CONSIDERAÇÕES SOBRE O TRIÂNGULO DE PASCAL COMO NOTAÇÃO ALTERNATIVA À GENERALIZAÇÃO DAS OPERAÇÕES DE VERDADE NO *TRACTATUS* DE WITTGENSTEIN

CONSIDERATIONS ON THE PASCAL TRIANGLE AS ALTERNATIVE NOTATION FOR WITTGENSTEIN'S *TRACTATUS* GENERALIZATION OF TRUTH OPERATIONS

Ralph Leal Heck[1]

Resumo: O presente estudo é uma proposta de aplicação do triângulo de Pascal às generalizações das possibilidades de valores de verdade das proposições elementares do *Tractatus* de Wittgenstein. O Objetivo da aplicação desta notação é facilitar a manipulação e a análise de uma grande quantidade de proposições elementares preservando o escopo de possibilidades de verdade, algo que a notação das tabelas de verdade de Wittgenstein não é capaz de satisfazer. Para realizar esta tarefa, executo os seguintes passos: introduzo a teoria da figuração, apresento como o autor expressa as possibilidades de verdade das proposições, além de expor o método e a notação de generalização das possibilidades de verdade. Em seguida, defino e exemplifico o triângulo de Pascal como notação alternativa e, por fim, verifico a validade da notação do triângulo no contexto das definições de número, soma e produto aritmético do *Tractatus*, de modo a preservar a consistência da notação com o pensamento do filósofo.

Palavras-chave: Lógica. Filosofia da matemática. Generalização. Triângulo de Pascal.

Abstract: The present study is a proposal of application Pascal's triangle to the Wittgenstein's *Tractatus* generalization of truth values possibilities from elementary propositions. The goal of such application is to make easier the manipulation and the analysis of a large amount of elementary propositions preserving the scope of truth possibilities, something that the Wittgenstein's truth table notation isn't able to provide. In order to accomplish this task I go through the following steps: introducing the figurative theory, presenting how the author expresses the propositions truth possibilities, and then presenting the method and notation of the generalization of truth values possibilities. Next, I define and exemplify the Pascal's triangle as alternative notation and, in the end I verify the application of the triangle's notation in the context of the *Tractatus* arithmetical definitions of "number", "sum" and "product" , in such a way to preserve the notation consistency to the philosopher's thinking.

Keywords: Logic. Philosophy of Mathematics. Generalization. Pascal's Triangle.

* * *

Introdução

A teoria da figuração é o cerne da teoria da verdade do *Tractatus*, uma das inovações filosóficas da obra e uma das contribuições responsáveis pela primeira virada linguística do século XX, também conhecida por "virada ontológica". Esta teoria tem

[1] Doutorando em Filosofia pela Universidade Federal do Ceará. E-mail: imagomundi@hotmail.com

https://doi.org/10.36311/1984-8900.2013.v5n09.4759

por objetivo a comparação lógica entre a proposição e os fatos, de modo a nos fornecer valores de verdade: verdadeiro no caso de uma comparação bem sucedida, falso no caso de uma comparação inadequada. Wittgenstein estabelece como generalização aos casos possíveis da teoria da figuração, ou melhor, das possibilidades de combinação entre proposições e fatos, um somatório que é comumente traduzido por 2^n (dois elevado a n) possibilidades de combinações de valores de verdade, onde n é igual às proposições disponíveis para avaliação. A questão da simplificação deste somatório apresentado no aforismo 4.27 e amplamente difundido pelos especialistas no filósofo pode ser desenvolvido de modo a tornar visível os conceitos subjacentes a fórmula e oferecer outro ângulo de entendimento, por meio da aplicação do triângulo de Pascal. O triângulo entra neste desdobramento como um método que acredito permitir visualizar melhor o que Wittgenstein quer dizer com a fórmula de somatório de binômios (a formula de generalização). O problema que encontrei nesta demonstração é conciliar a exposição do triângulo, que é perfeitamente compatível com a concepção de somatório e, ainda assim, sustentar as definições de número, soma e produto aritméticos. Vou iniciar a exposição com a caracterização geral do conceito de figuração e sua relação com os valores de verdade, em seguida, a apresentação da generalização para os valores de verdade de cada um dos termos do binômio semântico da proposição, para em seguida, apresentarmos a generalização das possibilidades de verdade da figuração, seguindo para seu paralelo com a demonstração do triângulo de Pascal e, por fim, farei a argumentação e o questionamento sobre a conciliação entre o significado dos componentes do triângulo e a definição de soma e produto aritmético, presentes no *Tractatus*.

