LÓGICA MODAL DO OPERADOR DE CONSEQUÊNCIA: HISTÓRICO, REPRESENTAÇÃO POLINOMIAL E DECIDIBILIDADE

MODAL LOGIC OF THE CONSEQUENCE OPERATOR: HISTORICAL REVIEW, POLYNOMIAL REPRESENTATION AND DECIDABILITY

Hércules de Araújo Feitosa[1]
Mauri Cunha do Nascimento[2]

Resumo: Este texto apresenta um breve histórico da lógica TK, originalmente motivada pelo conceito de operador de consequência de Tarski, a sua adequação segundo os Espaços de Tarski e uma caracterização como uma lógica modal não normal. Como novidade, mostra como interpretar suas fórmulas em polinômios sobre uma TK-álgebra e discorre sobre a decidibilidade algébrica de TK segundo esta interpretação polinomial.

Palavras chave: Operador de Consequência de Tarski. Lógica TK. TK-Álgebras. Polinômios. Decidibilidade.

Abstract: This paper presents a short history of logic TK, which was originally motivated by the concept of Tarski's consequence operator, its adequacy relative to Tarski Spaces and a characterization of TK as a non-normal modal logic. As novelty, it shows how to interpret its formulas in polynomials over some TK-algebra and discuss about the algebraic decidability of TK according this polynomial interpretation.

Key-words: Tarski's Consequence Operator. Logic TK. TK-Algebras. Polynomials. Decidability.

* * *

Introdução

Alfred Tarski introduziu, na década de 1930, o conceito de operador de consequência, para caracterizar o que um sistema lógico precisa preservar para ser considerado como uma lógica, em vista da proliferação de lógicas do início do século XX. Na primeira seção, apresentamos a definição de operador de consequência de Tarski, com pequenas modificações em relação à formulação original. Mostramos algumas propriedades destes operadores que permitem a sua formalização no ambiente da lógica modal.

Assim, a noção de consequência é caracterizada como um operador modal da dedutibilidade. Na segunda seção apresentamos tal formulação na Lógica TK

[1] Professor do Departamento de Matemática, UNESP–FC. E-mail: haf@fc.unesp.br
[2] Professor do Departamento de Matemática, UNESP–FC. E-mail: mauri@fc.unesp.br

https://doi.org/10.36311/1984-8900.2014.v6n12.4793

(FEITOSA, NASCIMENTO, GRÁCIO, 2010).

A seguir, mostramos como a Lógica TK pode ser vista como uma das muitas lógicas modais não normais, portanto uma lógica modal que não admite modelo de Kripke, mas modelos de vizinhança (MORTARI, FEITOSA, 2011).

A seguir, mostramos a adequação, correção e completude, de TK relativa aos espaços de Tarski (FEITOSA, NASCIMENTO, SOARES, 2014). A versão deste artigo é mais direta e econômica que a versão mencionada.

Na última seção argumentamos sobre o uso de uma particular TK-álgebra sobre a qual podemos definir polinômios e como estes polinômios nos permitem a decisão em TK. Assim, dada uma fórmula de TK, traduzimo-la num polinômio sobre esta TK-álgebra e com operações deste contexto podemos decidir se a fórmula é ou não um teorema de TK.

1. Sobre o operador de consequência de Tarski

Nesta seção apresentamos o operador de consequência de Tarski e mostramos alguns resultados imediatos.

No início do Século XX, surgiram muitas lógicas distintas da tradicional lógica clássica e também da proposta de Frege de formalização da Lógica no final do século anterior.

Parecia então razoável perguntar o que estes muitos sistemas formais, chamados de lógicas, teriam em comum para suportar o conceito de Lógica. Tarski propôs o seu conceito de operador de consequência, o qual contemplaria a essência do que aqueles muitos sistemas portariam da essência do conceito usual de Lógica.

Um *operador de consequência* sobre E é uma função $\mathsf{C}: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ tal que, para todos $A, B \subseteq E$:

(i) $A \subseteq \mathsf{C}(A)$ (auto dedutibilidade);

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(B)$ (monotonicidade);

(iii) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$ (idempotência).

De acordo com (i) e (iii), vale a igualdade $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) = \mathsf{C}(A)$, para todo $A \subseteq E$.

Um *espaço de Tarski* é um par (E, C), em que E é um conjunto e C é um operador de consequência sobre E.

Espaço de Tarski é muitas vezes denominado de espaço do fecho ou de sistema dedutivo de Tarski.

Certamente há alguma semelhança entre os conceitos de espaço de Tarski e espaço topológico. Mais especificamente, todo espaço topológico é exemplo de espaço de Tarski. Contudo os conceitos não são coincidentes.

Se C é um operador de consequência sobre E, então o conjunto A é *fechado* em (E, C) quando $C(A) = A$, e A é *aberto* quando o seu complemento relativo a E, o que é denotado por A^C, é fechado in (E, C).

Um conjunto $D \subseteq E$ é *denso* em (E, C) se $C(D) = E$. Um elemento $x \in E$ é denso em (E, C) se $C(\{x\}) = E$.

Um conjunto denso deriva todos os demais elementos segundo o operador C. Do ponto de vista lógico, este seria um conjunto trivial. O nome denso vem do contexto topológico.

A versão acima do conceito de operador de consequência é a mais frequente nos tempos atuais, porém Tarski introduziu o conceito com algumas pequenas distinções e acréscimos. Por exemplo, sempre que temos uma dedução, esta deve ser construída em um número finito de etapas e, portanto, apenas uma quantidade finita de dados deve estar envolvida.

