A LÓGICA TK EM DEDUÇÃO NATURAL, CÁLCULO DE SEQUENTES E TABLEAUX

THE TK LOGIC IN NATURAL DEDUCTION, SEQUENT CALCULUS AND TABLEAUX

Ana Claudia de Jesus Golzio*

Angela Pereira Rodrigues*

Resumo: (Feitosa, Grácio, Nascimento, 2007) introduziram uma nova lógica, a Lógica TK, que foi apresentada inicialmente no estilo hilbertiano. O objetivo deste trabalho é apresentar a Lógica TK em sistemas de dedução natural, cálculo de sequentes e tableaux assim como demonstrar a equivalência entre esses novos sistemas e o original.

Palavras-chave: Sistema hilbertiano. Dedução natural. Cálculo de seqüentes. Tableaux. Lógica TK.

Abstract: (Feitosa, Grácio, Nascimento, 2007) introduced a new logic, the TK Logic, that was presented initially in the Hilbert style. The objective of this work is to present the TK Logic in systems of natural deduction, sequent calculus and tableaux as well as to show the equivalence between this new systems and the original one.

Keywords: Hilbert system. Natural deduction. Sequent calculus. Tableaux. TK Logic.

1. Introdução

A lógica aparentemente nasceu na Grécia, com os sofistas, por volta do século V a. C., entretanto foi Aristóteles [384-322 a.C.], filósofo grego quem sistematizou e organizou esse conhecimento, elevando-o à categoria de ciência.

Na lógica moderna, a análise dos métodos de inferências é feita a partir de linguagens artificiais, formadas por um conjunto de símbolos que permitem encontrar expressões que têm significado único para uma teoria, isto é, sem ambiguidade. A presença de linguagens artificiais é uma das principais características de um *sistema formal*.

Um sistema formal é o componente sintático de uma teoria e o estudo dos significados que esses símbolos adquirem caracteriza o componente semântico. O Cálculo Proposicional Clássico (CPC) é um exemplo de sistema formal.

* Faculdade de Filosofia e Ciências - Universidade Estadual Paulista. anaclaudiagolzio@yahoo.com.br.
* Faculdade de Filosofia e Ciências. Universidade Estadual Paulista. angela.p.rodrigues@bol.com.br.

https://doi.org/10.36311/1984-8900.2010.v2n04.4382

David Hilbert [1862-1943] um dos matemáticos mais importantes da virada do Século XIX para o Século XX, em 1920, apresentou a proposta de que teorias matemáticas deveriam ser fundadas em princípios axiomáticos e mostrar que as teorias matemáticas eram isentas de contradição.

Atualmente relacionada à Proposta de Hilbert temos a teoria da prova, que se constitui num notório ramo da Lógica. Seu objetivo central é pesquisar métodos de prova ou de dedução. Alguns exemplos de métodos de dedução são: *sistema hilbertiano*, *sistema de dedução natural*, *sistema de cálculo de sequentes* e *sistema de tableaux*.

Outros conceitos de fundamental importância para este trabalho estão relacionados à noção de consequência lógica.

Tarski (2001), em seu artigo "Acerca do conceito de consequência lógica", afirma que o conceito de consequência lógica não foi introduzido arbitrariamente no campo das investigações estritamente formais, mas foram feitos esforços para aproximá-lo do conceito usual de consequência, isto é, do conceito usado na linguagem do dia-a-dia.

No artigo citado acima encontramos a primeira tentativa de formular uma definição precisa do conceito apropriado de consequência, feita por Carnap, e que pode ser enunciada como:

"A sentença X segue-se logicamente das sentenças da classe K se, e somente se, a classe consistindo de todas as sentenças de K e da negação de X é contraditória".

No artigo "Sobre alguns conceitos fundamentais da metamatemática" de Tarski (2001) existe uma primeira introdução à lógica abstrata (ou universal), definindo o significado e estabelecendo as propriedades elementares de alguns conceitos importantes pertencentes às ciências dedutivas, a partir da definição de um sistema lógico constituído somente por sentenças e pelo operador de consequência. O operador de consequência de Tarski indica, dado um conjunto de sentenças, qual é a consequência do conjunto dado.

Ainda de acordo com o artigo citado acima, o campo de pesquisa da metamatemática é formado pelas disciplinas dedutivas formalizadas, e estas disciplinas são consideradas como conjuntos de sentenças, também chamadas de sentenças significativas, nos quais, a partir das sentenças de qualquer conjunto X, outras sentenças podem ser obtidas por meio de operações denominadas regras de inferência. Essas sentenças são chamadas de consequências do conjunto de sentenças X. O conjunto de todas as sentenças é denotado por S e o conjunto de todas as consequências de X é denotado pelo símbolo Cn(X).

Velasco (2004) apresenta algumas propriedades do operador de consequência presentes no texto "On some fundamental concepts of metamathematics" de Alfred Tarski, em que L = (S, Cn) é uma estrutura de Tarski, Cn é o operador de consequência e S é um conjunto não vazio e enumerável. É importante ressaltar que a enumerabilidade já não é exigida nas definições de (Feitosa, Grácio, Nascimento, 2007) acerca do operador de consequência.

Ainda segundo (Velasco, 2004) o operador Cn é definido no conjunto dos subconjuntos de S, isto é, Cn: P(S) → P(S) e deve satisfazer os axiomas:

Ax_1: $X \subseteq Cn(X)$

Ax_2: $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$

Ax_3: $Cn(X) = \cup\, Cn(X')$, para todo $X' \subseteq X$ tal que X' é finito e

Ax_4: Existe uma sentença x tal que $Cn(\{x\}) = S$.

Tarski assumiu posteriormente a condição $X \subseteq Y \Rightarrow Cn(X) \subseteq Cn(Y)$ como axioma ao invés do axioma Ax_3, entretanto esse novo sistema é mais fraco que o primeiro, pois o axioma Ax_3 não é dedutível de um sistema que contenha a condição acima e os axiomas Ax_1, Ax_2 e Ax_4.

De forma similar, Feitosa, Grácio e Nascimento (2007) definem o operador de consequência em S como uma função Cn: P(S) → P(S) tal que, para todo X, $Y \subseteq S$, ocorre (1), (2) e (3):

$$X \subseteq Cn(X) \qquad (1)$$

$$X \subseteq Y \Rightarrow Cn(X) \subseteq Cn(Y) \qquad (2)$$

$$Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X) \qquad (3).$$

O item (1) diz que toda sentença que pertence a certo conjunto X é considerada como consequência desse conjunto. Já o item (2) diz que se um conjunto X está contido em um conjunto Y e se uma sentença pertence às consequências do conjunto X, então esta sentença pertence às consequências do conjunto Y. O item (3) diz que se uma sentença pertence ao conjunto das consequencias das consequencias do conjunto X, então esta senteça pertence às consequencias do conjunto X. E dos itens (1) e (3), é possível obter $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$, isto é, o conjunto das consequências das consequências de um conjunto X coincide com o conjunto das consequências de X.

