terceiro excluído

A partir da interpretação BHK (de construções como provas) chegamos à interpretação dos conectivos lógicos, além da interpretação da negação como uma forma de asserção e não como uma operação sobre proposições. No entanto, entendemos que a consequência para a lógica mais importante recai sobre a rejeição do PTE, cujo argumento é apresentado pelo próprio Heyting ao explicitar a estranheza da ideia clássica de existência objetual sem que seja apresentado um método, mesmo em princípio, para se obter o objeto pretendido. A proposta intuicionista é, então, mais intuitiva ou convincente, ao admitir que aquilo que desejamos designar como provas de proposições devem ser interpretadas como a atualização da possibilidade de obtenção do objeto pretendido, para que só assim sejam efetivamente reconhecidas como *provas*.

Antes de tratarmos do argumento de Heyting para a recusa do PTE, temos que ressaltar dois aspectos cruciais para a compreensão do argumento: 1. a interpretação intuicionista da disjunção e 2. a interpretação intuicionista da noção de *verdade da proposição*. Não devemos tratar detalhadamente da interpretação intuicionista dos conectivos lógicos nem das noções de *verdade* ou *proposição*. Entretanto, nosso intuito é apresentar esses dois aspectos em especial para facilitar a compreensão do argumento de Heyting para a recusa do PTE.

3.1. Interpretação dos conectivos lógicos

Como mencionado anteriormente, a discussão acerca da noção de *existência* é central na disputa de fundamentos da matemática, sendo essa, talvez, a principal distinção

entre a fundamentação clássica e a intuicionista. Como vimos, a distinção quanto à interpretação da noção de *existência* tem suas reais implicações a partir do tratamento clássico em relação aos paradoxos, em especial ao fato de os paradoxos não terem afetado a forma como foi concebida a sua lógica. Por certo que, em Teoria dos Conjuntos, a noção de *existência* é conectada à ideia de uma realidade abstrata, de modo que a existência dos objetos estaria garantida independentemente de qualquer instância epistemológica.

Nesse contexto o PTE seria naturalmente aplicado sem restrições. No entanto, em resposta aos paradoxos, o recuo teórico que produziu, entre outros sistemas, a Teoria Axiomática dos Conjuntos ZFC não envolveu um recuo da lógica concebida inicialmente para a Teoria dos Conjuntos de Cantor, o que, por sua vez, continuou a produzir paradoxos. O resultado para o classicismo foi uma lógica que admite algumas asserções desafiadoras à compreensão, mas que são explicadas ou respaldadas pela lógica subjacente à teoria original anterior.

Já no intuicionismo, a noção de *existência* é conectada a uma noção de *atualidade da posse de um objeto* ou de *um método* que permita, mesmo que em princípio, a obtenção do objeto. A lógica intuicionista, por sua vez, é considerada parte da linguagem e, portanto, dependente da fundamentação da matemática, não sendo possível extrair ou explicar a teoria a partir da lógica, tanto quanto não se deve esperar ser possível explicar ou extrair uma teoria a partir de qualquer linguagem que se proponha a exprimir essa teoria.

Vejamos, então, um exemplo da distinção da interpretação da noção de *existência* via quantificador universal. Em Teoria dos Conjuntos, a “existência” platônica garante a bivalência das asserções, uma vez que os objetos são dados na realidade abstrata independentemente de qualquer instância epistêmica em relação ao conhecimento matemático (como a obtenção de novas provas acerca de funções ou outros objetos matemáticos como os números reais, por exemplo). Essa interpretação clássica tem como principal consequência a admissão da asserção da existência a partir da falha de generalidade. Explicamos: da negação de uma asserção com o quantificador universal, admite-se produzir uma asserção com o quantificador existencial:

$$\neg \forall x. P(x) \rightarrow \exists x. \neg P(x)$$

A resposta intuicionista para esse exemplo dá conta de que para produzir tal proposição, seria necessário apresentar a prova que permita asserir aquela proposição,

i.e., a prova da existência de um x tal que $\neg P(x)$. Outro exemplo pode ser dado a partir da dupla negação de uma proposição existencial clássica, que não é admitida intuicionisticamente:

$$\neg(\neg\exists x.P(x)) \rightarrow \exists x.P(x)$$

Mais uma vez a interpretação intuicionista da lógica trata de maneira diferente esse caso, sendo que cada uso da negação deve ser interpretado de maneira singular. Assim, a negação de $\neg\exists x.P(x)$, significa que a assunção de $\neg\exists x.P(x)$ levaria ao absurdo e apesar disso. O intuicionista não admitiria o segundo passo, o de concluir que se é absurdo negar a existência de um x tal que $P(x)$, logo, $\exists x.P(x)$. Esse último passo não é considerado um passo inferencial válido intuicionisticamente, pelo que, para fazê-lo, precisaria ser admitido o PTE e jogar fora a noção fundamental de construção, o que não seria o caso.