Denotaremos que um conjunto é finito ao incluir um f como subíndice: A_f.

O operador de consequência C sobre E é *finitário* quando:

(vi) para todo $A \subseteq E$: $C(A) = \cup\{C(A_f) : A_f \subseteq A\}$ (operador finitário).

Para Tarski um sistema dedutivo deve ser dado por um conjunto não vazio que atende as condições (i), (iii) e (iv), isto é, o operador deve ser auto dedutivo, idempotente e finitário. A condição da monotonicidade, do item (ii), é primeiro teorema de sua teoria. Porém, a condição (iv) não pode ser deduzida dos itens (i), (ii) e (iii) e precisa ser incluída como uma propriedade adicional.

A inclusão $\cup\{C(A_f) : A_f \subseteq A\} \subseteq C(A)$ vale sempre, pois como $A_f \subseteq A \Rightarrow C(A_f) \subseteq C(A)$.

Tarski exigia mais duas condições para o seu conceito de sistema dedutivo. O universo deveria ser um conjunto enumerável e deveria existir um elemento denso em E.

Como é comum em muitos sistemas lógicos, o conjunto das sentenças bem formadas é enumerável, e então o correspondente conceito da proposta tarskiana, o domínio E, foi tomado como enumerável. A outra condição contempla aspecto frequente dos sistemas lógicos, para os quais existe uma sentença contraditória tal que todas as demais dela são deduzidas.

De um modo geral, não precisamos exigir apenas conjuntos de fórmulas e termos enumeráveis nas lógicas contemporâneas. Também não precisamos exigir a existência de sentenças que permitam a dedução de todas as demais. Elas podem e ocorrem com frequência, mas não são essenciais.

Os sistemas lógicos contemporâneos são tão dinâmicos e criativos, que a abordagem das lógicas de Tarski, embora bastante geral, não contempla todas as possíveis classificações de lógicas dos nossos dias.

Destacamos algumas propriedades e características dos sistemas dedutivos de Tarski.

Proposição 1.1: Se $A, B \subseteq E$, então:

(a) $C(A\cap B) \subseteq C(A) \cap C(B)$

(b) $C(A) \cup C(B) \subseteq C(A\cup B)$

(c) $C(A\cup B) = C(C(A) \cup C(B))$.

Demonstração:

(a) Como $A\cap B \subseteq A$ e $A\cap B \subseteq B$, então $C(A\cap B) \subseteq C(A)$ e $C(A\cap B) \subseteq C(B)$. Logo, $C(A\cap B) \subseteq C(A) \cap C(B)$.

(b) Como $A \subseteq A\cup B$ e $B \subseteq A\cup B$, então $C(A) \subseteq C(A\cup B)$ e $C(B) \subseteq C(A\cup B)$. Logo, $C(A) \cup C(B) \subseteq C(A\cup B)$.

(c) De (b) segue que $C(C(A) \cup C(B)) \subseteq C(C(A \cup B)) = C(A \cup B)$. Do outro lado, desde que $A \subseteq C(A)$ e $B \subseteq C(B)$ e então $A \cup B \subseteq C(A) \cup C(B)$, e da definição segue que $C(A \cup B) \subseteq C(C(A) \cup C(B))$. ■

O exemplo seguinte mostra que podemos não ter igualdade do item (b) da Proposição 1.1.

Consideremos $E = \{a, b, c\}$ e o operador C sobre o conjunto $\mathcal{P}(E)$ definido por: $C(\{a, b\}) = \{a, b, c\}$ e $C(X) = X$, para todo $X \subseteq E$, tal que $X \neq \{a, b\}$. É simples a verificação que C é um operador de consequência. Porém, temos que $C(\{a\} \cup \{b\}) = C(\{a, b\}) = \{a, b, c\}$, enquanto $C(\{a\}) \cup C(\{b\}) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$. Assim, $C(\{a\}) \cup C(\{b\}) \neq C(\{a\} \cup \{b\})$.

Vale sempre que $C(E) = \cup\{C(\{x\}) : x \in E\}$, pois $x \in C(\{x\})$, para cada $x \in E$. Mas, se $A \subseteq E$, pode não valer a igualdade $C(A) = \{C(\{x\}) : x \in A\}$, como pode ser observado no exemplo anterior, quando $A = \{a, b\}$.

Proposição 1.2: Para $A, B \subseteq E$, tem-se que $C(A \cup B) = C(A \cup C(B))$.
Demonstração: Como $B \subseteq C(B)$, então $A \cup B \subseteq A \cup C(B)$ e daí $C(A \cup B) \subseteq C(A \cup C(B))$. Por outro lado, como $A \subseteq C(A)$, então $A \cup C(B) \subseteq C(A) \cup C(B)$. Logo, $C(A \cup C(B)) \subseteq C(C(A) \cup C(B))$. Assim, da anterior, segue que $C(C(A) \cup C(B)) = C(A \cup B)$. ■

Se C e C^* são dois operadores de consequência sobre E, então o operador C é *mais forte* que C^* (ou C^* é *mais fraco* que C), o que é denotado por $C^* \prec C$, se todo fechado segundo C é também um fechado segundo C^*.

Proposição 1.3: Se C, C^* são dois operadores de consequência sobre E, então C é mais forte que C^* se, e somente se, para todo $A \subseteq E$, $C^*(A) \subseteq C(A)$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) O conjunto $C(A)$ é fechado segundo C. Então, por hipótese, $C(A) = C^*(C(A))$. Agora, como $A \subseteq C(A)$, então $C^*(A) \subseteq C^*(C(A)) = C(A)$.