A teoria da figuração

A teoria da figuração nada mais é que a afirmação de um isomorfismo entre a linguagem e o mundo. Ela é uma releitura de cunho lógico da teoria clássica da verdade a "*adaequatio intellectus ad rem*". Segundo o *Tractatus*, as unidades elementares de sentido, que são as proposições elementares, são verdadeiras quando correspondem a um estado de coisas e este estado de coisas ocorre. A correspondência entre proposição elementar e estado de coisas se justifica pelo fato da proposição elementar reproduzir a mesma estrutura lógica da realidade. Quando ocorre a correspondência, dizemos que a proposição é verdadeira, quando não ocorre dizemos que ela é falsa.

Obviamente, a decisão sobre a verdade e a falsidade das proposições elementares é uma questão *a posteriori* e, segundo Wittgenstein, não compete à lógica decidir quais são, de fato, verdadeiras e quais são falsas. Mas, de acordo com o próprio filósofo, é possível traçar a priori um escopo de possibilidades, dada uma quantidade qualquer de proposições. Este caso, não só pertence à lógica, como é de fundamental importância para compreendermos outras teorias do *Tractatus* que tangenciam a teoria pictórica, como, por exemplo, a teoria das proposições complexas e sua filosofia da lógica.

As possibilidades de verdade

A questão das *possibilidades de verdade* se inicia com a consideração da independência da proposição elementar.

A necessidade de a proposição elementar possuir somente um valor de verdade e este valor de verdade não ser dependente de qualquer outra proposição elementar, nos explica como funcionam os valores de verdade. Vejamos na proposição 4.211: "é um sinal[2] da proposição elementar que nenhuma proposição elementar possa estar em contradição com ela." Isto significa dizer que, tomada isoladamente, a possibilidade de uma proposição elementar não exclui outra proposição. Além de que Wittgenstein afirmar que, necessariamente, a proposição elementar possui um dos dois valores de verdade: verdadeiro ou falso.

As *possibilidades de verdade* passam a ganhar determinação à medida que utilizamos o que Wittgenstein denomina *operações*. Para que sejamos capazes de compreender corretamente o que são estas possibilidades, precisamos esclarecer o que o termos significa. Para tanto, vamos estabelecer as seguintes definições no *Tractatus*: "a operação é a expressão de uma relação entre as estruturas de seu resultado e de suas bases."[3] e "a operação é o que deve acontecer com uma proposição para que dela se faça outra."[4] E "A operação só pode intervir onde uma proposição resulta de uma outra de maneira logicamente significativa.(...)"[5].

Assim, utilizamos as operações para obter outras proposições mais complexas com base em proposições elementares. A cada aplicação da operação, modificamos as

---

[2] O termo sinal (*Zeichen*), neste contexto, também poderia significar "indício".
[3] WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Phlosophicus*, 1922, aforismo 5.22.
[4] Ibid., aforismo 5.23.
[5] Ibid., aforismo 5.233.

possibilidades de verdade de uma proposição elementar. Por exemplo, $(p \vee \neg p) \leftrightarrow (\neg(\neg p) \wedge p)$. Isto vale tanto para uma única proposição elementar como para múltiplas proposições elementares combinadas entre si. Como por exemplo, as combinações possíveis entre as proposições elementares p e q. a partir das operações de negação, adição lógica, multiplicação lógica, etc.[6].