Um último exemplo pode ser dado por meio de uma disjunção entre uma proposição e sua negação, admitida classicamente tendo a sua verdade justificada pelo PTE. Esse último exemplo é especialmente interessante por ser utilizado por Heyting em seu argumento para a rejeição do PTE.

$$(P \vee \neg P)$$

Na versão intuicionista, teríamos, no caso da disjunção, uma das alternativas expostas, de modo que se deve poder dizer qual de qual das duas partes da disjunção se possui, de fato, uma prova. No primeiro exemplo, sabemos que $\vdash \neg P$ é verdadeira e no segundo exemplo, que $\vdash \neg P$ é verdadeira. Só assim, podemos concluir $P \vee \neg P$.²¹

$$\frac{\vdash P}{P \vee \neg P} \quad \text{ou} \quad \frac{\vdash \neg P}{P \vee \neg P}$$

²¹ Nos exemplos a seguir, usamos o símbolo \vdash à esquerda da proposição para dizer que a mesma é verdadeira.

3.2. Interpretação intuicionista da noção de verdade da proposição

O segundo aspecto que facilita a compreensão da rejeição do PTE é apresentado aqui a partir da noção de *proposição* intuicionisticamente interpretada como um problema a ser resolvido. Essa interpretação também é tomada como consequência imediata da noção intuicionista fundamental de *construção* de modo que a ideia de *proposições como problemas* garante a possibilidade de se construir novas provas de uma mesma *proposição*. Não é o objetivo deste artigo tratar pormenorizadamente essa noção e sua implicação para o intuicionismo, nos servindo aqui apenas algumas características essenciais. Vejamos.

A ideia de um problema a ser resolvido nos ajuda a perceber a distinção do tratamento da noção de *verdade da proposição* no intuicionismo e em Teoria dos Conjuntos. Isso porque, uma teoria, como no caso da conjuntística, pode estabelecer uma relação de prioridade conceitual entre *verdade* e *prova* de maneira distinta da intuicionista, i.e., no caso da Teoria dos Conjuntos, a *verdade* é primitiva e conceitualmente anterior à *prova*, enquanto que, para o intuicionismo, a *prova* é primitiva e anterior à *verdade*²². Como resultado, temos uma noção de *proposição* cuja característica essencial é a de ter uma prova e não a de ser verdadeira ou falsa.

Esse raciocínio é fundamental para a compreensão do intuicionismo uma vez que ele evidencia que, intuicionisticamente, a possibilidade de se construir novas provas é conceitualmente mais importante do que a “verdade da proposição”. Em Teoria dos Conjuntos, ao contrário, a verdade da proposição é conceitualmente prioritária em relação à prova. Essa conclusão pode ser compreendida como uma consequência intrínseca à teoria que tem no PTE sua salvaguarda lógica. Assim, toda e qualquer proposição clássica é, ela própria, uma asserção, seja verdadeira ou falsa. Se verdadeira, a proposição asserir um fato e, se falsa, não asserir um fato matemático. Dessa forma, a prova de que a proposição é verdadeira ou falsa seria algo contingente. Não à toa, a distinção intuicionista entre proposição e asserção está relacionada à rejeição do PTE, uma vez que, intuicionisticamente, a proposição deve vir sempre acompanhada de sua prova, não podendo, portanto, ser verdadeira ou falsa como a proposição clássica.

²² Devemos aqui fazer a ressalva de que as noções de *verdade* e *prova* são distintas em cada uma das teorias, conjuntística e intuicionista, o que não altera a ideia que se pretende passar aqui sobre a relação de prioridade de uma sobre a outra.

Assim, como eu disse anteriormente, a lei do terceiro excluído, na verdade, todas as leis do cálculo proposicional, são sem dúvida válidas nessa concepção de proposição [clássica], isso significa que **a rejeição da lei do terceiro excluído é implicitamente a rejeição da concepção de uma proposição como algo que é verdadeiro ou falso**. Assim, a rejeição dessa noção de proposição é algo que pertence a Brouwer. Por outro lado, ele não disse isso explicitamente pelo que ela deveria ser substituída. (MARTIN-LÖF, 1996, p. 23, *grifo nosso, tradução nossa*)

Enfim, após o que consideramos uma elucidação daquele do conceito fundamental intuicionista, a *construção*, e da apresentação da interpretação intuicionista da disjunção e da noção de *verdade da proposição*, podemos seguir ao argumento de Heyting que mostra a recusa do PTE como consequência da interpretação de construções como provas ou proposições como problemas (interpretação BHK).