($\Leftarrow$) Se A é um fechado segundo C, então $\mathsf{C}(A) = A$. Como $\mathsf{C}^*(A) \subseteq \mathsf{C}(A) = A$, segue que $A = \mathsf{C}^*(A)$, ou seja, A é um fechado segundo C^*. ■

Proposição 1.4: Para $\mathsf{C}: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, as seguintes condições são equivalentes:

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(B)$

(ii*) $\mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(A \cup B)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como $A \subseteq A \cup B$, por (ii), segue que $\mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(A \cup B)$.

($\Leftarrow$) Se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$. Daí, por (ii*), $\mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(A \cup B) = \mathsf{C}(B)$. ■

Resulta da proposição acima, que podemos trocar (ii) por (ii*) na definição de operador de consequência.

Estas são propriedades iniciais esperadas dos operadores de consequência, mas o caráter geral da definição provoca algumas curiosidades. A função identidade, que mapeia cada objeto nele mesmo, é um exemplo banal de operador de consequência. Outro exemplo patológico de operador é o que leva todo subconjunto de E no próprio conjunto E.

A exigência de um elemento contraditório eliminaria a função identidade como um exemplo de operador de consequência, mas não o caso da função constante em E. Assim, para a proposta Tarskiana, a função identidade não contaria como operador de consequência.

Em outro trabalho, proporemos condições para evitar tais casos.

2. A lógica proposicional TK

A lógica proposicional TK é um sistema modal associado aos espaços de Tarski (FEITOSA, NASCIMENTO, GRÁCIO, 2010). Veremos como são modos distintos, porém muito similares de falarmos das noções envolvidas nos operadores. Originalmente, passamos dos espaços de Tarski para estruturas algébricas correlacionadas (NASCIMENTO, FEITOSA, 2005), as quais chamamos de TK-álgebras. Mais à frente apresentamos também as TK-álgebras.

A lógica TK é determinada sobre a linguagem proposicional L($\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, $\blacklozenge$, p_1, p_2, p_3, ...) e determinada por:

Axiomas:

(CPC) φ, se φ é uma tautologia

(TK_1) $\varphi \rightarrow \blacklozenge\varphi$

(TK_2) $\blacklozenge\blacklozenge\varphi \rightarrow \blacklozenge\varphi$.

Regras:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi / \psi$

($RM^{\blacklozenge}$) $\vdash \varphi \rightarrow \psi / \vdash \blacklozenge\varphi \rightarrow \blacklozenge\psi$.

Como podemos observar, TK é uma extensão da lógica proposicional clássica pelo acréscimo de um operador de caráter modal, que tem a intenção de formalizar o conceito de dedutibilidade.

Na definição de espaço de Tarski, assumimos um espaço booleano de conjuntos e sobre ele introduzimos o operador de consequência; na lógica TK assumimos a lógica booleana e acrescentamos axiomas e regra que imergem no sistema as características do operador de Tarski.

Seja $\Gamma\cup\{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas de TK. O conjunto Γ deduz φ, o que é denotado por $\Gamma \vdash \varphi$, se existe uma sequência finita de fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ de maneira que φ coincide com φ_n, e para todo $1 \leq i \leq n$, vale um dos itens:

(i) φ_i é um axioma

(ii) $\varphi_i \in \Gamma$

(iii) φ_i é obtida de fórmulas que ocorrem anteriormente na sequência pela aplicação de alguma das regras de dedução de TK.

Segundo a tradição das lógicas modais, esta noção de consequência sintática é global.

Proposição 2.1: Valem em TK:

(i) $\vdash \blacklozenge\varphi \rightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$

(ii) $\vdash \blacklozenge\varphi \vee \blacklozenge\psi \rightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$

(iii) $\vdash \varphi \Rightarrow\ \vdash \blacklozenge\varphi$

(iv) $\vdash \blacklozenge(\varphi\wedge\psi) \rightarrow \blacklozenge\varphi$

(v) $\vdash \blacklozenge(\varphi\wedge\psi) \rightarrow \blacklozenge\varphi \wedge \blacklozenge\psi$

(vi) $\vdash \blacklozenge(\blacklozenge\varphi \vee \blacklozenge\psi) \leftrightarrow \blacklozenge(\varphi \vee \psi)$. ■

Uma *TK-teoria* é um conjunto $\Delta \subseteq$ For(TK) tal que $\mathsf{C}(\Delta) = \Delta$, em que $\mathsf{C}(\Delta) = \{\psi\colon \Delta \vdash \psi\}$.

Dessa maneira, uma teoria é um conjunto de fórmulas fechado para a relação de dedução de TK.

Um conjunto de fórmulas Δ é *consistente maximal* se ele é consistente e nenhuma extensão própria de Δ é consistente.

Proposição 2.2: $\Gamma \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma\cup\{\neg\psi\}$ é inconsistente.

Proposição 2.3: Se Γ é consistente maximal, então para toda fórmula ψ de For(TK), ou $\psi \in \Gamma$ ou $\neg\psi \in \Gamma$.

Proposição 2.4: Se Γ é consistente maximal e $\Gamma \vdash \psi$, então $\psi \in \Gamma$.

Proposição 2.5: (Lindenbaum) Todo conjunto consistente de fórmulas Γ pode ser estendido a um conjunto consistente maximal Δ.

Demonstração: Em (FITTING e MENDELSOHN, 1998, p. 76). ■

Agora apresentamos uma definição de álgebra que introduz no contexto algébrico as características do operador de consequência.

