Operadores de conseqüência cumulativos e traduções entre lógicas cumulativas[1]

Mauro César Scheer
maurocs@cle.unicamp.br

Itala Maria Loffredo D'Ottaviano
itala@cle.unicamp.br

Grupo de Lógica Teórica e Aplicada - GLTA
Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência - CLE
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas - IFCH
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, SP, Brasil

Resumo: Neste artigo, os conceitos de lógica cumulativa e tradução entre lógicas cumulativas são introduzidos. Alguns resultados que caracterizam a existência de tradução conservativa entre lógicas cumulativas e que garantem a preservação de algumas propriedades das lógicas também são apresentados.

Palavras-chave: Operadores cumulativos, lógicas cumulativas, traduções entre lógicas cumulativas.

Introdução

Há situações no mundo real em que é inevitável trabalharmos com conhecimento incompleto, por exemplo, situações que envolvam percepção, ambigüidade e senso comum. Nestes casos, quando precisamos tomar certas decisões não podemos esperar que as informações pertinentes à situação em questão sejam totalmente conhecidas. Assim, quando perguntamos: Em qual curso você ingressará na universidade? A escolha do curso é feita por uma série de motivos, mas nem todas as informações sobre o curso escolhido estão disponíveis. Por exemplo, não se sabe como o mercado de trabalho do referido curso estará daqui a cinco ou seis anos. Outra situação que ilustra o modo como lidamos com conhecimento incompleto é o atendimento de emergência realizado por um médico a um paciente. Devemos esperar pelos resultados de todos os exames realizados, quando o paciente necessita imediatamente de atendimento médico? De uma intervenção cirúrgica? Enfim, tomamos decisões na ausência de informações a todo instante.

Um formalismo que tenha caráter de eficiência para lidar com situações como as citadas acima, deve ser capaz de admitir expressões que sejam válidas em geral, e reconhecer e assimilar exceções quando necessário. As lógicas não-monotônicas admitem inferências que são realizadas na ausência de informações completas, sendo que estas inferências podem ser invalidadas por novas informações, ou seja, essas lógicas são adequadas ao tipo de situação a que estamos nos referindo.

Dessa forma, os sistemas de raciocínio não-monotônicos, por sua vez as lógicas não monotônicas, podem ser necessários por qualquer das seguintes razões (Rich, 1988):

- Presença de informação incompleta requer raciocínio por omissão (raciocínio default);
- Um mundo em mudanças requer uma base flexível de dados;
- A construção de uma solução completa para um dado problema poderá exigir suposições temporárias a respeito de soluções parciais.

[1] Este trabalho corresponde à parte dos resultados da Dissertação de Mestrado do primeiro autor, com (Bolsa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq) e sob orientação do segundo autor, apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, em 2002.

Sistemas não-monotônicos normalmente são aplicados no campo da inteligência artificial. Por exemplo, muitas vezes, em determinados sistemas, quando uma afirmação for eliminada da base de dados, necessitamos voltar atrás sobre outras afirmações cujas provas dependem da afirmação eliminada. Assim, devemos eliminar estas afirmações ou encontrar novas provas que sejam válidas em relação à atual base de dados. Portanto, a eliminação de uma única afirmação determina um efeito significativo em toda base de dados. Dessa forma, do ponto de vista computacional, os sistemas não-monotônicos podem exigir mais espaço de armazenamento e mais tempo de processamento, pois, junto a cada teorema, sua prova ou pelo menos uma lista de todas as hipóteses das quais a prova depende deve ser armazenada. Isto não é necessário em sistemas monotônicos pois, uma vez encontrada a prova de um teorema ela não precisará ser reexaminada.

Seguindo a tradição polonesa, neste trabalho uma lógica é um par constituído por um conjunto qualquer L e um operador de conseqüência C_n sobre o conjunto das partes desse conjunto. Geralmente, quando o conjunto considerado é uma linguagem formal, a lógica é chamada de sistema lógico (Wojcicki, 1988). Uma lógica é dita monotônica se o conjunto dos teoremas de uma teoria é sempre um subconjunto dos teoremas de qualquer extensão desta teoria. Formalmente uma lógica é monotônica se, dados quaisquer conjuntos A, B de L, tal que $A \subseteq B$, então $\{H / H \subseteq C_n(A)\} \subseteq \{R / R \subseteq C_n(B)\}$. Para as chamadas lógicas não-monotônicas, como o próprio nome diz, a propriedade monotônica não é satisfeita.

Há diversos tipos de lógicas não-monotônicas, a saber, a lógica default de Reiter, lógicas preferenciais, entre outras. Não estamos interessados, neste trabalho, em lógicas não-monotônicas quaisquer, mas nas chamadas lógicas cumulativas. Em (Krauss *et al.*, 1990), por exemplo, são apresentadas cinco famílias de lógicas cumulativas, juntamente com seus respectivos modelos.

No século XX, por volta de meados da década de oitenta, esforços na direção de estabelecer condições minimais para caracterizar uma autêntica lógica não-monotônica começa a ganhar destaque. Pode-se considerar que Gabbay foi o primeiro a estudar certas relações de inferência e as lógicas não-monotônicas a elas associadas. Gabbay (1985) propõe três condições que considera minimais para caracterizar uma relação de conseqüência não-monotônica: na Seção 1.1 veremos quais são estas condições. Krauss *et al.*, (1990), Kaluzhny e Lehmann (1995) entre outros, apresentam também propriedades interessantes para operadores de conseqüência não-monotônicos, por exemplo, a propriedade dedutiva e propriedade distributiva.