3.3. O argumento de Heyting

Apesar de podermos apontar outras consequências a partir da interpretação BHK, entendemos que sua consequência mais importante recai sobre a lógica intuicionista, cuja interpretação é dada por Brouwer e Heyting, e que é, digamos, traduzida formalmente na Dedução Natural de Gentzen e Prawitz, de modo a ser perfeitamente utilizada no sistema de Martin-Löf. A partir da interpretação dos conectivos lógicos e da interpretação da noção de *verdade enquanto possibilidade de se obter uma prova da proposição*, chega-se naturalmente à conclusão da rejeição do PTE, cujo argumento intuicionista é apresentado pelo próprio Heyting (1956):

Você deve considerar o que era o programa de Brouwer [L.E.J. Brouwer 1907]. Consistia na investigação da **construção matemática mental** como tal, sem referência a questões relativas à natureza dos **objetos construídos**, tais como se esses objetos existem independentemente de nosso conhecimento deles. Que **esse ponto de vista leva imediatamente à rejeição do princípio do terceiro excluído**, eu posso demonstrar melhor por um exemplo.

Vamos comparar duas definições de números naturais, digamos, k e l .

I. k é o maior primo tal que $k - 1$ é também primo, ou $k = 1$ se tal número não existe.

II. l é o maior primo tal que $l - 2$ é também primo, ou $l = 1$ se tal número não existe.

A matemática clássica negligencia completamente a óbvia diferença de caráter entre essas duas definições. k pode realmente ser calculado ($k = 3$), enquanto que não possuímos nenhum método para calcular l , pois não se sabe se a sequência de pares de primos gêmeos $p, p + 2$ é finita ou não. Portanto, os intuicionistas rejeitam **II** como uma definição de um inteiro; eles consideram um inteiro bem definido apenas se um

método para calculá-lo é dado. Agora, **essa linha de pensamento leva à rejeição do princípio do terceiro excluído**, pois se a sequência de primos gêmeos fosse finita ou não finita, **II** definiria um inteiro. (HEYTING, 1956, p. 1-2, *grifo nosso, tradução nossa*)

No argumento de Heyting para a recusa do PTE, a partir da interpretação de provas como construções mentais, temos duas definições de números inteiros classicamente admitidas e representadas por disjunções. Elas se tratam basicamente de funções que decidem o valor de uma variável a partir da existência ou não do objeto matemático pretendido, o número referido na definição. Caso o número de fato “exista”, a variável recebe o valor desse número. Caso “não exista”, a variável recebe o valor “1”. Classicamente essa é uma função computável e admitida, visto que para a proposição “o número x ou bem existe ou não existe” é válida e trivialmente verdadeira, por se tratar de uma tautologia. No entanto, intuicionisticamente, a interpretação lógica dessa proposição não funciona bem assim. Vejamos.

I - $[k = \text{maior primo tal que } \text{Primo}(k - 1)] \vee (k = 1)$
II - $[l = \text{maior primo tal que } \text{Primo}(l - 2)] \vee (l = 1)$

Na primeira definição, é possível obter a prova de que “ $k = 3$ ”, satisfazendo assim a disjunção e admitindo-se a definição do número inteiro “3”. Já na segunda, não é possível obter uma prova ou método de calcular o valor de “ l ”, pois não se sabe se a sequência de pares de primos gêmeos “ $p, p + 2$ ” é finita ou não, não sendo possível obter uma prova para a “pretensa proposição”. Assim, a segunda disjunção não é admitida intuicionisticamente como definição de um número inteiro porque ela não oferece um método de obtenção de “ l ”.

O argumento de Heyting é claro, eficaz e, porque não dizer, convincente, ao explicitar a estranheza da ideia clássica de existência objetual sem que seja apresentado um método, ao menos em princípio, para que se possa calcular ou instanciar o objeto pretendido. A proposta intuicionista é, então, mais intuitiva mesmo, ao admitir que provas de proposições devam ser interpretadas como a atualização da possibilidade de obtenção do objeto pretendido, para que só assim sejam reconhecidas como “prova da proposição” (posse atual de método). Devemos fazer um alerta neste ponto para que não seja dado um passo indevido a partir da ideia que acabamos de apresentar. Não se deve admitir que, a partir da atualização da possibilidade de obtenção do objeto pretendido (mesmo que por

meio de um método de obtenção em princípio), a proposição “passe a ser verdadeira”. O que de fato ocorre, é o reconhecimento da atualização daquela possibilidade a partir do cumprimento das condições proposicionais por parte da prova. De maneira mais precisa, significa a posse de um método de obtenção ou a instanciação do objeto pretendido pela proposição.