Uma *TK-álgebra* é uma sêxtupla $\mathcal{B} = (B, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$, em que $(B, 0, 1, \vee, \sim)$ é uma álgebra de Boole e $\bullet$ é um novo operador, o *operador de Tarski*, tal que:

(i) $a \vee \bullet a = \bullet a$

(ii) $\bullet a \vee \bullet(a \vee b) = \bullet(a \vee b)$

(iii) $\bullet(\bullet a) = \bullet a$.

Desde que $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Boole, o item (i) da definição acima indica que, para todo $a \in B$, $a \leq \bullet a$. Também há em $\mathcal{B}$ uma operação condicional booleana:

$$a \rightarrowtail b =_{df} \sim a \vee b.$$

Feitosa, Grácio e Nascimento (2010) mostraram a adequação de TK relativo às TK-álgebras.

Com isto, temos formalizações do conceito de operador de consequência nos contextos dos conjuntos, versão original, da lógica proposicional e algébrica.

Como no caso das lógicas modais de Kripke, podemos definir o operador lógico dual de $\blacklozenge$ da seguinte maneira:

$$\boxminus\varphi =_{df} \neg\blacklozenge\neg\varphi.$$

Proposição 2.6: Em **TK** valem:

(i) $\varphi \rightarrow \psi \vdash \boxminus\varphi \rightarrow \boxminus\psi$

(ii) $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \boxminus\varphi \leftrightarrow \boxminus\psi$

(iii) $\vdash \boxminus\varphi \rightarrow \varphi$

(iv) $\vdash \boxminus\varphi \to \boxminus\boxminus\varphi$

(v) $\vdash \boxminus(\varphi \wedge \psi) \to \boxminus\varphi$

(vi) $\vdash \boxminus(\varphi \wedge \psi) \to \boxminus\varphi \wedge \boxminus\psi$. ■

De modo alternativo, poderíamos tomar o operador $\boxminus$ como primitivo e substituir os axiomas TK_1 e TK_2 pelos seguintes:

(TK^*_1) $\quad \boxminus\varphi \to \varphi$,

(TK^*_2) $\quad \boxminus\varphi \to \boxminus\boxminus\varphi$,

e a regra $RM^\blacklozenge$ por $RM^\boxminus$:

($RM^\boxminus$) $\quad \vdash \varphi \to \psi \,/\, \vdash \boxminus\varphi \to \boxminus\psi$.

Esta versão com operador $\boxminus$ não remete diretamente à intuição do operador de fecho, mas, por outro lado, ela permite um caminho mais direto de comparação com os usuais sistemas modais, ao considerar-se o operador $\boxminus$ como o operador de necessidade $\Box$. O conceito dual de fecho, associado ao operador $\boxminus$ é o de interior de um conjunto.

3. A equivalência entre TK e o sistema modal EMT4

Considerando-se os operadores $\boxminus$ e $\blacklozenge$ como idênticos aos operadores modais de necessidade $\Box$ e possibilidade $\Diamond$, podemos verificar que TK é dedutivamente equivalente ao sistema modal subnormal EMT4 (MORTARI, FEITOSA, 2011).

Se $\Box$ é um operador primitivo, então $\Diamond$ pode ser definido do modo usual:

(Df$\Diamond$) $\quad \Diamond\varphi =_{df} \neg\Box\neg\varphi$.

EMT4 é o sistema modal não normal dado pelo cálculo proposicional clássico acrescido dos seguintes axiomas e regra:

(M) $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

(T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$

(4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

(RE) $\varphi \leftrightarrow \psi \,/\, \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$.

Proposição 3.1 Todo teorema de EMT4 é teorema de TK.

Demonstração: Segue de TK^{*}_{1}, TK^{*}_{2} e Proposição 2.2 (ii) e (vi). ■

Proposição 3.2 Todo teorema de TK é teorema de EMT4.

Demonstração: Deve-se mostrar que em EMT4 vale $RM^{\boxminus}$.

1. $\vdash \varphi \rightarrow \psi$	hipótese
2. $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$	CPC
3. $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$	CPC em 1 e 2
4. $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	CPC
5. $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)$	CPC em 3 e 4
6. $\vdash \Box\varphi \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$	RE em 5
7. $\vdash \Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	M
8. $\vdash \Box\varphi \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	CPC em 6 e 7
9. $\vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \rightarrow \Box\psi$	CPC
10. $\vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$	CPC em 8 e 9. ■

4. A adequação de TK segundo os espaços de Tarski

Nesta seção mostramos que a lógica TK é correta e completa segundo os espaços de Tarski. No texto (FEITOSA, NASCIMENTO, SOARES, 2014) está uma prova deste resultado que remete às TK-álgebras. A versão seguinte usa apenas os Espaços de Tarski. Para tanto, devemos precisar como os espaços de Tarski podem ser vistos como semânticas apropriadas para TK.

Denotamos o conjunto das variáveis proposicionais de TK por Var(TK), o conjunto das formula de TK por For(TK) e o seu conjunto de axiomas por Ax.

Uma fórmula $\psi \in$ For(TK) é *refutável* em Γ se $\Gamma \vdash \neg\psi$. Em caso contrário, a fórmula ψ é *irrefutável*.

Seja (E, C) um espaço de Tarski. Uma *valoração restrita* é uma função $\langle.\rangle$: Var(TK) $\rightarrow \mathcal{P}$(E) que interpreta cada variável de TK em um subconjunto A de E.