A classe das lógicas cumulativas parece ser "bem comportada" em relação à classe das lógicas, pois simplesmente não abandonamos a condição monotônica, porém em seu lugar fazemos uso de uma espécie de monotonicidade restritiva. Não podemos deixar de dizer com isso que há várias lógicas que não se enquadram nesta nova classe de lógicas, a classe das lógicas cumulativas.

Scheer (2002) apresenta algumas das propriedades dos operadores cumulativos. São também introduzidos resultados que caracterizam a existência de traduções conservativas entre lógicas cumulativas e resultados que nos permitam dizer quais propriedades das respectivas lógicas envolvidas em tais traduções são preservadas.

O objetivo deste artigo consiste na apresentação de resultados gerais referentes à classe dos operadores cumulativos e, motivados por trabalhos de da Silva, D'Ottaviano, Feitosa e Sette, no desenvolvimento de uma teoria geral de traduções para essa classe de lógicas.

O artigo está dividido em duas partes: a primeira parte trata dos operadores de conseqüência cumulativos e a segunda de traduções envolvendo lógicas cumulativas. A partir do conceito de traduções entre lógicas, introduzido por da Silva *et al.*, (1999), e de uma teoria de traduções entre lógicas inicialmente desenvolvida por D'Ottaviano e Feitosa ((Feitosa, 1997), (Feitosa; D'Ottaviano 2001)), pretendemos generalizar alguns dos resultados obtidos por esses autores. Os artigos acima mencionados de Gabbay, Makinson, Freund, Krauss, Lehmann, Magidor e Kaluzhny se referem aos operadores cumulativos e a suas propriedades, porém não tratam de traduções entre lógicas.

Na Seção 1, revemos inicialmente alguns resultados sobre os operadores de conseqüência clássicos, conhecidos como operadores de conseqüência de Tarski, importantes para o desenvolvimento do artigo. Apresentamos a definição de operador de conseqüência cumulativo, algumas de suas propriedades e fazemos comparações entre estas propriedades e as dos operadores de conseqüência tarskianos.

Na Seção 2, estendemos o conceito de lógica introduzido em (da Silva *et al.*, 1999). Procuramos definir, a partir de um conjunto qualquer e uma dada função, o operador cumulativo induzido e o operador cumulativo co-induzido. Conceber estes operadores parece ser fundamental, entre outras coisas, para se poder realizar uma abordagem categorial sobre a classe constituída pelas lógicas cumulativas e pelas traduções entre elas. As definições de tradução e tradução conservativa entre lógicas cumulativas são apresentadas; procuramos caracterizar sob quais condições podemos afirmar a existência de tais traduções. Aliás, as traduções conservativas merecem papel de destaque, pois, como homomorfismos são funções entre estruturas que preservam propriedades destas estruturas, e homeomorfismos são funções entre espaços topológicos que preservam propriedades topológicas, pretende-se que as aplicações entre lógicas (traduções) preservem propriedades lógicas.

Finalizamos o artigo citando algumas questões que ainda necessitam ser esclarecidas, e questões que poderão ser investigadas futuramente.

1. Operadores de Conseqüência

Basicamente, os operadores de conseqüência são divididos em duas classes: operadores de conseqüência monotônicos e operadores de conseqüência não-monotônicos. A definição de operador de conseqüência, conhecido como operador de conseqüência de Tarski, foi introduzida em 1930 no artigo "On Some Fundamental Concepts of Metamathematics", reproduzido em (Tarski, 1983)**,** cuja primeira edição foi publicada em 1956. A seguir, apresentamos de forma sucinta algumas propriedades satisfeitas pelos operadores de conseqüência de Tarski. Como referência, indicamos (Tarski, 1983) e (Brown; Suszco, 1973). (Wójcicki, 1988) é um texto que apresenta inúmeros resultados sobre operadores de conseqüência de Tarski e (Etchemendy, 1999) é um texto de conteúdo filosófico sobre o tema.

Definição 1.1: Dado um conjunto X qualquer, denomina-se *operador de conseqüência sobre X*, ou *operador de conseqüência de Tarski*, a toda aplicação $C_n: \wp(X) \to \wp(X)$ tal que, para todo A, B $\subseteq$ X, são satisfeitas as propriedades:
(i) $A \subseteq C_n(A)$;
(ii) $A \subseteq B \Rightarrow C_n(A) \subseteq C_n(B)$;
(iii) $C_n(C_n(A)) \subseteq C_n(A)$.

A propriedade (i) corresponde à *reflexividade* do operador de conseqüência de Tarski. A propriedade (ii) é a *monotonicidade*: se A e B são conjuntos de fórmulas e φ é uma fórmula tal que $\varphi \in C_n(A)$, então $\varphi \in C_n(B)$. Em outras palavras, a extensão de alguma teoria lógica pela adição de novas fórmulas não pode invalidar qualquer fórmula da teoria inicial. A propriedade (iii) é chamada *idempotência* e corresponde à transitividade do operador de conseqüência. Segue trivialmente de (i) e (iii) que:

$$C_n(C_n(A)) = C_n(A).$$

Um operador de conseqüência sobre uma linguagem formal L é um *operador de conseqüência sobre o conjunto das fórmulas de L, denotado por For(L)*. Neste contexto, se $\wp$(For(L)) é o conjunto de todos os subconjuntos de fórmulas de L, então C_n é uma aplicação de $\wp$(For(L)) em $\wp$(For(L)).