A partir dessa definição do operador de consequência, vários resultados envolvendo o conceito de espaços quase topológicos são obtidos - ver (Feitosa, Grácio, Nascimento, 2007).

As definições de (Feitosa, Grácio, Nascimento, 2007) e de (Velasco, 2004) foram apresentadas concomitantemente devido à relevância das primeiras para este trabalho. Pois usando recursos algébricos, Feitosa, Grácio e Nascimento (2007) interpretaram uma versão simplificada do operador de consequência de Tarski como operador de uma estrutura algébrica. A partir daí, esses autores introduziram uma nova lógica, a Lógica TK, de cunho modal, que caracteriza as noções acima indicadas e que foi apresentada no estilo hilbertiano, com axiomas e regras de dedução.

O objetivo central desse trabalho é apresentar a Lógica TK em sistemas de dedução natural, cáculo de sequentes e tableaux e mostrar a equivalência entre esses novos sistemas e a versão introduzida por Feitosa, Grácio e Nascimento (2007). Mostrar essa equivalência significa mostrar que todas as deduções obtidas na Lógica TK também podem ser obtidas através de cada novo sistema apresentado neste trabalho e vice-versa.

2. O Cálculo Proposicional Clássico num sistema hilbertiano

O *método axiomático* surgiu na Grécia antiga e podemos dizer que um grande colaborador foi Euclides de Alexandria [330-275 a.C.], que sistematizou a geometria em sua obra 'Elementos', formada por 13 livros. A partir de axiomas e postulados Euclides demonstrou 465 proposições. Durante séculos, a geometria de Euclides foi considerada como manifestação máxima do saber rigoroso e organizado. Atualmente, sabemos que Euclides fazia uso, em suas deduções, de conceitos não explicados anteriormente e de definições que apenas dão uma idéia intuitiva do que se queria definir, tal como o de uma linha ser um comprimento sem largura.

Apenas no final do Século XIX, o método axiomático adquiriu um aspecto formal cabalmente rigoroso devido a trabalhos como o do matemático alemão David Hilbert. Hilbert axiomatizou a geometria euclidiana.

A versão hilbertiana para o CPC utilizada aqui é baseada em (Schwichtenberg, Troelstra, 2000) com algumas pequenas adaptações.

Definição 2.1: Faremos uso de uma *linguagem* ℓ, determinada por um *alfabeto* (conjunto de símbolos), um *conjunto de fórmulas*, *axiomas* (que são fórmulas da lógica às quais se atribui um *status* especial de "verdades básicas") e pela *regra de dedução Modus Ponens* (que nos permitirá inferir novas fórmulas a partir de outras fórmulas):

- *Alfabeto*: os símbolos de ℓ são os seguintes: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\perp$,), (, p_1, p_2, p_3, ...

Observações: (i) consideramos $\perp$ (falso) uma constante lógica e introduziremos o conectivo $\neg$ (negação) por definição

$$\neg A =_{df} A \rightarrow \perp.$$

(ii) o símbolo $\leftrightarrow$ (se, e somente se) também é definido

$$A\leftrightarrow B =_{df} (A\rightarrow B) \wedge (B\rightarrow A).$$

Naturalmente, $=_{df}$ significa que o termo da esquerda é definido pelo termo da direita.

- *Conjunto de fórmulas*:
  a) as variáveis proposicionais são fórmulas atômicas;
  b) $\perp$ é uma fórmula atômica;
  c) se A e B são fórmulas, então $A\vee B$, $A\wedge B$, $A \rightarrow B$ e $\neg A$ são fórmulas;
  d) todas as fórmulas são dadas pelos itens (a), (b) e (c).

- *Axiomas*:

  (Ax_1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

  (Ax_2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

  (Ax_3) $A \rightarrow A\vee B$

  (Ax_4) $B \rightarrow A\vee B$

  (Ax_5) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A\vee B \rightarrow C))$

  (Ax_6) $A\wedge B \rightarrow A$

  (Ax_7) $A\wedge B \rightarrow B$

  (Ax_8) $A \rightarrow (B \rightarrow (A\wedge B))$

  (Ax_9) $\perp \rightarrow A$

  (Ax_{10}) $A\vee(A \rightarrow \perp)$.

Observação: o que chamamos de axiomas são na realidade esquemas de axiomas, isto é, A, B e C são fórmulas quaisquer e, portanto, existem infinitas instâncias destes axiomas.

- *Regra de dedução* - *Modus Ponens* (MP):

  $A, A \to B \vdash B$.

Definição 2.2: Uma *demonstração* é uma sequência de fórmulas $A_1,..., A_n$, tal que, toda fórmula na sequência é uma instância de um axioma ou é obtida de dois membros anteriores da sequência através da regra *Modus Ponens*.

Definição 2.3: Um *teorema* A é uma fórmula, tal que existe uma demonstração $A_1,..., A_n$, em que o último termo da sequência é A (ou seja, $A_n = A$).

Representamos que A é um teorema por $\vdash A$.

Os axiomas também são teoremas cujas demonstrações são sequências com apenas uma fórmula.

Definição 2.4: Uma *dedução* a partir de um conjunto Δ de fórmulas é uma sequência $A_1, ..., A_n$, $1 \leq i \leq n$, em que vale alguma das condições seguintes:

a) A_i é um axioma;

b) $A_i \in \Delta$;

c) A_i é obtida, por meio da regra *Modus Ponens*, de dois membros anteriores.

O último membro da sequência, A_n, é uma consequência de Δ, e denotamos isto por $\Delta \vdash A_n$.

Temos a seguir o enunciado do Teorema da Dedução. Não o provaremos, mas sua prova pode ser encontrada em (Feitosa, Paulovich, 2005).

Teorema 2.5: (Teorema da Dedução, T.D.) Seja $\Delta \cup \{A, B\}$ um conjunto de fórmulas de ℓ. Se $\Delta \cup \{A\} \vdash B$, então $\Delta \vdash A \to B$.

Como árvores irão desempenhar um papel importante ao longo deste trabalho, vamos começar apresentando a sua definição.