Uma *valoração* é uma função [.]: For(TK) $\rightarrow \mathcal{P}$(E) que estende natural e unicamente a função $\langle.\rangle$: Var(TK) $\rightarrow \mathcal{P}$(E) da seguinte maneira:

(i) $[p] = \langle p \rangle$

(ii) $[\neg\varphi] = E - [\varphi]$

(iii) $[\blacklozenge\varphi] = \mathsf{C}[\varphi]$

(iv) $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$

(v) $[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$.

Segue da definição de valoração que:

(vi) $[\top] = E$, para toda tautologia $\top$

(vii) $[\bot] = \varnothing$, para toda contradição $\bot$.

Seja (E, C) um espaço de Tarski. Um *modelo* para $\Gamma \subseteq$ For(TK) é uma valoração [.]: For(TK) $\rightarrow \mathcal{P}$(E) tal que $[\gamma] = E$, para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$.

Denotamos por $\langle(E, \mathsf{C}), [.]\rangle \vDash \Gamma$ que $\langle(E, \mathsf{C}), [.]\rangle$ é um modelo de Γ. Em particular, se $\varphi \in$ For(TK), então uma valoração [.]: For(TK) $\rightarrow \mathcal{P}$(E) é um modelo para φ se $[\varphi] = E$. Neste caso, $\langle(E, \mathsf{C}), [.]\rangle \vDash \varphi$ e dizemos que a fórmula φ é verdadeira em

$\langle(E, \mathsf{C}), [.]\rangle$.

Uma fórmula φ é *válida*, o que é denotado por $\vDash \varphi$, se para todo espaço de Tarski (E, C) e toda valoração $[.]$: For(TK) $\to \mathcal{P}(E)$ temos $\langle(E, \mathsf{C}), [.]\rangle \vDash \varphi$.

Um subconjunto $\Gamma \subseteq$ For(TK) *implica logicamente* a fórmula ψ, o que é denotado por $\Gamma \vDash \psi$, se todo modelo de Γ é também um modelo de ψ.

Lema 4.1: $[\varphi \to \psi] = E \Leftrightarrow [\varphi] \subseteq [\psi]$.

Demonstração: $[\varphi \to \psi] = E \Leftrightarrow [\neg\varphi \vee \psi] = E \Leftrightarrow [\neg\varphi] \cup [\psi] = E \Leftrightarrow (E - [\varphi]) \cup [\psi] = E \Leftrightarrow [\varphi] \subseteq [\psi]$. ■

Teorema 4.2: (Correção) Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vDash \varphi$.

Demonstração: A demonstração é por indução sobre o comprimento da dedução.

Se $n = 1$, então φ é um axioma de TK ou $\varphi \in \Gamma$.

Se $\varphi \in \Gamma$, naturalmente $\Gamma \vDash \varphi$.

Consideremos, então, que φ é um axioma de TK. Se φ é uma tautologia, então, da condição (vi) acima, temos que $[\top] = E$.

Se φ é do tipo $\psi \to \blacklozenge\psi$, então $[\psi \to \blacklozenge\psi] = [\neg\psi \vee \blacklozenge\psi] = (E - [\psi]) \cup \mathsf{C}[\psi] = E$;

Se φ é do tipo $\blacklozenge\blacklozenge\psi \to \blacklozenge\psi$, então $[\blacklozenge\blacklozenge\psi \to \blacklozenge\psi] = [\neg\blacklozenge\blacklozenge\psi \vee \blacklozenge\psi] = (E - \mathsf{CC}[\psi]) \cup \mathsf{C}[\psi] = (E - \mathsf{C}[\psi]) \cup \mathsf{C}[\psi] = E$.

Em todos os casos, temos $\Gamma \vDash \varphi$.

Agora, assumimos por hipótese de indução que o enunciado vale para $k < n$.

Se φ foi obtida de Γ por MP, então temos $\Gamma \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$. Pela hipótese de indução, $[\psi] = E$ e $[\psi \to \varphi] = E$. Pelo lema anterior, $[\psi] \subseteq [\varphi]$ e como $[\psi] = E$, então $[\varphi] = E$.

Se φ foi obtida de Γ por ($RM^{\blacklozenge}$), então temos $\Gamma \vdash \sigma \to \psi$ e, pela hipótese de indução, $[\sigma \to \psi] = E$. Do lema anterior, segue que $[\sigma] \subseteq [\psi]$ e da definição de operador de consequência que $\mathsf{C}[\sigma] \subseteq \mathsf{C}[\psi]$. Desse modo, $[\blacklozenge\psi \to \blacklozenge\varphi] = E$.

Portanto, $\Gamma \vDash \varphi$. ■

Teorema 4.3: Se Γ é consistente, então Γ tem modelo.

Demonstração: Segundo o Teorema de Lindenbaum, todo conjunto consistente Γ pode ser estendido a um conjunto consistente maximal Δ. Diante disso, verificaremos que Δ tem um modelo e como $\Gamma \subseteq \Delta$, então também Γ tem um modelo.

Seja E = {x}. Daí $\mathcal{P}$(E) = {∅, E} e tomemos C(∅) = ∅ e C(E) = E, isto é, C coincide com a função identidade sobre $\mathcal{P}$(E).

Definimos a seguinte valoração [.] : For(TK) → (E, C) tal que para cada variável proposicional p, [p] = E ⇔ p ∈ Δ.

Agora mostraremos que para toda fórmula ψ, temos [ψ] = E ⇔ $\psi \in \Delta$, isto é, [.] é um modelo para Δ em (E, C).

A demonstração segue por indução sobre a complexidade da fórmula ψ. O caso booleano é simples e usual e, então, restringimo-nos às formulas modais.