Consideremos o conjunto das fórmulas do Cálculo Proposicional Clássico (CPC), denotado por For(CPC). Definimos o operador de conseqüência C_n sobre For(CPC), para todo $\Gamma \subseteq$ For(CPC), como:

$$C_n(\Gamma) = \{\alpha \in \text{For (CPC)} \,/\, \exists\, \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ finito tal que } \Gamma_0 \ ?\ \alpha\}.$$

É claro que $C_n(\varnothing) \neq \varnothing$, pois $C_n(\varnothing)$ coincide com o conjunto dos teoremas do Cálculo Proposicional Clássico.

A demonstração do resultado a seguir pode ser vista em (Feitosa, 1997).

Proposição 1.2: Sejam C_n um operador de conseqüência sobre X e I um conjunto indexado tal que, para todo $i \in I$, temos que $A_i \subseteq X$. Então:
(a) $C_n(\cap_{i \in I} A_i) \subseteq \cap_{i \in I} C_n(A_i)$.
(b) $\cup_{i \in I} C_n(A_i) \subseteq C_n(\cup_{i \in I} A_i)$.
(c) $C_n(\cup_{i \in I} A_i) = C_n(\cup_{i \in I} C_n(A_i))$.

Em geral, não vale a igualdade $C_n(\Gamma \cup \Delta) = C_n(\Gamma) \cup C_n(\Delta)$, para quaisquer conjuntos $\Gamma, \Delta \subseteq$ For (CPC).

Os espaços topológicos constituem, de fato, conjuntos munidos de operadores de conseqüência particulares, conhecidos usualmente como operadores de fecho. Estes operadores, além das condições da Definição 1.1 satisfazem as condições adicionais:
(v) $C_n(\varnothing) = \varnothing$;
(vi) $C_n(A \cup B) = C_n(A) \cup C_n(B)$.

Definição 1.3: Seja C_n um operador de conseqüência sobre X. Dado $A \subseteq X$, dizemos que A *é fechado* em X, segundo C_n, se $A = C_n(A)$; e A *é aberto*, se A^c (complementar de A em relação a X) é fechado. Dizemos ainda que $x \in X$ *é denso* em X ou trivializa X, se $C_n(\{x\}) = X$.

Quando C_n é um operador de conseqüência sobre uma linguagem formal, chamamos os conjuntos fechados de teorias. É sabido que se C_n é um operador de conseqüência sobre X e $(A_{i})_{i \in I}$ é a família de todos os fechados em X segundo C_n que contêm um conjunto A de X, então, $C_n(A) = \cap_{i \in I} A_i$. Além disso, A é fechado em X se, e somente se, $A = \cap_{i \in I} A_i$. Isto resulta do fato de que a interseção de fechados segundo C_n é um conjunto fechado. As demonstrações destes fatos são encontradas, entre outros, em (Feitosa, 1997).

1.1 Operadores cumulativos

Gabbay foi provavelmente o primeiro autor a estudar certas relações de inferência não tarskianas e as lógicas não-monotônicas a elas associadas**.** Gabbay (1985) propõe três propriedades que considera minimais para caracterizar uma relação de inferência: reflexividade ou inclusão, corte cauteloso e monotonicidade fraca.

Makinson (1992) renomeia a monotonicidade fraca por monotonicidade cautelosa.

Como mencionado na Introdução, Scheer (2002) apresenta a definição de operador de conseqüência cumulativo e algumas de suas propriedades.

Definição 1.1.1: Dado um conjunto X qualquer, denomina-se *operador de conseqüência cumulativo sobre X*, ou simplesmente *operador cumulativo*, a toda aplicação $C: \wp(X) \to \wp(X)$ tal que, para todo A, B $\subseteq$ X, são satisfeitas as propriedades:

(i) $A \subseteq C(A)$;

(ii) $A \subseteq B \subseteq C(A) \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$;

(iii) $C(C(A)) \subseteq C(A)$.

As propriedades (i), (ii) e (iii) são chamadas respectivamente de *reflexividade* ou *inclusão*, *monotonicidade cautelosa* e *idempotência*. Do mesmo modo que no caso monotônico, para todo $A \subseteq X$, $C(C(A)) = C(A)$, e um operador cumulativo sobre uma linguagem formal L é um operador cumulativo sobre For (L).

Notemos que, da monotonicidade cautelosa e idempotência, para todo A, B $\subseteq$ X, se $A \subseteq B \subseteq C(A)$, então $C(B) \subseteq C(A)$. Portanto, para todo A, B $\subseteq$ X, *se A Í B Í C(A), então C(A) = C(B)*.

Este fato é chamado de *condição cumulativa*.

De forma análoga aos operadores de Tarski, dado um operador cumulativo C, a relação de conseqüência $\mid\!\sim \subseteq \wp(For(L)) \times For(L)$ definida por,

$$\Delta \mid\!\sim \alpha \text{ se, e somente se, } \alpha \in C(\Delta),$$

satisfaz as seguintes propriedades:

$(\mid\!\sim_1)$ $\alpha \in \Delta \Rightarrow \Delta \mid\!\sim \alpha$ (Inclusão);

$(\mid\!\sim_2)$ $\Delta \mid\!\sim \beta_i$, para todo $i \in I$, e $\Delta \mid\!\sim \alpha \Rightarrow \Delta \cup \{\beta_i / i \in I\} \mid\!\sim \alpha$ (Monotonicidade Cautelosa);

$(\mid\!\sim_3)$ $\Delta \mid\!\sim \beta_i$, para todo $i \in I$, e $\Delta \cup \{\beta_i / i \in I\} \mid\!\sim \alpha \Rightarrow \Delta \mid\!\sim \alpha$ (Corte).