Definição 2.6: Um árvore é uma estrutura $\langle S, L, R\rangle$, tal que:

- S representa um conjunto de elementos $\{A_1, A_2, A_3,..., A_n\}$ chamados *pontos*.
- L é uma função que associa a cada ponto A, um inteiro positivo L(A) chamado *nível* de A.
- R é uma relação definida em S, na qual A é chamado *antecessor* de B e B é chamado *sucessor* de A. Essa relação deve obedecer as seguintes condições:
  - i. Há um único ponto A_1 de nível 1, chamado *origem* da árvore.
  - ii. Todos os pontos de S, menos a origem (a origem não têm antecessor), tem um único antecessor.
  - iii. Para quaisquer pontos A e B, se B é um sucessor imediato de A, então L(B) = L(A) + 1.

3. O Cálculo Proposicional Clássico dado em um sistema de dedução natural

Segundo Hilbert, os sistemas de axiomatização não espelham a forma como as pessoas, em geral, procedem em suas deduções. Então, em 1935, Gerhard Gentzen, na tentativa de criar um sistema que fosse o mais próximo do procedimento humano usual e instigado por questões sobre a Fundamentação da Matemática, mais especificamente, sobre a consistência da Aritmética, desenvolveu o sistema de prova denominado *dedução natural*. Porém, devido à presença de uma regra no sistema de dedução natural, chamada regra do corte, Gentzen não conseguiu demonstrar a consistência da aritmética apresentada neste sistema.

O procedimento de dedução num sistema de dedução natural consiste em aplicar um conjunto de regras de inferências a um conjunto de premissas, gerando alguns resultados. Se ainda não é o resultado desejado, então aplicam-se novamente regras até que o resultado desejado apareça.

As regras do sistema são de dois tipos: de *introdução* e de *eliminação*, ou seja, o sistema possui regras para introduzir conectivos e regras para eliminá-los.

As regras do sistema de dedução natural são regras postuladas, ou seja, são regras aceitas sem demonstração. Entretanto, a escolha destas regras não é aleatória, elas devem preservar a principal característica de uma dedução lógica: se as premissas de uma dedução são verdadeiras, então a conclusão tem que ser verdadeira.

O método de dedução natural apresentado aqui será determinado sobre a linguagem ou alfabeto proposicional $\ell = \{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee, (\ ,\ )\ , p_1, p_2, p_3, ...\}$do Cálculo Proposicional Clássico e é composto das seguintes regras:

	Regras de introdução (I)	**Regras de eliminação (E)**
Conjunção **($\wedge$)**	$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline A \wedge B \end{array}$	$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline A \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline B \end{array}$
Disjunção **($\vee$)**	$\begin{array}{c} A \\ \hline A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \\ \hline A \vee B \end{array}$	$\begin{array}{c} A \vee B \\ \hline C \end{array}$ se $A \vdash C$ ou $B \vdash C$
Condicional **($\rightarrow$)**	$\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \\ \hline A \rightarrow B \end{array}$	$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$
Bicondicional **($\leftrightarrow$)**	$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \\ \hline A \leftrightarrow B \end{array}$	$\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \hline A \rightarrow B \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \hline B \rightarrow A \end{array}$
Negação **($\neg$)**	$\begin{array}{c} A \\ \hline \neg\neg A \end{array}$	$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ \hline A \end{array}$

Cada regra receberá um nome. A regra de introdução da conjunção será representada por (I$\wedge$) e a de eliminação por (E$\wedge$), ou seja, se a regra for de introdução o seu nome terá a letra I e o símbolo do operador que ela introduz e se a regra for de eliminação o seu nome será composto pela letra E seguida do operador que ela elimina.

Definição 3.1: Sejam Γ um conjunto qualquer de fórmulas e A uma fórmula. Uma dedução através do método de dedução natural de A a partir de Γ é uma sequência finita $C_1, ..., C_n$ de fórmulas, tal que $C_n = A$ e todo C_i, $1 \leq i \leq n$, é uma fórmula, de modo que $C_i \in \Gamma$ ou C_i foi obtida de fórmulas anteriores da sequência, por meio da aplicação de alguma das regras de inferência apresentadas acima.

Definição 3.2: Sejam Γ um conjunto qualquer de fórmulas e A uma fórmula. Dizemos que Γ deriva A por dedução natural, se existe uma dedução de A a partir de Γ através do método de dedução natural. Denotamos tal fato por $\Gamma \vdash A$.

4. O Cálculo Proposicional Clássico num cálculo de sequentes

Para solucionar o problema que ocorreu com a dedução natural, em 1935, Gentzen criou o sistema de *cálculo de sequentes,* o qual possibilitou a demonstração do Teorema da Eliminação do Corte (ou *Hauptsatz*). Este teorema garante que toda prova pode ser transformada em uma prova normal, ou seja, uma dedução sem a presença da regra do corte. Assim, Gentzen pôde provar a consistência da aritmética. Apenas em 1965, Prawitz conseguiu demonstrar a consistência da aritmética usando um sistema de dedução natural.

O sistema que será utilizado é uma adaptação do sistema encontrado em (Schwichtenberg, Troelstra, 2000). Usamos também algumas definições dadas por Gentzen (1969).

Nossa linguagem fará uso de um alfabeto, um conjunto de fórmulas, axiomas e regras. O alfabeto e o conjunto de fórmulas serão os mesmos dados no método axiomático, porém acrescentaremos o símbolo $\Rightarrow$ no alfabeto.

Definição 4.1: *Multiconjuntos finitos* são conjuntos finitos com possível repetição de elementos.

Em conjuntos {A, A, A, B} e {A, B} são conjuntos iguais, mas, quando trabalhamos com multiconjuntos, temos que $\{A, A, A, B\} \neq \{A, B\}$.

Definição 4.2: *Sequentes* são expressões da forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$, em que Γ e Δ são multiconjuntos finitos. Chamamos Γ de antecedente e Δ de consequente do sequente.

Observação: No sistema hilbertiano, entendemos o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, com $\Gamma = \{A_1, A_2,..., A_n\}$, $\Delta = \{B_1, B_2,\dots, B_m\}$ e C uma fórmula qualquer, da seguinte maneira:

a) Se Γ e Δ não são vazios, então: $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \vdash (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m)$.

b) Se Γ é vazio e Δ não é, então: $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m$.

c) Se Δ é vazio e Γ não é, então: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash C \wedge \neg C$.

d) Se Γ e Δ são vazios, então: $C \wedge \neg C$.