Uma das funções da introdução das *tabelas de verdade*[7] por Wittgenstein é realizar a avaliação das possibilidades de verdade de proposições complexas. Ora, se a cada proposição atribuímos o valor V para verdadeiro e F para falso, obtemos a seguinte combinação de possibilidades de verdade para as proposições p e q:

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F

A cada inclusão de uma nova proposição elementar esta estrutura se modifica e amplia a gama de combinações:

p	V	V	V	V	F	F	F	F
q	V	V	F	F	V	V	F	F
r	V	F	V	F	V	F	V	F

Neste ponto, podemos dizer que a aplicação das operações descreve cada uma das combinações possíveis dos valores de verdade possíveis. A totalidade de combinações possíveis é determinada pela quantidade de proposições elementares envolvidas nas possibilidades de composição do complexo, chama-se complexo o conjunto de proposições elementares envolvidas.

É interessante notar que cada possibilidade de combinação dos valores corresponde a uma estrutura de combinação entre as proposições elementares. É de onde se obtém a forma geral dos operadores. Wittgenstein evidencia-a na proposição 5.101:

> As funções de verdade de um número qualquer de proposições elementares podem ser inscritas num esquema[8] da seguinte espécie:

---

[6] Adição lógica equivale ao "ou", multiplicação lógica ao "e".

[7] Vale salientar que Wittgenstein, ao introduzir as tabelas de verdade, parece mostrar que os grafos que exemplificam as combinações lógicas e as possibilidades de verdade resultantes de suas relações são puramente arbitrários. Uma tabela de verdade apenas contém as abreviações das proposições em questão e os valores referentes a cada grupo de combinações.

[8] Faremos alterações na grafia original do texto de Wittgenstein a fim de facilitar a leitura atual dos conectivos lógicos. As alterações que forem feitas serão designadas pelo uso do *itálico*.

(V,V,V,V)(p,q) Tautologia (se p, então p; e se q, então q.)$((p\to p)\wedge(q\to q))$

(F,V,V,V)(p,q) em palavras: não ambos p e q. $(\neg(p\wedge q))$

(V,F,V,V)(p,q) ” ” : se q, então p. $(q\to p)$

(V,V,F,V)(p,q) ” ” : se p, então q. $(p\to q)$

(V,V,V,F)(p,q) ” ” : p ou q. $(p\vee q)$

(F,F,V,V)(p,q) ” ” :Não q. $(\neg q)$

(F,V,F,V)(p,q) ” ” :Não p. $(\neg p)$

(F,V,V,F)(p,q) ” ” : p ou q, mas não ambos.$(p\underline{\vee}q)$ *ou* $(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)$

(V,F,F,V)(p,q) ” ” : Se p, então q; se q, então p. $(p\leftrightarrow q)$

(V,F,V,F)(p,q) ” ” : p

(V,V,F,F)(p,q) ” ” : q

(F,F,F,V)(p,q) ” ” : Nem p nem q. $(\neg p\wedge\neg q$ *ou* $p|q)$

(F,F,V,F)(p,q) ” ” : p e não q $(p\wedge\neg q)$

(F,V,F,F)(p,q) ” ” : q e não p $(q\wedge\neg p)$

(V,F,F,F)(p,q) ” ” : q e p $(q\wedge p)$

(F,F,F,F)(p,q) Contradição: (p e não p; e q e não q.) $(p\wedge\neg p)\wedge(q\wedge\neg q)$

Isto significa dizer que a formação dos complexos proposicionais se dá por meio de operações que colocam as proposições elementares em relação de dedução da verdade ou falsidade dos complexos que as contém. O resultados combinatórios entre possibilidades de verdade das proposições elementares envolvidas são chamados de *fundamentos de verdade e fundamentos de falsidade*.