As definições de *conjunto fechado*, *aberto* e *elemento denso* em X, segundo um operador cumulativo sobre X, são análogas às apresentadas anteriormente para os operadores de Tarski.

Diferentemente do que ocorre com os operadores de Tarski, a interseção de fechados segundo um operador cumulativo, não é necessariamente um fechado, segundo esse operador. Portanto, a relação que se estabelece entre a família de fechados e um operador cumulativo é diferente do caso em que o operador é de Tarski.

Exemplo 1.1.2 (Scheer, 2002)**:** Nem sempre a interseção de dois fechados é um fechado.

Como exemplo, sejam Y = {a, b, c} e $C: \wp(Y) \to \wp(Y)$, tal que:

$C(\varnothing) = \varnothing$	$C(\{a, b\}) = \{a, b\}$
$C(\{a\}) = \{a, b\}$	$C(\{a, c\}) = \{a, c\}$
$C(\{b\}) = \{b, c\}$	$C(\{b, c\}) = \{b, c\}$
$C(\{c\}) = \{a, c\}$	$C(\{a, b, c\}) = \{a, b, c\}$

Podemos ver que C é um operador cumulativo e que os conjuntos {a, b} e {a, c} são fechados segundo C. Agora, $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \neq C(\{a\})$, isto é, $\{a, b\} \cap \{a, c\}$ não é um conjunto fechado.

Proposição 1.1.3 (Scheer, 2002)**:** Sejam C um operador cumulativo sobre X, $A \subseteq X$ um conjunto qualquer e $(A_i)_{i \in I}$ a família de todos os fechados em X, segundo C, que contêm A. Então, $C(A) = C(\cap_{i \in I} A_i)$. Além disso, A é fechado em X se, e somente se, $A = C(\cap_{i \in I} A_i)$.

Há inúmeras propriedades, satisfeitas por operadores de Tarski, que não valem em geral quando os operadores são cumulativos. Vejamos algumas dessas propriedades.

Proposição 1.1.4 (Scheer, 2002)**:** Sejam C um operador cumulativo sobre X e I um conjunto indexado tal que, para todo $i \in I$, temos que $A_i \subseteq X$. Então, *não* valem em geral as seguintes propriedades:
(a') $C(\cap_{i \in I} A_i) \subseteq \cap_{i \in I} C(A_i)$.
(b') $\cup_{i \in I} C(A_i) \subseteq C(\cup_{i \in I} A_i)$.
(c') $C(\cup_{i \in I} A_i) = C(\cup_{i \in I} C(A_i))$.
(d') $C(\cap_{i \in I} A_i) = C(\cap_{I \in I} C(A_i))$.
Demonstração:
Apresentaremos contra-exemplos apenas para os casos dos itens (a') e (d').
(a') Consideremos, no exemplo anterior Y = X, I = {1, 2}, A_1 = {a, b} e A_2 = {a, c}. Então, $C(A_1 \cap A_2) \not\subset C(A_1) \cap C(A_2)$.
(d') Consideremos, no exemplo anterior Y = X, I = {1, 2}, A_1 = {a} e A_2 = {b}. Então, $C(A_1 \cap A_2) \neq C(C(A_1) \cap C(A_2))$.

Diversas lógicas não-clássicas da literatura possuem uma característica comum: apesar de não-clássicas são lógicas com operador de conseqüência monotônico. Há ainda lógicas que estendem a lógica clássica, isto é, se C é operador de conseqüência dessas lógicas, então $C_n(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, para todo conjunto de fórmulas, quando C_n é o operador dedutivo clássico. Esta propriedade é destacada a seguir, para C operador cumulativo.

Definição 1.1.5 (Makinson, 1992)**:** Sejam C_n um operador de Tarski e C um operador cumulativo, ambos sobre uma linguagem L. Se, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C_n(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, dizemos que C é um *operador supraclássico* relativamente a C_n. Denotaremos esse fato por $C_n \leq C$.

Observamos que, da Definição 1.1.5, segue que para todo $\Gamma \subseteq For(L)$:
$$C_n(C(\Gamma)) = C(C_n(\Gamma)) = C(\Gamma).$$
Além disso, notamos que podemos trocar o operador de Tarski C_n por um operador cumulativo C* qualquer e, assim, obtermos uma relação entre conjuntos fechados de L.

Martins (1997) observa que a base monotônica não precisa ser caracterizada pelo operador dedutivo clássico, assim, o termo operador supraclássico pode ser substituído pela denominação *operador supradedutivo*.

Proposição 1.1.6 (Scheer, 2002)**:** Consideremos os operadores cumulativos C* e C sobre L. Se, para todo $\Gamma \subseteq For(L)$, $C^*(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, então todo conjunto fechado segundo C é um conjunto fechado segundo C*.
Demonstração:
De fato, seja Γ fechado em L segundo C, isto é, $\Gamma = C(\Gamma)$. Pela inclusão,
$\Gamma \subseteq C^*(\Gamma)$ e, por hipótese, $C^*(\Gamma) \subseteq C(\Gamma) = \Gamma$. Logo, $C^*(\Gamma) = \Gamma$.