Seja ψ do tipo $\blacklozenge\varphi$:

Se [$\blacklozenge\varphi$] = E, então C[φ] = E e, daí, [φ] = E. Pela hipótese de indução, $\varphi \in \Delta$ e como Δ é uma teoria, então $\Delta \vdash \varphi$. Pelo axioma (TK_1), $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \blacklozenge\varphi$ e, então por MP, $\Delta \vdash \blacklozenge\varphi$.

Se $\Delta \vdash \blacklozenge\varphi$, então para todos os $\delta \in \Delta$ que ocorrem na dedução de $\blacklozenge\varphi$ temos que [δ] = E. Pelo Teorema da Correção, segue que $\Delta \vDash \blacklozenge\varphi$ e, portanto, [$\blacklozenge\varphi$] = E. ■

Corolário 4.4: (Completude Forte) Se $\Gamma \vDash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração: Se $\Gamma \vDash \psi$, então todo modelo de Γ é também modelo de ψ e, desse modo, não existe modelo de $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$. Do teorema anterior, $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é inconsistente e, pela Proposição 2.2, $\Gamma \vdash \psi$. ■

Estes resultados eram esperados, pois a formalização do operador de consequência foi proposta para corresponder integralmente à sua definição, isto é o que nos dá a adequação, correção e completude, da lógica TK com os espaços de Tarski.

Como um acréscimo, mostramos anteriormente a adequação de TK segundo as

TK-álgebras. Agora, podemos verificar que cada espaço de Tarski define uma TK-álgebra do seguinte modo: Dado um espaço de Tarski (E, C), então ($\mathcal{P}$(E), $\emptyset$, E, ^{C}, $\cap$, $\cup$, C) é uma TK-álgebra, em que naturalmente a operação ^{C} é a complementação de conjuntos.

A seguir, envolveremos as TK-álgebra e polinômios sobre elas para obtermos um método de decisão para TK.

5. Polinômios, TK-álgebras e um método de decisão para TK

Partimos do conceito usual de polinômio, tratamos de polinômios sobre TK-álgebras e argumentamos sobre um método de decisão para a lógica TK, isto é, dizer para uma fórmula qualquer de TK se esta é ou não TK-válida.

No contexto da matemática básica, um polinômio é uma expressão do tipo:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,$$

interpretada sobre a estrutura matemática dos números reais ($\mathbb{R}$, 0, 1, +, . , =). Assim, os termos $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, a adição “+” e a multiplicação “.” são operações sobre os reais, a potenciação é uma multiplicação reiterada e a variável x representa número real aleatório.

Uma equação polinomial é uma expressão do tipo:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = b,$$

com b real; e procurar solução da equação consiste em determinar quais os valores reais da variável x que fazem a igualdade valer.

A famosa equação do segundo grau, que tem como método de resolução o procedimento de Bhaskara, é um caso particular e interessante.

Caracterizamos a abordagem polinomial acima e sua solução para a estrutura dos reais. Porém, não precisamos nos ater apenas a esta estrutura matemática. Podemos tratar com polinômios com várias variáveis, como por exemplo, p(x,y,z) = $xyz - 5x^2 + 9y^3z^2$, como, também, sobre muitas outras estruturas, outros corpos, anéis, módulos e outros.

Agora, estenderemos esta abordagem para o contexto booleano e depois para aquele que interessa ao nosso desenvolvimento, o ambiente das TK-álgebras.

Uma definição bastante usual de Álgebra de Boole que pode ser encontrada em (MIRAGLIA, 1987) e (RASIOWA, 1974) é a seguinte.

Álgebra de Boole é um reticulado, distributivo e complementado.

De um modo mais simples e visual, uma Álgebra de Boole é uma estrutura algébrica do tipo **B** = (B, ~, ∨, ∧, ⊥, ⊤), em que B é um conjunto não vazio com duas operações binárias: ∧ (conjunção) e ∨ (disjunção) e uma operação unária ~ (complemento) e dois elementos específicos ⊥ e ⊤, tais que para todos x, y, z ∈ B valem:

(i) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ e $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (associatividade)

(ii) $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$ (comutatividade)

(iii) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ e $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (distributividade)

(iv) $x \wedge (x \vee y) = x$ e $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorção)

(v) $x \wedge x = x$ e $x \vee x = x$ (idempotência)

(vi) para cada x existe $\sim x \in B$ tal que $x \vee \sim x = \top$ e $x \wedge \sim x = \bot$ (complementar)

(vii) $x \vee \bot = x$, $x \vee \top = \top$, $x \wedge \top = x$ e $x \wedge \bot = \bot$

(viii) $\bot \neq \top$.

Em toda álgebra de Boole valem todas estas e mais algumas bastante simples e bem conhecidas dos manuais de lógica, como por exemplo, (FEITOSA, PAULOVICH, 2005). Usaremos os símbolos $\rightarrowtail$ e $\leftrightsquigarrow$ como os correspondentes símbolos de condicional e bicondicional na álgebra. Por exemplo, valem as seguintes igualdades: $x \rightarrowtail y = \sim x \vee y$, $x \leftrightsquigarrow y = x \rightarrowtail y \wedge y \rightarrowtail x$, $x \rightarrowtail y = \sim y \rightarrowtail \sim x$, $\sim\sim x = x$, $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$, $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

Polinômio booleano é uma expressão matemática que pode ser interpretada numa álgebra de Boole. Por exemplo, $p(x, y) = (x \rightarrowtail y) \wedge (x \wedge {\sim}y)$. Agora as variáveis representam termos de B e as operações são aquelas da álgebra **B**. Uma equação booleana é uma igualdade entre dois polinômios booleanos e a resolução de uma equação é a busca pelos valores das variáveis que fazem valer a igualdade.