Em outras palavras, definem-se os fundamentos de verdade como o resultado “verdadeiro” decorrente da combinação dos valores veritativos do grupo de enunciados mais simples, presentes nas operações que compõem o complexo analisado. Os fundamentos de falsidade, o resultado “falso”, decorrentes da combinação dos valores veritativos do grupo de enunciados mais simples, presentes nas operações que compõem o complexo analisado. Quando a verdade de dois enunciados está presente em um enunciado complexo verdadeiro que as contém, dizemos que os primeiros seguem-se do segundo[9]. Isto pode ser exemplificado pela tabela de verdade:

9 Cf. WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Phlosophicus*, 1922, aforismos 5.11 e 5.12.

	p	q	pvq		
1	V	V	V	⟶	Fundamentos de verdade
2	V	F	V	⟶	
3	F	V	V	⟶	
4	F	F	F	⟶	Fundamento de falsidade

A generalização das combinações de verdade

A possibilidade de generalização das relações de valores de verdade e fundamentos de verdade é expressa por Wittgenstein através de dois níveis de generalização, expressos na forma de somatórios. O que vou chamar de fórmula (i) [10]:

$$K_n = \sum_{v=o}^{n}\left(\frac{n}{v}\right)$$

E que chamarei de fórmula (ii) [11]:

$$\sum_{k=0}^{K_n}\left(\frac{K_n}{k}\right) = L_n$$

A fórmula (i) expressa o conjunto das possibilidades de combinações de valores de verdade entre *n* proposições elementares. A fórmula (ii) indica os possíveis fundamentos de verdade (e falsidade) entre as combinações de verdade de *n* proposições elementares.

Nestes termos, K_n equivale á um cálculo exponencial da ordem de 2^n possibilidades, L_n equivale à $(2^n)^n$. O que significa dizer que em uma *relação* de possibilidades de verdade entre duas proposições *p* e *q*, com a aplicação de (i) temos 4 possibilidades de combinações de verdade para *p* e *q* e 16 possibilidades de fundamentos de verdade entre as possibilidade de combinação entre p e q.

Para fins de nossa exposição, me deterei em maior parte na fórmula (i), uma vez que a (ii) é a reiteração do somatório de (i) sobre K_n. O importante é que estes

[10] Ibid., aforismo 4.27.
[11] Ibid., aforismo 4.42.

somatórios são tentativas de generalizações maiores do que expressar formas gerais de combinações. Na literatura sobre o Tractatus, há a boa intenção de simplificar este cálculo. Mas, isto esconde, em primeiro lugar, a influência lógico-matemática da formação de Wittgenstein e, em segundo lugar, oculta o fato de que isto corresponde a um processo lógico, que permite diferentes notações e, segundo minha proposta, a resolução deste somatório a partir do binômio de Newton.

Aqui, abro uma intercessão com a lógica booleana de modo a deixar mais claro como é possível o intercâmbio entre o somatório e o binômio de Newton. Na aritmética booleana, os conectivos lógicos "e" e "ou" são traduzidos por multiplicação lógica e soma lógica, respectivamente. Onde $a \wedge b$ ("*a* e *b*"), passará a ser lido como a.b ("*a* vezes *b*") , e $a \vee b$ ("*a* ou *b"*) , passará a ser lido como a+b ("*a* mais *b*"). A passagem para esta leitura não interfere em nada a argumentação do *Tractatus*, já que o próprio Wittgenstein utiliza essa terminologia na obra[12]. O binômio entra em questão ao considerarmos as possibilidades de verdade de uma proposição elementar: ou ela pode ser verdadeira "*x*", ou pode ser falsa "*y*", representável pela expressão "x+y". Na tradução do somatório para este raciocínio do binômio $(x+y)^n$, n, que representa no somatório o número de proposições elementares, passa a ser a potência em que é elevada a soma de dois incógnitas (x+y). Em outros termos, a fórmula (i) trata do somatório de uma expressão binomial, onde o número de combinações (*Kombinationen*) K_n é igual ao somatório do limite inferior $v = 0$ até o limite superior n do coeficiente x^v do termo de uma expansão polinomial[13] da ordem de $(x+y)^n$; onde v é, a cada iteração, $n-(x+1)$ espaços de combinações gastos até que se tenha ocupado todo o espaço n de possibilidades: $n-(x+1)=0$.