Definição 4.3: Considerando A e B fórmulas arbitrárias e Γ e Δ multiconjuntos finitos, os seguintes axiomas e regras regem este sistema:

Axiomas:

(Ax) $A \Rightarrow A$

(L$\bot$) $\bot \Rightarrow$.

Regras estruturais:

-atenuação:

(LW) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (RW) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$

-contração:

(LC) $\dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (RC) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$

Regras operacionais:

(L$\wedge$) $\dfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (R$\wedge$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A; \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$

(L$\vee$) $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta; B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (R$\vee$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$

(L$\rightarrow$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A; B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (R$\rightarrow$) $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$.

Definição 4.4: Chamamos de *sequentes superiores* e *inferiores* aos sequentes que estão, respectivamente, acima ou abaixo das linhas em que aparecem as regras consideradas.

Definição 4.5: Uma *prova* é construída a partir de axiomas por meio de regras de inferência e tem a forma de uma árvore (invertida) Π, tal que:

a) Os pontos mais altos de Π são axiomas;

b) Cada ponto μ de Π, exceto o último, é o sequente superior de uma aplicação de uma regra de inferência cujo sequente inferior também ocorre em Π, imediatamente abaixo de μ.

Definição 4.6: Uma fórmula A é um *teorema* do cálculo de sequentes se o sequente $\Rightarrow$ A pode ser provado.

5. O Cálculo Proposicional Clássico em um sistema de tableaux

O *método dos tableaux* analítico é um método de prova baseado em refutação que permite verificar se uma determinada fórmula é ou não um teorema de uma teoria.

Alguns textos remetem a origem do método dos tableaux à Gentzen, pois muitos trabalhos que levaram ao desenvolvimento dos sistemas de tableaux foram de algum modo, inspirados pelos trabalhos de Gentzen em relação aos *sistemas de provas*.

Segundo o Handbook of Tableaux Methods (1999) Beth e Hintikka, também contribuíram com o desenvolvimento dos tableaux. O primeiro artigo de Hintikka apareceu em 1955, no mesmo ano em que apareceu o artigo de Beth, entretanto as apresentações dos sistemas de tableaux de Beth e de Hintikka não possuíam uma notação simplificada. Isso só foi possível graças aos trabalhos de Zbigniew Lis e de Raymond Smullyan. Lis publicou suas idéias em 1960, mas devido ao grande abismo fixado entre o ocidente e o oriente da Europa, elas permaneceram por muito tempo desconhecidas e o trabalho e Lis só voltou a receber atenção nos últimos anos.

Smullyan aprimorou diversos conceitos e idéias relacionadas aos tableaux, culminando, em 1968, com a publicação de seu livro *First-Order Logic* e foi com esse completo trabalho de Smullyan que o método dos tableaux se tornou bastante conhecido.

Uma apresentação formal desse método de refutação com base em (Smullyan, 1994) é feita através das definições abaixo:

Definição 5.1: Uma *árvore ordenada* é uma árvore não ordenada acrescida de uma função θ que atribui a cada ponto de junção z uma seqüência $\theta(z)$ que não contém repetições, e cujo conjunto de termos consiste em todos os sucessores de z.

Definição 5.2: Uma árvore diádica é uma árvore ordenada em que cada ponto junção tem no máximo dois sucessores.

Definição 5.3: Um ponto é chamado de *ponto final* quando não possui pontos sucessores. Se ele tem exatamente um sucessor é chamado de *ponto simples* e se ele possui mais que um sucessor é chamado de *ponto de junção*.

Definição 5.4: Um ramo é qualquer sequência finita ou infinita de pontos, começando pela origem, de maneira que cada termo da sequência, exceto (se houver) o último, é antecessor do próximo.

Definição 5.5: Quando um ramo tem um número finito de pontos, o último ponto dessa sequência é o *ponto final do ramo* (da árvore) e esse ramo é *finito*. Quando um ramo tem um número infinito de pontos é um *ramo infinito*.

Definição 5.6: Os elementos básicos do sistema de tableaux T são:

I) Um alfabeto (Alf_T) formado por um conjunto enumerável de símbolos proposicionais $p_1, p_2, ..., p_n$, símbolos de pontuação "(" e ")", um conjunto de operadores lógicos $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg\}$;

II) Um conjunto de fórmulas (For_T), tal que, suas fórmulas são obtidas recursivamente por:

i) Todo símbolo proposicional é uma fórmula, dita *fórmula atômica*;

ii) Se A é uma fórmula, então $\neg A$ é uma fórmula;

iii) Se A e B são fórmulas, então $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ também são fórmulas;

iv) O conjunto de todas as fórmulas é gerado apenas pelos itens acima.

III) Conjunto de regras de dedução.

Definição 5.7: A noção de subfórmula imediata é dada pelas condições abaixo:

I) Variáveis proposicionais não têm subfórmulas imediatas.

II) $\neg A$ tem apenas A como subfórmula imediata.

III) As fórmulas $A \vee B$, $A \wedge B$ e $A \rightarrow B$ têm apenas A e B como subfórmulas imediatas.

Definição 5.8: A noção de subfórmula é implicitamente definida pelas regras:

I) Se A é uma subfórmula imediata de B ou se A coincide com B, então A é uma subfórmula de B.

II) Se A é uma subfórmula de B e B é subfórmula de C, então A é uma subfórmula de C.

Definição 5.9: As regras de expansão do tableau são as seguintes:

I) *Regras do tipo conjuntivo:* são regras que adicionam novas fórmulas ao final do ramo. As fórmulas desse tipo são representadas pela letra α e quando ocorrer no ramo alguma fórmula do tipo α, será acrescentado no mesmo ramo as fórmulas α_1 e α_2.

Nome da regra	α	α_1	α_2
$R\neg\vee$	$\neg(A\vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$R\neg\rightarrow$	$\neg(A\rightarrow B)$	A	$\neg B$
$R\wedge$	$A\wedge B$	A	B

II) *Regras do tipo disjuntivo:* são regras que bifurcam um ramo em dois. As fórmulas desse tipo são representadas pela letra β e quando ocorrer no ramo alguma fórmula do tipo β, serão acrescentadas as fórmulas β_1 e β_2, uma do lado da outra, no final do ramo e cada uma será a origem de um novo ramo.

Nome da regra	β	β_1	β_2
$R\vee$	$A\vee B$	A	B
$R\rightarrow$	$A\rightarrow B$	$\neg A$	B
$R\neg\wedge$	$\neg(A\wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$

III) *Regra especial:* A regra da Dupla Negação (DN) será considerada uma regra de tipo especial. Ela adiciona uma nova fórmula ao final do ramo. As fórmulas desse tipo são representadas pela letra γ e quando ocorrer no ramo alguma fórmula do tipo γ, será acrescentado no mesmo ramo a fórmulas γ_1.