A cada fórmula da lógica proposicional clássica φ corresponde um único polinômio $\xi(\varphi)$ sobre **B**, com a tradução da primeira variável da fórmula em x, a segunda em y e assim por diante. As fórmulas são finitas e, portanto, envolvem apenas uma quantidade finita de variáveis. Se forem muitas fórmulas, podemos indexar as variáveis. Interpretamos os operadores lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ nos operadores booleanos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrowtail$ e $\leftrightsquigarrow$.

Por exemplo, se $\varphi \equiv \psi \rightarrow (\psi \vee \sigma)$, então $\xi(\varphi) = x \rightarrowtail (x \vee y) = p(x, y)$.

Uma fórmula do CPC é *válida* se, e somente se, o seu polinômio booleano é idêntico a $\top$, que representa o *vero*.

Como na lógica, podemos fazer as seguintes operações sobre polinômios: (i) podemos trocar uniformemente uma variável por um polinômio qualquer (substituição uniforme) e (ii) podemos trocar uma parte por outra se elas são equivalentes (substituição de equivalentes).

Por questão de simplicidade, sempre fazemos as seguintes operações:

(ii-1) trocamos $x \leftrightsquigarrow y$ por $x \rightarrowtail y \wedge y \rightarrowtail x$ e

(ii-2) trocamos $x \rightarrowtail y$ por ${\sim}x \vee y$.

Com isto podemos mostrar a validade de muitas fórmulas. Para mostrarmos a validade, podemos usar as propriedades permitidas, da álgebra de Boole, e se chegamos ao *vero*, então temos uma fórmula válida ou uma tautologia.

(a) Dada $\psi \rightarrow (\psi \vee \sigma)$, temos $x \rightarrowtail (x \vee y) = {\sim}x \vee (x \vee y) = ({\sim}x \vee x) \vee y = \top \vee y = \top$. Logo a fórmula é CPC-válida.

(b) Dada $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, temos $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = {\sim}x \vee ({\sim}y \vee x) = {\sim}x \vee (x \vee {\sim}y) = ({\sim}x \vee x) \vee {\sim}y = \top \vee {\sim}y = \top$.

(c) Dada $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$, temos $({\sim}x \rightarrowtail {\sim}y) \rightarrowtail (({\sim}x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) = ({\sim}{\sim}x \vee {\sim}y) \rightarrowtail (({\sim}{\sim}x \vee y) \rightarrowtail x) = (x \vee {\sim}y) \rightarrowtail ((x \vee y) \rightarrowtail x) = {\sim}(x \vee {\sim}y) \vee ({\sim}(x \vee y) \vee x) = {\sim}(x \vee {\sim}y) \vee (({\sim}x \wedge {\sim}y) \vee x) = {\sim}(x \vee {\sim}y) \vee (({\sim}x \vee x) \wedge ({\sim}y \vee x)) = {\sim}(x \vee {\sim}y) \vee (\top \wedge (x \vee {\sim}y)) = {\sim}(x \vee {\sim}y) \vee (x \vee {\sim}y) = \top$.

Mas e quando não chagamos ao $\top$? Se chegarmos a $\bot$, então a proposição não é válida, ou melhor, ela é uma contradição.

(d) Dada $\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$, temos ${\sim}(x \rightarrowtail x) = {\sim}\top = \bot$.

Porém, temos alguns casos intermediários, dados pelas sentenças contingentes. Se não temos mais operações a efetuar e não chegamos no $\top$, então a sentença não é válida.

(e) Dada $\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \sigma)$, temos $x \rightarrowtail (x \wedge y) = {\sim}x \vee (x \wedge y) = ({\sim}x \vee x) \wedge y = \top \wedge y = y$.

A essência do processo de decisão algébrico é mostrar que a fórmula em questão vale em qualquer álgebra de Boole e, portanto, ela é válida; ou existe uma álgebra de Boole na qual ela não vale.

Contudo, além da tradição que faz o teste com as tabelas de verdade sobre a álgebra de Boole $\mathbf{2} = \{\bot, \top\}$, resultados algébricos mostram que não precisamos fazer os testes em diversas álgebras, mas apenas nesta, $2 = \{\bot, \top\}$. Se a fórmula é válida, então em $2 = \{\bot, \top\}$ ela será idêntica a $\top$; e se não é válida, então em $2 = \{\bot, \top\}$ ela será idêntica a $\bot$, para alguma atribuição de valores para as variáveis da fórmula investigada.

Agora, naturalmente, estendemos o método para a lógica TK e polinômios sobre TK-álgebras. Trataremos apenas com $2 = \{\bot, \top\}$ sobre a qual devemos incluir o operador $\bullet$. Sabemos que $\bullet\top = \top$, mas não quem é $\bullet\bot$.

Indicaremos a TK-álgebra sobre **2** por $\mathbf{2} = \{\bot, \top, \mathcal{F}\}$, em que $\mathcal{F}$ indica quem são os elementos fechados desta TK-álgebra.

Deste modo, temos duas TK-álgebras sobre **2**, uma em que $\bullet\bot = \bot$ e fica assim $\mathbf{2} = \{\bot, \top, \mathcal{F} = \{\bot, \top\}\}$ (o operador de fecho é a função identidade), e outra em que $\bullet\bot = \top$, $\mathbf{2} = \{\bot, \top, \mathcal{F} = \{\top\}\}$ (o operador de fecho é a função constante $\top$).