Ora, se n é a potencia deste binômio e n é a quantia de proposições elementares que temos disponíveis para avaliar, isto significa que, se tivéssemos 3 proposições elementares, teríamos segundo os comentadores 2^3 (dois elevado a três) possíveis combinações de valores de verdade entre elas. Mas isto apenas dá uma visão geral do escopo de possibilidades. Se considerarmos o binômio de Newton nesta leitura, poderemos ter uma visão mais detalhada das possibilidades. No caso acima, a notação ficaria do seguinte modo:

$$(x+y)^3 = (x^3\, y^0) + 3(x^2\, y^1) + 3(x^1\, y^2) + (x^0\, y^3)$$

---

[12] E.g. WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Phlosophicus*, 1922, aforismos 3.42 e 5.521.

[13] Iremos trabalhar a justificativa do sinal "+" da ordem polinomial (x+y) no item 4.

Que leitura poderíamos fazer disto?

A minha proposta é fazermos uma leitura híbrida da álgebra aritmética com a álgebra booleana de modo que cada um destes termos corresponda a um subconjunto de possibilidades. Onde: $(x^3\ y^0)$ corresponde a 1 possibilidade de que as três proposições sejam verdadeiras; *e* $3(x^2\ y^1)$ corresponde à 3 possibilidades de que duas proposições sejam verdadeiras e uma falsa; *e* $3(x^1\ y^2)$ corresponde à 3 possibilidades de que uma proposição seja verdadeira e duas sejam falsas; *e* $(x^0\ y^3)$ corresponde a 1 possibilidade de que as três proposições sejam falsas.

Vamos tirar a prova disto utilizando a tabela de verdade:

p	V	V	V	V	F	F	F	F
q	V	V	F	F	V	V	F	F
r	V	F	V	F	V	F	V	F

Vou fazer a demonstração atribuindo os valores de verdade das proposições p, q e r organizadas em grupos de acordo com a soma dos binômios:

$(x^3\ y^0) \Rightarrow$ v(p) = V, v(q) = V, v(r) = V

$3(x^2\ y^1) \Rightarrow$ v(p) = V, v(q) = V, v(r) = F

ou v(p) = V, v(q) = F, v(r) = V

ou v(p) = F, v(q) = V, v(r) = V.

$3(x^1\ y^2) \Rightarrow$ v(p) = V, v(q) = F, v(r) = F

ou v(p) = F, v(q) = F, v(r) = V

ou v(p) = F, v(q) = V, v(r) = F.

$(x^3\ y^0) \Rightarrow$ v(p) = V, v(q) = V, v(r) = V.

É notório que o uso dos binômios permite compactar as possibilidades de combinações em pequenos termos. Entretanto, abrir mão das tabelas de verdade e utilizar os binômios sem nenhuma estratégia de organização da informação seria complicar algo que já está organizado pela notação da tabela. É então que proponho a utilização de um método alternativo em conjunto com o cálculo de binômios para potencializar a capacidade de condensar os valores de verdade dos binômios e permitir a aplicação deste prospecto de possibilidade à uma enorme quantidade de proposições: “o triangulo de Pascal”.

O triângulo como notação alternativa

O que é o triângulo de Pascal?

O triângulo de Pascal ou também chamado de triângulo de Tartaglia, é um artifício visual que facilita a análise combinatória de coeficientes binomiais. Ele organiza em forma triangular uma quantidade ilimitada de binômios envolvidos na combinação.

O triângulo de pascal entra como uma ferramenta análoga à tabela de verdade, com uma vantagem e uma desvantagem. A desvantagem é que ela não é específica a ponto de delimitar caso a caso das combinações de verdade como faz a tabela, entretanto, a vantagem é que ela permite a avaliação de possibilidades de verdade de uma quantidade muito superior de proposições de uma só vez. Por exemplo, se tentássemos avaliar as possibilidades de verdade entre 7 proposições, precisaríamos escrever 7 colunas e 128 linhas para construirmos nossa tabela de verdade. Sendo que apenas com algumas linhas já teremos um prospecto interessante. Vejamos o exemplo:

	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1								$=2^0$
1	1	1							$=2^1$
2	1	2	1						$=2^2$
3	1	3	3	1					$=2^3$
4	1	4	6	4	1				$=2^4$
5	1	5	10	10	5	1			$=2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1		$=2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1	$=2^7$