Nome da Regra	γ	γ_1
R$\neg$	$\neg\neg A$	A

Definição 5.10: Um *tableau analítico* T para uma fórmula $\neg A$ é uma árvore ordenada diádica Ω, cujos pontos são fórmulas, e que é construída como se segue. Inicia-se colocando $\neg A$ na origem. Supõe-se que Ω já é um tableau construído para $\neg A$ e B é um ponto final. Então se pode estender Ω através de uma das seguintes operações:
i) Se alguma fórmula do tipo α ocorre no ramo (em que B está), então se pode adicionar ou α_1 ou α_2 como único sucessor de B;
ii) Se alguma fórmula do tipo β ocorre no ramo (em que B está), então se pode simultaneamente adicionar β_1 como sucessor da esquerda de B e β_2 como sucessor da direita de B;
iii) Se alguma fórmula do tipo γ ocorre no ramo (em que B está), então se pode adicionar ou γ_1 como único sucessor de B.

Definição 5.11: Um ramo de tableau é *fechado* quando existem neste ramo pontos que correspondam às fórmulas A e $\neg$ A.

Definição 5.12: Um tableau para uma determinada fórmula A é *fechado* quando todos os seus ramos são fechados.

Definição 5.13: Dizemos que Γ deriva A por tableau, se existe um tableau fechado para o conjunto $\{\Gamma, \neg A\}$. Denotamos tal fato por $\Gamma \Vdash A$.

6. A Lógica TK na versão hilbertiana

Existem muitas outras lógicas além da lógica clássica. Podemos classificar as lógicas em: lógicas ampliadas, que estendem a lógica clássica e lógicas alternativas, que se propõem a substituir a lógica clássica.

A lógica introduzida por Feitosa, Grácio e Nascimento (2007), chamada Lógica TK, é um exemplo de lógica ampliada, pois estende a lógica clássica ao enriquecer sua linguagem com um novo operador de caráter modal, motivado pelo operador de consequência de Tarski.

Como a Lógica TK é uma extensão do CPC, então todos os resultados que valem para o CPC, em particular o que já foi visto, são válidos na Lógica TK. Porém, teremos alguns resultados a mais, dados pelo novo operador lógico.

Definição 6.1: A *Lógica proposicional TK*, de linguagem $L_H(\neg, \vee, \rightarrow, \blacklozenge, p_1, p_2, p_3, \ldots)$, é definida por meio dos seguintes axiomas e regras:

Axiomas:

Axiomas do Cálculo Proposicional Clássico

Ax_{TK1} $A \rightarrow \blacklozenge A$

Ax_{TK2} $\blacklozenge \blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge A$.

Regras de Dedução:

MP: $A, A \rightarrow B \vdash B$

R♦: $A \rightarrow B \vdash \blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge B$.

Observação: Quando trabalhamos com o operador de consequência, o Teorema da Dedução não se aplica.

Proposição 6.2: $\blacklozenge(A \wedge B) \rightarrow \blacklozenge A$.

Demonstração:

1. $(A \wedge B) \rightarrow A$	Tautologia
2. $\blacklozenge(A \wedge B) \rightarrow \blacklozenge A$	R♦ em 1. ■

Proposição 6.3: $\blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge(A \vee B)$.

Demonstração:

1. $A \rightarrow (A \vee B)$	Tautologia
2. $\blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge(A \vee B)$	R♦ em 1. ■

Proposição 6.4: A fórmula $(A \rightarrow B) \rightarrow (\blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge B)$ não é válida. Podemos encontrar este resultado em Feitosa, Grácio e Nascimento (2007).

Proposição 6.5: A $\vdash$ ♦A.

Demonstração:

1. A	Premissa
2. A $\rightarrow$ ♦A	Ax_{TK1}
3. ♦A	MP em 1 e 2. ■

7. A Lógica TK em um sistema de dedução natural

Definição 7.1: A *Lógica proposicional TK* em um sistema de dedução natural de linguagem $L_{DN}(\neg,\vee, \wedge, \rightarrow, ♦, p_1, p_2, p_3,...)$, é obtida através do acréscimo de novas regras as regras do sistema de dedução natural para o CPC. Essas novas regras, específicas para o operador ♦, são:

R♦: $\dfrac{A}{♦A}$

R♦♦: $\dfrac{♦♦A}{♦A}$

R♦→: $\dfrac{\vdash A\rightarrow B}{\vdash ♦A\rightarrow ♦B}$

R♦¬: $\dfrac{♦\neg\neg A}{♦A}$

Definição 7.2: As definições de demonstração e dedução (derivabilidade) são as mesmas apresentadas no cálculo proposicional clássico.

Agora será estabelecida a equivalência entre a Lógica TK na versão axiomática introduzido por Feitosa, Grácio e Nascimento (2007) e a lógica TK em dedução natural apresentada neste trabalho.

A equivalência entre um sistema de dedução natural e um sistema hilbertiano já foi feita em Gentzen (1969) para a lógica proposicional clássica. Assim, neste trabalho a demonstração desta equivalência será estendida apenas para os casos que envolvem o operador "♦".

Teorema 7.3: Todas as regras da Lógica TK em dedução natural podem ser deduzidas através do sistema da Lógica TK na versão axiomática.

R♦: A ⊢ ♦A

1. A	Premissa
2. A →♦A	Ax_{tk1}
3. ♦A	MP em 1 e 2

R♦♦: ♦♦A ⊢ ♦A

1. ♦♦A	Premissa
2. ♦♦A →♦A	Ax_{tk2}
3. ♦A	MP em 1 e 2

R♦→: A → B ⊢ ♦A → ♦B

1. A→B	Premissa
2. ♦A→♦B	R♦ em 1

R♦¬: ♦¬¬A ⊢ ♦A

1. ♦¬¬A	Premissa
2. ¬¬A → A	tautologia
3. ♦¬¬A → ♦A	R♦ em 2
4. ♦A	MP em 1 e 3. ■

Teorema 7.4: Todos os axiomas e regras da Lógica TK na versão axiomática podem ser deduzidos através do sistema da Lógica TK em dedução natural.