Corolário 1.1.7 (Scheer, 2002)**:** Sejam os operadores C_n e C, respectivamente operador de Tarski e cumulativo, ambos sobre L. Assim, $C_n \leq C$ se, e somente se, todo conjunto fechado segundo C é um conjunto fechado segundo C_n.
Demonstração:
(⇒) Segue da Proposição 1.1.6.

Definição 1.1.8: Sejam C um operador cumulativo supraclássico e C_n um operador de Tarski, ambos sobre uma linguagem L.
(i) O operador C é *distributivo*, relativamente a C_n se, e somente se, para todos $\Gamma, \Delta, \Phi \subseteq For(L)$,
$$C(\Gamma \cup \Delta) \cap C(\Gamma \cup \Phi) \subseteq C(\Gamma \cup (C_n(\Delta) \cap C_n(\Phi))).$$
(ii) O operador C é *dedutivo*, relativamente a C_n, se para conjuntos $\Gamma, \Delta \subseteq For(L)$,
$$C(\Gamma \cup \Delta) \subseteq C_n(\Gamma \cup C(\Delta)).$$

Definição 1.1.9: Um operador cumulativo C sobre L é *supracompacto* se, para qualquer subconjunto finito $\Gamma \subseteq For(L)$, C satisfaz a propriedade:

$\alpha \in C(\Gamma)$ se, e somente se, existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\alpha \in C(\Gamma_0 \cup \Delta)$, para todo $\Delta \subseteq C(\Gamma)$.

Freund e Lehman, (1991, 1993) apresentam vários resultados acerca dos operadores cumulativos dedutivos e distributivos. Para os operadores cumulativos supracompactos, ver (Freund, 1990).

2. Lógicas e Traduções entre Lógicas

Da Silva *et al.*, (1999) introduzem conceitos bastante gerais de lógica e de tradução entre lógicas. Em (Feitosa, 1997) e (Feitosa; D'Ottaviano, 2001) é introduzido o conceito de tradução conservativa. Com as traduções conservativas podemos verificar a validade de certas propriedades de uma lógica em função de outra lógica, pois a definição de tradução conservativa envolve uma relação de reciprocidade entre as lógicas envolvidas na respectiva tradução. Vários resultados que fornecem condições necessárias e suficientes para que aplicações entre lógicas sejam traduções conservativas, juntamente com algumas traduções conservativas envolvendo a lógica clássica e várias lógicas não clássicas encontram-se também em (Feitosa, 1997) e (Feitosa; D'Ottaviano, 2001). Salientamos que os operadores de conseqüência dessas lógicas são operadores de Tarski.

Como em (Scheer, 2002), na próxima seção estendemos o conceito de lógica, e assim, apresentamos uma nova classe de lógicas cujos operadores são operadores cumulativos. Alguns resultados válidos para as lógicas, cujos operadores de conseqüência são operadores de Tarski, continuam válidos para a nova classe de lógicas. Também são obtidos alguns resultados originais.

2.1 Lógicas Cumulativas

Definição 2.1.1: Uma *lógica cumulativa* é um par **L** = (L, C), em que L é um conjunto qualquer e C é um operador de conseqüência cumulativo sobre L. Quando C é operador de conseqüência de Tarski, dizemos que L é uma *lógica de Tarski*, ou simplesmente uma *lógica*.

Observamos que neste artigo, a menos que cause confusão, não faremos distinção entre o símbolo **L** que caracteriza uma lógica e o símbolo L em que o operador de conseqüência C está definido.

Podemos definir um operador de Tarski sobre um conjunto qualquer X através de um subconjunto das partes de X fechado para interseções arbitrárias.

Em (Feitosa, 1997) a demonstração da proposição que se segue é apresentada em detalhe.

Proposição 2.1.2 (Feitosa, 1997)**:** Sejam X um conjunto não vazio e $\vartheta \subseteq \wp(X)$, tal que $X \in \vartheta$ e ϑ é fechado para interseções arbitrárias. Então, existe um único operador de Tarski C_X definido em X para o qual os fechados de X são exatamente os elementos de ϑ.

A partir da caracterização de um operador de Tarski através de conjuntos fechados, construímos outros operadores de conseqüência. A saber, operador de conseqüência induzido e operador de conseqüência co-induzido.

Definição 2.1.3 (Feitosa, 1997)**:** Sejam **L** = (L, C_n) uma lógica de Tarski, A um conjunto qualquer não vazio e uma função G: A $\rightarrow$ L. Dizemos que a aplicação C_A: $\wp(A) \rightarrow \wp(A)$ é o *operador de conseqüência induzido por G e L em A* quando, dado $E \subseteq A$, E é um conjunto fechado em A se, e somente se, E = G^{-1} (D), onde D é um conjunto fechado de L.

Definição 2.1.4 (Feitosa, 1997)**:** Sejam **L** = (L, C_n) uma lógica de Tarski, B um conjunto qualquer não vazio e uma função F: L $\rightarrow$ B. Dizemos que a aplicação C_B: $\wp(B) \rightarrow \wp(B)$ é o *operador de conseqüência co-induzido por F e L em B* quando, dado $E \subseteq B$, E é um conjunto fechado em B se, e somente se, F^{-1} (E) é um conjunto fechado de L.

De forma mais explícita, a Definição 2.1.3 e a Definição 2.1.4 dizem respectivamente que:

(a) O operador de conseqüência induzido por G e L é tal que, para todo $E \subseteq A$, $C_A(E) = \cap_{i \in I} G^{-1}(E_i)$, onde $(E_i)_{i \in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados de L segundo C_n, com $G^{-1}(E_i) \supseteq E$.