4. Conclusão

À guisa de conclusão, devemos enfatizar que, do ponto de vista intuicionista, as noções fundamentais, em especial a de *construção*, bem como as interpretações e consequências que levam Brouwer à rejeição do PTE se mantêm até os dias atuais, possibilitando que a Dedução Natural de Gentzen e Prawitz seja reconhecida como uma proposta de lógica formalmente arregimentada para a fundamentação intuicionista, e utilizada por Martin-Löf em sua proposta de formalização do intuicionismo.

Contudo, a rejeição do PTE é apenas uma das consequências da proposta intuicionista. Já mencionamos aqui a interpretação da ideia de “negação” e devemos lembrar, certamente, a mais importante distinção do ponto de vista filosófico, aquela entre as noções de *proposição* e *asserção*, que no contexto clássico são tratadas como uma e a mesma noção. Essas consequências e outras implicações da teoria intuicionista deverão ser objeto de novos artigos, dado o grau de complexidade e atenção que cada tema requer. No entanto, cabe se ressaltar que o conhecimento dessas e outras noções, distinções e interpretações intuicionistas são de grande importância para a adequada compreensão daquela proposta e que podem alterar a própria maneira como se encara a proposta intuicionista como um todo, ou mesmo a maneira de se pensar a matemática, e porque não dizer a maneira de se pensar em geral.

A grande vantagem em termos de rigor filosófico do intuicionismo está justamente no fato de essas consequências e interpretações resultarem de sua noção fundamental de *construção mental*. Uma segunda vantagem, essa de implicação na prática da matemática, é que a proposta intuicionista é perfeitamente implementável²³ para qualquer contexto, enquanto que não se pode dizer o mesmo da fundamentação clássica.

²³ A partir do trabalho de Bishop que demonstrou construtivamente os Teoremas da Análise e da Teoria das Medidas e de ML que desenvolveu seu sistema de formalização da matemática intuicionista.

Referências

- BEESON, M. *Foundations of Constructive Mathematics*. Metamathematical Studies. Berlin, Heidelberg: Springer, 1985.
- BERTOT, Y.; CASTÉRAN, P. *Interactive Theorem Proving and Program Development: Coq' Art: The Calculus of Inductive Constructions*. Verlag, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2004.
- BISHOP, E. *Foundations of Constructive Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- BROUWER, L. E. J. *Collected Works I*. Ed. A. Heyting. Amsterdam: North Holland, 1975.
- de BRUIJN, N. G. *Automath : a language for mathematics*. Technische Hogeschool Eindhoven. Eindhoven. 1968.
- _____. *Type-theoretical checking and philosophy of mathematics*. In: Smith (Ed.). *Twenty five years of constructive Type Theory: Proceedings of a Congress held in Venice, October 1995*. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- EWALD, W. B. *From Kant to Hilbert*. New York: Oxford University Press, 1996.
- HESSELING, D. E. *Gnomes in the Fog: The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*. Basel: Springer Basel AG, 2003.
- HEYTING, A. *Intuitionism, an introduction*. Amsterdam, London: North Holland, 1956.
- MANCOSU, P. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- MARTIN-LÖF, P. *Intuitionistic Type Theory*. Napoli: Bibliopolis, 1984.
- _____. Truth of a proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof. *Synthese*, [S.l.], v. 73, p. 407-420, 1987.
- _____. A Path From Logic to Metaphysics. In: *Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza*, 01/1991, Bologna. Viareggio, p.8-13, 1990.
- _____. On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, [S.l.], v. 1, n. 1, p. 11-60, 1996.
- _____. *Truth and knowability: On the principles C and K of Michael Dummett*. In: Dales; Oliveri (Ed.). *Truth in mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1998.
- PRAWITZ, Dag. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: ALMQVIST & WIKSELL, 1965.
- _____. *Classical versus intuitionistic logic*. In: Haeusler; Sanz; Lopes (Ed.). *Why is this a Proof?: Festschrift for Luiz Carlos Pereira*. Milton Keynes: College Publications, 2015. p. 15-32. (Tributes).
- SUNDHOLM, G. Constructions, proofs and the meaning of logical constants. *Journal of Philosophical Logic*, v. 12, p. 151-172, 1983.
- TROELSTRA, A. S.; van DALEN, D. *Constructivism in Mathematics: an introduction*. Amsterdam, New York, Oxford, Tokio: Elsevier Science Publishers B.V., 1988. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 121).
- WEYL, H. *Levels of Infinity*. New York: Dover Publications, 2012.
- YOUSCHKEVITCH, A.-A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976.

Recebido em: 19/11/2019
Aprovado em: 04/06/2020