Ax_{TK1}: ⊢ A → ♦A

1. A	H
2. ♦A	(R♦) em 1
3. A → ♦A	(I→) de 1 a 2

Ax_{TK2}: $\vdash \blacklozenge\blacklozenge A \to \blacklozenge A$

1. $\blacklozenge\blacklozenge A$	H
2. $\blacklozenge A$	($R\blacklozenge\blacklozenge$) em 1
3. $\blacklozenge\blacklozenge A \to \blacklozenge A$	($I\to$) de 1 a 2

$R\blacklozenge$: $A \to B \vdash \blacklozenge A \to \blacklozenge B$.

1. $A \to B$	H
2. $\blacklozenge A \to \blacklozenge B$	($R\blacklozenge\to$) em 1. ■

Portanto, pelos Teoremas 7.3 e 7.4, está estabelecida a equivalência entre os sistemas da Lógica TK nas versões axiomática e dedução natural.

8. A Lógica TK em cálculo de sequentes

Estenderemos o sistema de cálculo de sequentes visto neste trabalho através da introdução do operador ♦ na linguagem e das seguintes regras para este operador:

(TK_1) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \blacklozenge A}$

(TK_2) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \blacklozenge\blacklozenge A}{\Gamma \Rightarrow \blacklozenge A}$

(TK_3) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \to B}{\Gamma \Rightarrow \blacklozenge A \to \blacklozenge B}$.

Observação: A regra ($R\to$) não pode ser aplicada após a regra (TK_3), caso isso ocorra, provaríamos o Teorema da Dedução. Dessa forma, esta lógica teria mais teoremas do que a Lógica TK introduzida em (Feitosa, Grácio, Nascimento, 2007).

Provaremos um resultado válido na Lógica TK através do cálculo de sequentes:

$A \Rightarrow \blacklozenge A$

$$\frac{A \Rightarrow A \quad (Ax)}{A \Rightarrow \blacklozenge A \quad (TK_1).}$$

Agora mostraremos a equivalência entre o sistema hilbertiano da Lógica TK introduzida em (Feitosa, Grácio, Nascimento, 2007) e o sistema em cálculo de sequentes introduzido neste trabalho. Para mostrarmos a equivalência entre estes dois sistemas estenderemos a equivalência entre os sistemas hilbertiano e de cálculo de sequentes para o Cálculo Proposicional Clássico encontrada na literatura para as regras do operador de consequência.

($\Rightarrow$) Provaremos que as regras (TK_1), (TK_2) e (TK_3) podem ser deduzidas dentro da Lógica TK na versão hilbertiana.

(TK_1) $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \blacklozenge A}$$

1. $\Gamma \vdash A$	Premissa
2. $\Gamma \vdash A \rightarrow \blacklozenge A$	Ax_{TK1}
3. $\Gamma \vdash A$	MP em 1 e 2.

(TK_2) $$\frac{\Gamma \vdash \blacklozenge\blacklozenge A}{\Gamma \vdash \blacklozenge A}$$

1. $\Gamma \vdash \blacklozenge\blacklozenge A$	Premissa
2. $\Gamma \vdash \blacklozenge\blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge A$	Ax_{TK2}
3. $\Gamma \vdash \blacklozenge A$	MP em 1 e 2.

(TK_3) $$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge B}$$

1. $\Gamma \vdash A \rightarrow B$	Premissa

2. $\Gamma \vdash \blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge B$ R♦.

($\Leftarrow$) Provaremos, agora, que os axiomas Ax_{TK1} e Ax_{TK2} e a regra R♦ correspondem a algum sequente válido.

$\Rightarrow \mathbf{A \rightarrow \blacklozenge A}$

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow \blacklozenge A}\ (Ax)}{\Rightarrow A \rightarrow \blacklozenge A}\ (TK_1)$$

(R→)

$\Rightarrow \mathbf{\blacklozenge\blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge A}$

$$\dfrac{\dfrac{\blacklozenge\blacklozenge A \Rightarrow \blacklozenge\blacklozenge A}{\blacklozenge\blacklozenge A \Rightarrow \blacklozenge A}\ (Ax)}{\Rightarrow \blacklozenge\blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge A}\ (TK_2)$$

(R→)

$\mathbf{A \rightarrow B \Rightarrow \blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge B}$

$$\dfrac{A \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow B}{A \rightarrow B \Rightarrow \blacklozenge A \rightarrow \blacklozenge B}\ (Ax)$$

(TK_3). ■

9. Um sistema de tableaux para a Lógica TK

Definição 9.1: A Lógica proposicional TK em um sistema tableaux de linguagem $L_T(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \blacklozenge, p_1, p_2, p_3, ...)$, é composta de regras do sistema de tableaux para o CPC e de regras, específicas para o operador ♦, que são:

$$R\neg\blacklozenge: \quad \dfrac{\neg\blacklozenge A}{\neg A}$$

$$R\blacklozenge\blacklozenge: \quad \dfrac{\blacklozenge\blacklozenge A}{\blacklozenge A}$$

$$\text{R}\blacklozenge: \quad \frac{\begin{array}{c}\blacklozenge \text{A} \\ \neg\blacklozenge \text{B}\end{array}}{\neg(\text{A} \rightarrow \text{B})}\text{, quando } \Vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$

Observações: A regra "R♦" só deve ser aplicada no caso da fórmula '**A** → **B**' ser hipótese do argumento ou um teorema da Lógica TK em tableaux.

Os resultados válidos para o CPC em um sistema de tableaux ainda são válidas aqui.

Abaixo será estabelecida a equivalência entre a Lógica TK na versão hilbertiana introduzida por Feitosa, Grácio e Nascimento (2007) e a lógica TK no sistema de tableaux apresentada neste trabalho.

Teorema 9.2: Os conjuntos (Γ, A) e (Γ, ¬A) são T-inconsistentes ⇔ o conjunto Γ é T-inconsistente.

Demonstração: A demonstração desse teorema já foi feita em (Carnielli; Coniglio; Bianconi, 2006, p. 88) para a parte clássica de TKtab. Portanto, será apenas estendida para o operador ♦.

(⇒) Se os conjuntos (Γ, A) e (Γ, ¬A) são T-inconsistentes, então o conjunto Γ é T-inconsistente.

Demonstração por indução sobre a complexidade de A:

I. Já foi analisado para o caso de A ser uma fórmula atômica.

II. Se a fórmula A é do tipo ♦B:

(i) Por hipótese, o conjunto (Γ, ♦B) é T-inconsistente e, pela definição 5.12, existe um tableau fechado para (Γ, ♦B):

$$\begin{array}{ll} 1. & \Gamma \\ 2. & \blacklozenge \text{B} \\ 3. & \times \end{array}$$

Como existe um tableau fechado para (Γ, ♦B), então ou existe um tableau fechado para Γ ou o tableau fecha com o acréscimo da fórmula ♦B. No segundo caso, conclui-se que ¬♦B ocorre no tableau.