Neste caso, leríamos o triângulo da seguinte forma:

a) x^7y^0 => há 1 possibilidade de que as 7 proposições sejam verdadeiras.
b) $7(x^6\ y^1)$ => há 7 possibilidades de que 6 proposições sejam V e 1 proposição seja F.

c) $21(x^5y^2)$ => há 21 possibilidades de que 5 proposições sejam V e 2 proposições sejam F.
d) $35(x^4y^3)$ => há 35 possibilidades de que 4 proposições sejam V e 3 proposições sejam F.
e) $35(x^3y^4)$ => há 35 possibilidades de que 3 proposições sejam V e 4 proposições sejam F.
f) $21(x^2y^5)$ => há 21 possibilidades de que 2 proposições sejam V e 5 proposições sejam F.
g) $7(x^1y^6)$ => há 7 possibilidades de que 1 proposições sejam V e 6 proposições sejam F.
h) x^0y^7 => há 1 possibilidade de que as 7 proposições sejam falsas.

Assumindo que podemos organizar coeficientes binomiais por meio do triângulo de pascal, temos:

Linha 1 = 1 = 2^0 Possibilidades.
Linha 2 = 1 + 1 = 2 = 2^1 Possibilidades.
Linha 3 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2 Possibilidades.
Linha 4 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3 Possibilidades.
Linha 5 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4 Possibilidades.
Linha 6 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5 Possibilidades.
Linha 7 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6 Possibilidades.
Linha 8 = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 =2^7 Possibilidades.

Vou apresentar um exemplo mais intuitivo. Tomemos uma proposição *p* aplicada à fórmula de somatório:

$$K_1 = \sum_{v=o}^{1} (\frac{1}{v}) = (x^1.y^0) + (x^0.y^1)$$

A partir daí, lemos: há *uma* possibilidade de que *p* seja verdadeiro, há *uma* possibilidade de que *p* seja falso. Com um total de *duas* possíveis combinações de valores de verdade (2^1), ou melhor, dois possíveis valores de verdade para *p*: V *ou* F.

Outro exemplo, tomemos *duas* proposições *p* e *q*:

$$K_2 = \sum_{v=o}^{2} (\frac{2}{v}) = (x^2.y^0) + (2.x^1.y^1) + (x^0.y^2)$$

E podemos ler: há *uma* possibilidade de que *p* e *q* sejam verdadeiras, há duas possibilidades de que ou p, ou q sejam falsas, há uma possibilidade de que p e q sejam falsas. Com um total de *quatro* possíveis combinações (2^2).

Caso perguntássemos: e se não fosse dada nenhuma proposição? Ora, simplesmente teríamos:

$$K_0 = \sum_{v=o}^{0} (\frac{0}{v}) = (x^0.y^0)$$

Ou seja, nenhuma possibilidade. Isto, segundo nos parece, é o mesmo que afirmar que dada nenhuma possibilidade, todo o espaço lógico está preenchido. Valendo lembrar que essas possibilidades se aplicam em quantidade às condições de verdade e falsidade das proposições elementares[14].

A generalização das possibilidades de valores de verdade das combinações entre valores de verdade de proposições elementares, que interpreto como *a forma geral do espaço lógico* – Fórmula (ii):

$$\sum_{k=0}^{K_n} \binom{K_n}{k} = L_n$$

Como vimos, e a indica uma reiteração de (i). Assim, por exemplo, onde tínhamos:

$$K_2 = \sum_{v=o}^{2} (\frac{2}{v}) = (x^2.y^0) + (2.x^1.y^1) + (x^0.y^2)$$

Agora, passamos a ter:

$$L_2 = \sum_{k=0}^{K_2} \binom{K_2}{k} = [(x^2.y^0) + (2.x^1.y^1) + (x^0.y^2)].[(x^2.y^0) + (2.x^1.y^1) + (x^0.y^2)]$$
$$= (x^4.y^0) + (4x^3.y^1) + (6x^2.y^2) + (4x^1.y^3) + (x^0.y^4)$$

[14] Cf. WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Phlosophicus*, 1922, aforismo 4.28.