(b) O operador de conseqüência co-induzido por F e L é tal que: para todo $E \subseteq B$, $C_B(E) = \cap_{i \in I} E_i$, onde $(E_i)_{i \in I}$ é a família de todos os conjuntos de B que contêm E, tal que $F^{-1}(E_i)$ é um conjunto fechado de L segundo C_n.

Quando induzimos e co-induzimos operadores de Tarski a partir de lógicas **L** = (L, C_n) e funções envolvendo essas lógicas, algumas propriedades que se referem ao conceito de tradução são válidas. O conceito de tradução será abordado na próxima seção, por ora, vejamos um resultado cuja demonstração pode ser encontrada em (Feitosa, 1997).

Proposição 2.1.5: Sejam as funções F: L $\rightarrow$ B, G: A $\rightarrow$ L e as lógicas **L** = (L, C_n), **B** = (B, C_B), **A** = (A, C_A), tal que C_B e C_A são respectivamente os operadores de conseqüência co-induzido e induzido. Então:
(a) A imagem inversa de um fechado em B (fechado em L) é um fechado em L (fechado em A);
(b) Para todo subconjunto $K \cup \{x\}$ de L, se $x \in C_n(K)$ então $F(x) \in C_B(F(K))$. Da mesma forma, para todo subconjunto $K \cup \{x\}$ de A, se $x \in C_A(K)$ então $F(x) \in C_n(F(K))$.

Como o conceito de lógica cumulativa estende o conceito de lógica de Tarski, surge naturalmente a questão de induzirmos e co-induzirmos operadores cumulativos (não-monotônicos). Primeiramente, vejamos como induzir operadores cumulativos.

Proposição 2.1.6 (Scheer, 2002)**:** Sejam **L** = (L, C) uma lógica cumulativa, X um conjunto qualquer não vazio e a função F: X $\rightarrow$ L. Além disso, seja a aplicação C_X: $\wp(X) \rightarrow \wp(X)$, tal que, para todo $A \subseteq X$, $C_X(A) = F^{-1}(C(\cap_{i \in I} A_i))$, onde $(A_i)_{i \in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C com $A \subseteq F^{-1}(A_i)$, para todo $i \in I$. Então, C_X é um operador cumulativo sobre X.
Demonstração:
Para todo $A \subseteq X$, $C_X(A)$ está bem definido, pois existe pelo menos um conjunto fechado de L com imagem inversa contendo A. O conjunto L satisfaz essa condição.
(a) Para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq C_X(A)$.
De fato, seja $A \subseteq X$, tal que $(A_i)_{i \in I}$ é a família de todos os conjuntos fechados em L segundo C, com $A \subseteq F^{-1}(A_i)$, para todo $i \in I$. Assim, $A \subseteq F^{-1}(\cap_{i \in I} A_i)$ e, como $\cap_{i \in I} A_i \subseteq C(\cap_{i \in I} A_i)$, então $A \subseteq F^{-1}(C(\cap_{i \in I} A_i)) = C_X(A)$.
(b) Para quaisquer conjuntos $A, B \subseteq X$, tal que $A \subseteq B \subseteq C_X(A)$, então $C_X(A) \subseteq C_X(B)$.
Sejam $(A_i)_{i \in I}$ e $(B_j)_{j \in J}$ respectivamente as famílias de todos os conjuntos fechados em L segundo C, tal que $A \subseteq F^{-1}(A_i)$, $B \subseteq F^{-1}(B_j)$, para todo $i \in I$ e $j \in J$. Pela propriedade da imagem inversa, $F^{-1}(C(\cap_{i \in I} A_i)) \subseteq F^{-1}(C(\cap_{j \in J} B_j))$, isto é, $C_X(A) \subseteq C_X(B)$.
(c) Para todo $A \subseteq X$, $C_X(C_X(A)) = C_X(A)$.

O operador C_X da proposição anterior é chamado *operador induzido por F e L*. Se nessa proposição L for uma lógica de Tarski, então C_X é o operador da Definição 2.1.3.

Proposição 2.1.7 (Scheer, 2002)**:** Sejam as lógicas cumulativas **L** = (L, C), **X** = (X, C_X) e a aplicação F: X $\rightarrow$ L, tal que C_X é o operador cumulativo induzido por F e L.
(a) Se F é sobrejetora, então a imagem inversa de um conjunto fechado em L é um conjunto fechado em X.
(b) Para todo subconjunto $\{x\} \cup K$ de X, se $x \in C_X(K)$ então $F(x) \in C(F(K))$.

Se a lógica cumulativa **L** = (L, C) é tal que C é operador supraclássico, então os operadores induzidos, respectivamente, operador de Tarski e operador cumulativo, preservam também a propriedade supraclássica. Além disso, a proposição anterior continua válida.

Proposição 2.1.8 (Scheer, 2002)**:** Sejam F: X$\rightarrow$L uma função, X um conjunto qualquer não vazio, **L** = (L, C) uma lógica cumulativa com C operador supraclássico e C_{nX}, C_X: $\wp(X) \rightarrow \wp(X)$ respectivamente operador de Tarski induzido e operador cumulativo induzido por F e L. Então, $C_{nX} \leq C_X$, isto é, C_X é um operador supraclássico.