(ii) Por hipótese, o conjunto (Γ, ¬♦B) também é T-inconsistente. Assim, pela definição 5.12, existe um tableau fechado para (Γ, ¬♦B):

1.	Γ
2.	$\neg\blacklozenge B$
3.	$\times$

Como também existe um tableau fechado para $(\Gamma, \neg\blacklozenge B)$, então ou existe um tableau fechado para Γ ou o tableau fecha com o acréscimo da fórmula $\neg\blacklozenge B$. Logo, $\neg\neg\blacklozenge B$ ocorre no tableau, isto é, $\blacklozenge B$ ocorre no tableau.

De (i) e (ii) segue que Γ é fechado, pois $\neg\blacklozenge B \wedge \blacklozenge B$ ocorre no tableau de Γ ou há um tableau fechado para Γ independente destas fórmulas.

Portanto, Γ é T-inconsistente.

O teorema seguinte mostra que todos os teoremas que podem ser obtidos no sistema hilbertiano de TK também podem ser obtidos no sistema de tableaux de TK.

Teorema 9.3: Se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma \Vdash A$.

Demonstração: A demonstração desse teorema, já foi feita em Silvestrini (2005) para a parte clássica da Lógica TK em tableaux. Assim, a demonstração por indução sobre o comprimento da dedução de A, a partir de Γ será estendida para o operador $\blacklozenge$.

Seja A um esquema de axioma da Lógica TK. Devemos verificar que existe um tableau fechado para $\Gamma \cup \{\neg A\}$.

Para o esquema de axioma Ax_{tk1}, tem-se, $A_1 \equiv B \to \blacklozenge B$.

1.	Γ	
2.	$\neg(B \to \blacklozenge B)$	
3.	B	$2, R\neg\to$
4.	$\neg(\blacklozenge B)$	$2, R\neg\to$
5.	$\neg B$	$4, R\neg\blacklozenge$
6.	$\times$	$3,5,\times$

Para o esquema Ax_{tk2}, tem-se, $A_2 \equiv \blacklozenge\blacklozenge B \to \blacklozenge B$.

1.	Γ	
2.	$\neg(\blacklozenge\blacklozenge B \to \blacklozenge B)$	
3.	$\blacklozenge\blacklozenge B$	$2, R\neg\to$
4.	$\neg(\blacklozenge B)$	$2, R\neg\to$
5.	$\blacklozenge B$	$3, R\blacklozenge\blacklozenge$
6.	$\times$	$4,5,\times$

Hipótese de Indução: $\Gamma \vdash A_i \Rightarrow \Gamma \Vdash A_i$, para todo $i \leq n$.

Como já foi visto no caso clássico, as três possibilidades para A_{n+1} em um passo n+1 da dedução de A, a partir de Γ são:

i. A_{n+1} é uma premissa ou

ii. A_{n+1} é um esquema de axioma da Lógica TK ou

iii. A_{n+1} é deduzida a partir de alguma regra da Lógica TK.

Para (i) e (ii), a demonstração é a mesma feita anteriormente para verificar a base da indução. Para o caso (iii), é preciso analisar a única regra ainda não avaliada que é exclusiva da Lógica TK, a R♦.

Há uma dedução em que $A_n \equiv B \rightarrow C$ e $A_{n+1} \equiv \blacklozenge B \rightarrow \blacklozenge C$. Assim $\Gamma \vdash B \rightarrow C$. Pela hipótese de indução, há um tableau fechado para $\Gamma \Vdash B \rightarrow C$.

Logo, é preciso mostrar que o tableau $\Gamma \Vdash \blacklozenge B \rightarrow \blacklozenge C$ também fecha. Para isso será construído o tableau de $\Gamma \cup \{ \neg(\blacklozenge B \rightarrow \blacklozenge C)\}$:

1.	Γ	
2.	$\neg(\blacklozenge B \rightarrow \blacklozenge C)$	
3.	$\blacklozenge B$	$2, R\neg\rightarrow$
4.	$\neg\blacklozenge C$	$2, R\neg\rightarrow$
5.	$\neg(B \rightarrow C)$	$4, R\blacklozenge$

Como $\Gamma \Vdash B \rightarrow C$, então é possível aplicar a regra R♦ na linha 5 do tableau acima, entretanto, por hipótese de indução $B \rightarrow C \in \Gamma$ e, portanto, o tableau fecha.

Com esses resultados concluímos que se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma \Vdash A$. ■

Teorema 9.4: Se $\Gamma \Vdash A$, então $\Gamma \vdash A$.

Demonstração: A demonstração desse teorema será estendida para o operador ♦, pois já foi feita em Silvestrini (2005) para a parte clássica da Lógica TK em tableaux.

Para cada regra da Lógica TK em tableaux será obtida na Lógica TK uma correspondente dedução usando uma redução ao absurdo (RAA), ou seja, uma dedução indireta.

- A regra (R$\neg\blacklozenge$) tem uma dedução válida na Lógica TK: $\neg\blacklozenge A \vdash \neg A$:

1.	$\neg\blacklozenge A$	p.
2.	$\neg\neg A$	p.p.
3.	$\neg\neg A \to A$	tautologia
4.	A	MP em 2 e 3
5.	$A \to \blacklozenge A$	$Axtk_1$
6.	$\blacklozenge A$	MP em 4 e 5
7.	$\neg\blacklozenge A \to (\blacklozenge A \to (\neg\blacklozenge A \wedge \blacklozenge A))$	tautologia
8.	$\blacklozenge A \to (\neg\blacklozenge A \wedge \blacklozenge A)$	MP em 1 e 7
9.	$\neg\blacklozenge A \wedge \blacklozenge A$	MP em 6 e 8
10.	$\neg A$	RAA de 2 a 9

- A regra (R$\blacklozenge\blacklozenge$) tem uma dedução válida na Lógica TK: $\blacklozenge\blacklozenge A \vdash \blacklozenge A$:

1.	$\blacklozenge\blacklozenge A$	p.
2.	$\neg\blacklozenge A$	p.p.
3.	$\blacklozenge\blacklozenge A \to \blacklozenge A$	$Axtk_2$
4.	$\blacklozenge A$	MP em 1 e 3
5.	$\neg\blacklozenge A \to (\blacklozenge A \to (\neg\blacklozenge A \wedge \blacklozenge A))$	tautologia
6.	$\blacklozenge A \to (\neg\blacklozenge A \wedge \blacklozenge A)$	MP em 2 e 5
7.	$\neg\blacklozenge A \wedge \blacklozenge A$	MP em 4 e 6
8.	$\blacklozenge A$	RAA de 2 a 7

- A regra (R$\blacklozenge$) tem uma dedução válida na Lógica TK: $\blacklozenge A, \neg\blacklozenge B \vdash \neg(A \to B)$:

1.	$\blacklozenge A$	p.
2.	$\neg\blacklozenge B$	p.