Para cada fórmula φ de TK construímos o seu polinômio $\xi(\varphi)$ segundo as TK-álgebras. Se o polinômio é idêntico a $\top$, então a fórmula é válida. Do contrário precisamos de um contraexemplo vindo de uma das duas TK-álgebras acima.

(f) Dada $\blacklozenge(\varphi \vee \blacklozenge\varphi) \to \blacklozenge\varphi$, temos $\bullet(x \vee \bullet x) \rightarrowtail \bullet x = \bullet(\bullet x) \rightarrowtail \bullet x = \bullet x \rightarrowtail \bullet x = \top$. Logo a fórmula é TK-válida.

(g) Dada $\blacklozenge\varphi \to \blacklozenge(\varphi \wedge \psi)$, temos $\bullet x \rightarrowtail \bullet(x \wedge y) = {\sim}\bullet x \vee \bullet(x \wedge y)$. Para $\mathbf{2} = \{\bot, \top, \mathcal{F} = \{\bot, \top\}\}$, com a substituição de x por $\top$ e y por $\bot$, temos $\bullet\top \to \bullet(\top \wedge \bot) = \top \to \bullet\bot = \top \to \bot = \bot$. Então, esta fórmula não é TK-válida.

(h) As proposições $\varphi \to \blacklozenge\neg\varphi$ e $\blacklozenge\neg\varphi \to \varphi$ não são TK-válidas, pois:

Para $x \rightarrowtail \bullet{\sim}x$ e $2 = \{\bot, \top, \mathcal{F} = \{\bot, \top\}\}$, com a substituição de x por $\top$, temos

$\top \rightarrowtail \bullet{\sim}\top = \top \rightarrowtail \bullet\bot = \top \rightarrowtail \bot = \bot$.

Para $\bullet{\sim}x \rightarrowtail x$ e $2 = \{\bot, \top, \mathcal{F} = \{\top\}\}$, com a substituição de x por $\bot$, temos

$\bullet{\sim}\bot \rightarrowtail \bot = \bullet\top \rightarrowtail \bot = \top \rightarrowtail \bot = \bot$.

A interpretação de uma fórmula segundo um polinômio é usual na lógica clássica e também para outras lógicas. Nos casos discutidos, essencial mesmo é que podemos tomar como modelo para a discussão apenas a álgebra **2** = $\{\bot, \top\}$, por ser simples e de tamanho mínimo.

Das discussões anteriores, observamos que podemos estender o método das tabelas de verdade para TK.

Dada uma fórmula φ qualquer de TK, construímos duas tabelas de verdade para φ. Na primeira tomamos $\bullet$ como a função identidade e na segunda como a função constante sobre $\{\top\}$. Os demais operadores agem como no caso clássico. Se nas duas construções a fórmula φ assume sempre o valor $\top$, então ela é válida em TK. Se numa das construções ela assume o valor $\bot$, então φ não é válida em TK.

Temos assim um método de decisão para TK. Resta-nos justificar que apenas 2 = $\{\bot, \top, \mathcal{F}\}$ é o bastante como semântica para TK, o que justificaremos posteriormente.

Considerações finais

A partir dos operadores de consequência, temos mostrado a formalização do conceito nos ambientes conjuntista, lógico e algébrico e a completude do sistema lógico segundo os modelos sugeridos.

Ainda precisamos dar uma argumentação definitiva de que **2** = $\{\bot, \top, \mathcal{F}\}$ atende o quesito da completude. Não basta termos a convicção de que funciona, precisamos mostrar que de fato funcionam e sempre. Este passo adicional fica para outro momento, pois imaginamos que precisaremos de um bom aparato matemático para a sua plena justificativa.

Esta é a argumentação algébrica. Para um método de decisão muito simples para TK, podemos escolher o método dos tablôs como em (GÓLZIO, RODRIGUES, 2010).

Referências

AGUDELO, J. C.; CARNIELLI, W. Polynomial ring calculus for modal logics: a new semantics and proof method for modalities. *The Review of Symbolic Logic,* v. 4, p. 150-170, 2011.
BELL, J. L.; MACHOVER, M. *A course in mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland, 1977.
BLACKBURN, P.; RIJKE, M.; VENEMA, Y. *Modal logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
CARNIELLI, W. A.; PIZZI, C. *Modalità e multimodalità*. Milano: Franco Angeli, 2001.
CHAGROV, A.; ZAKHARYASCHEV, M. *Modal logic.* Oxford: Clarendon Press, 1997.
EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. *Mathematical logic*. New York: Springer-Verlag, 1984.
FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à Lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2005.
FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. Logic TK: algebraic notions from Tarki's consequence operator. *Principia*, v. 14, p. 47-70, 2010.
FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; SOARES, M. R. Models for the logic of Tarski consequence operator. In: Cezar A. Mortari. (Org.). *Tópicos de lógicas não clássicas*. Florianópolis: NEL/UFSC, p. 125-137, 2014.
GÓLZIO, A. C. J.; RODRIGUES, A. P. A lógica TK em dedução natural, cálculo de sequentes e tableaux. *Kinesis*, v. II, n. 4, p. 285-311, 2010.
MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic.* 3. ed. Monterey, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1987.
MIRAGLIA, F. *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*. Campinas: UNICAMP/CLE, 1987. (Coleção CLE, v. 1)
MORTARI, C. A.; FEITOSA, H. A. A neighbourhood semantic for the Logic TK. *Principia*, v. 15, p. 287-302, 2011.
NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. As álgebras dos operadores de consequência. *Revista de Matemática e Estatística*, v. 23, n. 1, p. 19-30, 2005..
RASIOWA, H. *An algebraic approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland, 1974.