Proposição 2.1.9 (Scheer, 2002)**:** Consideremos as lógicas cumulativas **L** = (L, C), **X** = (X, C_X) e a aplicação F: X $\rightarrow$ L, com C_X o operador supraclássico induzido por F e L, e C operador cumulativo supraclássico. Então:
(a) A imagem inversa de um fechado em L é um conjunto fechado em X;
(b) Para todo subconjunto $\{x\} \cup K$ de X, se $x \in C_X(K)$ então $F(x) \in C(F(K))$.
Demonstração:
(a) No caso de C ser operador supraclássico, dizemos que A é um conjunto fechado em L, se $A = C_n(A)$, pois, todo conjunto fechado segundo C é um conjunto fechado segundo C_n. O mesmo vale para os conjuntos fechados em X, ou seja, a família de conjuntos fechados é a família dos conjuntos fechados segundo

C_{nX}. Portanto, pela Proposição 2.1.5, segue que a imagem inversa de um conjunto fechado em L é um conjunto fechado em X.
(b) Segue imediatamente da Proposição 2.1.7 (b).

Se, na Definição 2.1.4, **L** = (L, C) é uma lógica cumulativa, C_B ainda é um operador de Tarski. Assim, a extensão natural da Definição 2.1.4 para o escopo das lógicas cumulativas não nos fornece um operador cumulativo (não-monotônico). Enunciamos esse resultado abaixo.

Proposição 2.1.10 (Scheer, 2002)**:** Sejam **L** = (L, C) uma lógica cumulativa, X um conjunto qualquer não vazio e uma função F: L $\rightarrow$ X. Além disso, seja a aplicação C_X: $\wp(X) \rightarrow \wp(X)$ tal que, para todo A $\subseteq$ X, $C_X(A) = \cap_{i \in I} A_i$, em que $(A_i)_{i \in I}$ é a família de todos os conjuntos em X que contêm A, com $F^{-1}(A_i) = C(F^{-1}(A_i))$, para todo i $\in$ I. Então, C_X é um operador de Tarski sobre X.

Na proposição anterior, se **L** é uma lógica de Tarski, C_X é o operador co-induzido da Definição 2.1.4.

Proposição 2.1.11 (Scheer, 2002)**:** Sejam a aplicação F: L $\rightarrow$ X, **L** = (L, C) uma lógica cumulativa e **X** = (X, C_{nX}) uma lógica de Tarski, tal que C é um operador supraclássico e C_{nX} é o operador de Tarski co-induzido por F e L. Então, a imagem inversa de um conjunto fechado em X é um conjunto fechado em L.

2.2 Traduções entre Lógicas

Na definição de tradução entre lógicas, introduzida em (da Silva *et al.*, 1999), os operadores de conseqüência das lógicas envolvidas são operadores de conseqüência de Tarski. Nesta seção, de acordo com Scheer (2002), estendemos a definição de tradução entre lógicas admitindo que as lógicas são lógicas cumulativas. Alguns dos resultados apresentados são extensões naturais de resultados válidos para as lógicas de Tarski. Novos resultados surgem a partir da definição de operador cumulativo apresentada na Seção 1.
Definição 2.2.1: Dadas duas lógicas cumulativas $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$, uma *tradução de L_1 em L_2* é uma aplicação T: $L_1 \rightarrow L_2$ tal que, para todo subconjunto $A \cup \{x\}$ de L_1,

$$\text{se } x \in C_1(A) \text{ então } T(x) \in C_2(T(A)).$$

Quando L_1 e L_2 são linguagens formais, uma tradução entre as lógicas $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ é uma aplicação T: $For(L_1) \rightarrow For(L_2)$ tal que, para todo subconjunto $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(L_1)$,

$$\text{se } \Gamma \mid\!\sim_{C1} \alpha \text{ então } T(\Gamma) \mid\!\sim_{C2} T(\alpha).$$

Lembramos que, para um operador cumulativo C, $\alpha \in C(\Gamma)$ se, e somente se, $\Gamma \mid\!\sim_{C1} \alpha$.

Usualmente, denota-se a aplicação T: $L_1 \rightarrow L_2$ por T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$.

Observamos que, para $\Gamma = \emptyset$, $T(\emptyset) = \emptyset$. Assim, toda tradução leva teoremas de $\mathbf{L_1}$ em teoremas de $\mathbf{L_2}$. Se $\mathbf{L_1} = (L_1, C_{n1})$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_{n2})$ são lógicas de Tarski, há uma maneira trivial de concebermos uma tradução entre essas lógicas. Basta que exista pelo menos um elemento $y \in L_2$ tal que $y \in C_{n2}(\emptyset)$. Desse modo, definimos a aplicação T: $L_1 \rightarrow L_2$ como T(x) = y, para todo $x \in L_1$. Assim, T(A) = {y}, para todo $A \subseteq L_1$. Logo, se $x \in C_{n1}(A)$ então $T(x) \in T(A) \subseteq C_{n2}(T(A))$. Esta maneira de concebermos traduções também vale quando L_1 e L_2 são lógicas cumulativas.

Proposição 2.2.2: A aplicação T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$, com $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ lógicas cumulativas, é uma tradução se, e somente se, $T(C_1(A)) \subseteq C_2(T(A))$, para todo $A \subseteq L_1$, onde $T(A) = \{T(x) / x \in A\}$.

A classe das lógicas de Tarski e a classe das traduções entre estas lógicas determinam uma categoria[2]. Esta categoria é denotada por $\mathbf{T_r}$. Além disso, verificamos que a categoria $\mathbf{T_r}$ é completa e co-completa, ou seja, $\mathbf{T_r}$ é bi-completa. Em (Feitosa, 1997) e (da Silva *et al.*, 1999) as demonstrações destes resultados são encontradas. De forma análoga, verificamos que a classe das lógicas cumulativas e a classe das traduções entre estas lógicas também determinam uma categoria.