É interessante que se tentássemos definir as possibilidades desta relação, obteríamos exatamente a definição presente no aforismo 5.101. Com a ressalva de que a definição apresentada no aforismo citado, diz respeito ao espaço lógico de *apenas duas* proposições elementares. Utilizando o triangulo de pascal, vemos que seria muito mais eficiente trabalhar com a armação lógica de Wittgenstein, dado um número crescente de proposições: tomemos, inicialmente, duas proposições (*p* e *q*). Segundo a fórmula (i), teríamos o equivalente à linha 3 do triângulo: $1 + 2 + 1 = 2^2 = 4$ *possibilidades.* Aplicando à mesma quantidade a fórmula (ii) teríamos o equivalente à linha 17 do triângulo de Pascal: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = (2^2)^2 = 16$ *possibilidades* de resultados a partir das possibilidades de combinação e aqui lemos essas possibilidades como 16 tipos de operadores lógicos binários.

Se acrescentássemos mais uma simples proposição a ser comparada: *p*, *q* e *r*, à Fórmula (i), teríamos: $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8$ *possibilidades*. Aplicando a fórmula (ii) teríamos a linha 10: $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 2^9 = (2^3)^3 = 512$ *possibilidades* de resultados a partir das possibilidades de combinação.

O espaço lógico descrito pelas generalizações acima cresce de tal modo com a quantidade proposições disponíveis, que avaliando de apenas *cinco* proposições elementares: *p, q, r, s* e *t*, teríamos uma possibilidade de 2^5 combinações de valores de verdade e, ao aplicarmos a fórmula (ii), teríamos o equivalente à linha 26 do triângulo de Pascal: $1 + 25 + 300 + 2300 + 12650 + 53130 + 177100 + 480700 + 1081575 + 2042975 + 3268760 + 4457400 + 5200300 + 5200300 + 4457400 + 3268760 + 2042975 + 1081575 + 480700 + 177100 + 53130 + 12650 + 2300 + 300 + 25 + 1 = 2^{25} = (2^5)^5 = 33.554.432$. Totalizando um espaço lógico de *trinta e três milhões, quinhentos e cinquenta e quatro mil, quatrocentos e trinta e dois* combinações possíveis, ou melhor, operadores lógicos, comparando-se apenas *cinco* proposições elementares!

Graças ao uso do triângulo, é possível escolhermos termo a termo e avaliar suas combinações e possibilidades de operação. Mas, será que esta leitura hibrida entre álgebra booleana e aritmética implica em alguma contradição com os termos do *Tractatus*, a saber: sua definição lógica de número e as operações aritméticas de soma e produto interferem na proposta do triângulo?

O teste de compatibilidade da notação do triangulo e a definição de número, soma e produto aritmético

Para avaliar se a notação alternativa oferece riscos graves de interpretação das operações lógicas, vamos confrontá-la com as definições de número, soma e produto aritméticos presentes no *Tractatus*. Wittgenstein diz o seguinte:

> E *assim* chegamos[15] aos números: defino
>
> $$x = \Omega^{0'} x \text{ Def.}$$
>
> $$\text{e } \Omega' \, \Omega^{\nu'} x = \Omega^{\nu+1'} x \text{ Def.}$$
>
> Segundo as regras notacionais, escrevemos, pois, a série
>
> $$x, \Omega' x, \Omega' \, \Omega' x, \Omega' \, \Omega' \, \Omega' x, \ldots,$$
>
> Assim:
>
> $$\Omega^{0'} x, \Omega^{0+1'} x, \Omega^{0+1+1'} x, \Omega^{0+1+1+1'} x, \ldots,$$
>
> Portanto, ao invés de "$[x, \xi, \Omega' \xi]$" escrevo:
>
> "$[\Omega^{0'} x, \ \Omega^{\nu'} x, \ \Omega^{\nu+1'} x]$".
>
> E defino:
>
> 0+1=1 Def.
> 0+1+1=2 Def.
> 0+1+1+1=3 Def.
>
> (etc.)[16]