3.	$\neg\neg(A \to B)$	p. p.
4.	$\neg\neg(A \to B) \to (A \to B)$	tautologia
5.	$A \to B$	MP em 3 e 4
6.	$\blacklozenge A \to \blacklozenge B$	R$\blacklozenge$ em 5
7.	$\blacklozenge B$	MP em 1 e 6
8.	$\neg\blacklozenge B \to (\blacklozenge B \to (\neg\blacklozenge B \wedge \blacklozenge B))$	tautologia
9.	$\blacklozenge B \to (\neg\blacklozenge B \wedge \blacklozenge B)$	MP em 2 e 8
10.	$\neg\blacklozenge B \wedge \blacklozenge B$	MP em 7 e 9
11.	$\neg(A \to B)$	RAA de 3 a 10

Com esses resultados, temos que se $\Gamma \Vdash A$, então $\Gamma \vdash A$. ■

Portanto, pelos Teoremas 9.3 e 9.4, este trabalho apresenta a equivalência entre a Lógica TK na versão axiomática e a Lógica TK em um sistema de tableaux.

10. Considerações Finais

A Lógica TK foi inicialmente apresentada por Feitosa, Grácio e Nascimento (2007) em um sistema hilbertiano, na qual, para verificar se uma fórmula é ou não um teorema da Lógica TK, as deduções são feitas a partir de axiomas e regras de inferências.

O presente trabalho apresenta a equivalência entre a Lógica TK na versão axiomática e a Lógica TK em sistemas de dedução natural, cálculo de sequente e tableaux, o que torna possível verificar se uma fórmula é um teorema da Lógica TK, também através de um sistema de dedução natural, ou de um sistema de cálculo de sequentes ou ainda de um sistema de tableaux. Assim todas as deduções obtidas na Lógica TK dada no sistema hilbertiano, também podem ser obtidas através da Lógica TK nos demais sistemas e vice-versa.

Essa equivalência também permite concluir que a correção e a completude, propriedades já demonstradas por Feitosa, Grácio e Nascimento (2007) para a Lógica TK na versão hilbertiana, também são válidas para os sistemas de dedução natural, de cálculo de sequentes e de tableaux para a Lógica TK.

Dessa forma, em trabalhos envolvendo a Lógica TK, é possível escolher dentre os sistemas acima o melhor para se obter os resultados pretendidos.

Referências

BETH, E. W. *The foundations of mathematics*. Amsterdam: North Holland.1959.
CARNIELLI, W.A.; CONIGLIO, M.E.; BIANCONI, R. *Lógica e aplicações: Matemática, Ciência da Computação e Filosofia* (Versão Preliminar - Capítulos 1 a 5), 2006. Disponível em: <http://www.cle.unicamp.br>. Acesso em 02 de agosto de 2007.
CARNIELLI, W. A.; EPSTEIN, R. L. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da Matemática*. São Paulo: Editora Unesp, 2006.
CASTRO, M. A. *Hierarquias de sistemas de dedução natural e de sistemas de tableaux analíticos para os sistemas de Cn de Da Costa*. Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004.
EPSTEIN, R. L. *The semantic foundations of logic*: propositional logics. Kluwer Academic Publishers, 1947. V. 1.
FEITOSA, H. A.; GRÁCIO, M. C. C.; NASCIMENTO, M. C. *A logic of the Tarski's consequence operator*. Campinas: Unicamp. Centro de lógica, Epistemologia e História da Ciência – CLE, 2007. Disponível em: <http://www.cle.unicamp.br>. Acesso em: 07 fev. 2008.
FEITOSA, H. A., PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2005.
FINGER, M.; MELO, A. C. V.; SILVA, F. S. C. *Lógica para computação*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.
FITTING, M. C. Introduction. In: D´AGOSTINO, M; GABBAY, D.V.; HAHNLE, R.; POSEGGA, J. (Eds.). *Handbook of Tableaux Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. p. 1- 43.
GENTZEN, G. *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Editor M. E. Szabo. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.
MATULOVIC, M. *A lógica do Muito em um sistema de tablôs*. Dissertação de mestrado (Mestrado em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista. Marília, 2008.
MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. New York: D. Van Nostrand Company, 1964.
MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2001.
MOURA, J. E. A. *Um estudo de* C_ω *em cálculo de sequentes e dedução natural*. Tese (Doutorado em Lógica) – Programa de Pós-Graduação em Lógica e Filosofia da Ciência, UNICAMP, Campinas, 2000.
NASCIMENTO, M. C., FEITOSA, H. A. As álgebras dos operadores de consequência. São Paulo: *Revista de Matemática e Estatística*, 2005. v. 23, n. 1, p. 19-30.
SAUTTER, F. T. Lewis Carrol e a pré´-história das árvores de refutação. In: FEITOSA, H. A.; SAUTTER, F. T. (orgs.). *Coleção CLE*. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, v.39, p. 91-103, 2004.
SCHWICHTENBERG, H.; TROELSTRA, A. S. *Basic proof theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
SILVESTRINI, L. H. C. *Tableaux e indução na lógica do plausível*. Dissertação de mestrado (Mestrado em Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista. Marília, 2005.
SMULLYAN, R. M. *First-order logic*. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.

TARSKI, A. Acerca do conceito de consequência lógica. *Princípios: revista de filosofia*, UFRN, Natal, v. 8, n. 10, p. 220-233, 2001.
______. *Logic, Semantic, Metamathematics*. 2.ed. Indianápolis: Hackett Publishing Co., 1983.
______. Sobre alguns conceitos fundamentais de metamatemática. *Princípios: revista de filosofia*, UFRN, Natal, v. 8, n. 10, p. 187-209, 2001.
VELASCO, P. D. N. Sobre o operador de consequência de Tarski. In: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (Eds.). *Filosofia e história da ciência no Cone Sul: 3º Encontro*. Campinas: AFHIC, 2004.

Artigo recebido em: 16/08/10
Aceito em: 02/12/10