O que nos mostra que o número é definido pelo processo de reiteração de uma operação lógica. Se o próprio somatório é uma operação de reiteração, acredito que não haja problemas em transformar a definição de número da seguinte forma:

$$x = \Omega^{0'} x = 0 => (x+y)^0$$

$$\Omega^{0+1'} x = 1 => (x+y)^1$$

$$\Omega^{0+1+1'} x = 2 => (x+y)^1 . (x+y)^1$$

$$\Omega^{0+1+1+1'} x = 3 => (x+y)^1 . (x+y)^1 . (x+y)^1$$

O mesmo parece valer para a multiplicação, já que Wittgenstein a reduz à soma:

> Formula-se assim a demonstração da proposição 2 x 2 = 4:
>
> $$(\Omega^{\nu})^{\mu'} x = \Omega^{\nu \times \mu'} x \text{ Def.}$$
>
> $$\Omega^{2 \times 2'} x = \left(\Omega^2\right)^{2'} x = \left(\Omega^2\right)^{1+1'} x = \Omega^{2'} \, \Omega^{2'} x = \Omega^{1+1'} \Omega^{1+1'} x$$
>
> $$= \left(\Omega' \Omega\right)' \left(\Omega' \Omega\right)' x = \Omega' \Omega' \Omega' \Omega' x = \Omega^{1+1+1+1'} x$$
>
> $$= \Omega^{4'} x^{17}$$

[15] Wittgenstein chega aos números a partir da proposição 6.01, onde se reiteram operações lógicas para formar outras proposições.
[16] WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Phlosophicus*, 1922, aforismo 6.01.

Com a observação de que o par de parênteses indica que expoente "μ" se aplica à "Ω" e estes parênteses expressam núcleos de reiteração de operações marcados pela igualdade: "$(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$". Se $\Omega^{1'}x = \Omega'x$ e $\Omega^{2'}x = (\Omega'\Omega)'x$, então $\Omega^{3'}x = (\Omega'(\Omega'\Omega))'x$. Logo, $\Omega^{3'}x = (x+y)^1.((x+y)^1.(x+y)^1)$

Deste modo, me parece bastante plausível aplicar esta notação alternativa sem infringir as definições do *Tractatus*, facilitando o cálculo de possibilidades de um grande número de proposições elementares, nos próprios termos de Wittgenstein e, quem sabe, estender este método a outras perspectivas filosóficas da matemática.

Referências

BIZARRO, S. *A hertzian interpretation of Wittgenstein's Tractatus,* Eidos, Barranquilla, n.13, p.150-165, nov. 2010.

BLACK, M. *A Companion to Wittgenstein's Tractatus*. Cambridge: Cambridge University Press, 1964.

BRANQUINHO, J; MURCHO, S; GOMES, Gonçalves N. *Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos.* São Paulo: Martins Fontes, 2006.

FRASCOLA, P. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* [1994]. New York: Routledge, 2006.

GLOCK. H J, *Dicionário Wittgenstein* [1996]. Trad. port: Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

HACKER, P.M.S. *Insight and Illusion: Themes in the Philosophy of Wittgenstein*, [1989]. Bristol: Oxford Press, 1997.

MONK, R. *Wittgenstein: O dever do gênio* [1990]. Trad port: Carlos Alfonso Malferrari. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

PETERSON, D. *Wittgenstein Early Philosophy: Three Sides of the Mirror*, Toronto and Buffalo: University of Toronto Press, 1990.

RICKETTS, T. *The Cambridge Companion to Wittgenstein* [1996]. New York: Press Syndicate of the University of Cambridge.

SMULLYAN, R M. *First Order Logic.* Minesota: Dover Publications, Inc., 1995.

WITTGENSTEIN, L. *Cadernos 1914-1916*, Tradução portuguesa: Artur Mourão. Lisboa: Edições 70, 2004.

______. *Notebooks 1914-1916*, Eds: Wright & Anscombe, New York: Harper & Row, 1969.

______. *Tractatus Logico-Philosophicus* [1922]. [Edição Bilíngue] Tradução brasileira: Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp, 2010.

[17] Ibid., aforismo 6.241.