Teorema 2.2.3 (Scheer, 2002)**:** A classe das lógicas cumulativas e das traduções entre elas constitui uma categoria.

[2] Como referência para o estudo de categorias, ver (Goldblat, 1984) ou (Bell, 1988).

Denotamos essa categoria, cujos morfismos são as funções de traduções, por $\mathbf{T_{r\,Cum}}$.

Proposição 2.2.4 (Scheer, 2002)**:** A categoria $\mathbf{T_r}$ é uma subcategoria de $\mathbf{T_{r\,Cum}}$.

Corolário 2.2.5 (Scheer, 2002)**:** A categoria $\mathbf{T_r}$ é uma subcategoria plena de $\mathbf{T_{r\,Cum}}$.

Um resultado importante para o desenvolvimento de uma teoria geral de traduções, no escopo da categoria $\mathbf{T_r}$, é o que fornece uma série de equivalências para que determinadas aplicações sejam consideradas traduções.

Teorema 2.2.6 (da Silva *et al.*, 1999)**:** Seja a aplicação T: $\mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$, com $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ lógicas de Tarski. As seguintes afirmações são equivalentes.
(a) T é uma tradução;
(b) Para qualquer $X \subseteq L_1$, $C_2(T(C_1(X))) = C_2(T(X))$;
(c) A imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado;
(d) Para todo $Y \subseteq L_2$, $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (Feitosa, 1997). Entretanto, sob o escopo da categoria $\mathbf{T_{r\,Cum}}$, o teorema não é válido. Para obtermos esse resultado quando $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ são lógicas cumulativas, precisamos adicionar novas hipóteses. Originalmente, esse resultado foi obtido por Coniglio, D'Ottaviano e Martins e apresentado no Seminário Regular de Lógica do Grupo de Lógica Teórica e Aplicada (GLTA) do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) da UNICAMP, no ano de 2000. Em Scheer (2002) encontramos o novo teorema, que apresentamos a seguir, com uma das hipóteses acima mencionadas eliminadas.

Teorema 2.2.7: Seja a aplicação T: $\mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$, com $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ lógicas cumulativas. Além disso, suponhamos que:
(1) $C_2(Y) \subseteq C_2(T(T^{-1}(Y)))$, para todo $Y \subseteq L_2$;
(2) $C_1(X) \subseteq C_1(T^{-1}(C_2(T(X))))$;
(3) $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq C_1(T^{-1}(C_2(Y)))$, para todo $Y \subseteq L_2$.
Nessas condições, as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) T é uma tradução;
(b) Para qualquer $X \subseteq L_1$, $C_2(T(C_1(X))) = C_2(T(X))$;
(c) A imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado;
(d) Para todo $Y \subseteq L_2$, $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.
Demonstração:
(a) $\Rightarrow$ (b) Como T é tradução, pela Proposição 2.2.2, para qualquer $X \subseteq L_1$, $T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(X))$ e, pela inclusão, $X \subseteq C_1(X)$. Logo, $T(X) \subseteq T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(X))$ e daí, pela condição cumulativa, $C_2(T(X)) = C_2(T(C_1(X)))$. Portanto, para qualquer $X \subseteq L_1$, $C_2(T(C_1(X))) = C_2(T(X))$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Pela inclusão, $T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(C_1(X)))$ e, por hipótese, $C_2(T(C_1(X))) = C_2(T(X))$, para qualquer $X \subseteq L_1$. Logo, $T(C_1(X)) \subseteq C_2(T(X))$, ou seja, T é tradução.
(d) $\Rightarrow$ (c) Seja $Y \subseteq L_2$, tal que $Y = C_2(Y)$. Por hipótese, $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$ e $T^{-1}(Y) \subseteq C_1(T^{-1}(Y))$. Portanto, $C_1(T^{-1}(Y)) = T^{-1}(Y)$, ou seja, a imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado.
(a) $\Rightarrow$ (c) Utilizamos a hipótese (1).
(c) $\Rightarrow$ (a) Utilizamos a hipótese (2).
(c) $\Rightarrow$ (d) Utilizamos a hipótese (3).

A demonstração em detalhe do teorema anterior pode ser encontrada em (Scheer, 2002). Nesse teorema, através das hipóteses (1), (2), (3) vemos que, para certos conjuntos de L_1 e L_2, os operadores C_1 e C_2 comportam-se como operadores monotônicos. Notamos que, quando uma das duas lógicas $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ for uma lógica de Tarski, algumas das hipóteses (1), (2), (3) do Teorema 2.2.7 podem ser desprezadas.

Proposição 2.2.8 (Scheer, 2002)**:** Sejam a aplicação T: $\mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ uma lógica cumulativa e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ é uma lógica de Tarski. Se T é uma tradução de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$, então a imagem inversa de um conjunto fechado em L_2 é um conjunto fechado em L_1.

A seguir, introduzimos resultados novos relativos a traduções envolvendo lógicas cumulativas; em particular, no Teorema 2.2.11 são demonstrados resultados que correspondem aos resultados do Teorema 2.2.7, porém no caso em que a função considerada é sobrejetora e uma das lógicas envolvidas é de Tarski e a outra é uma lógica cumulativa.

Proposição 2.2.9: Sejam a aplicação T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ uma lógica de Tarski e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ uma lógica cumulativa:
(i) (Scheer, 2002) Se a imagem inversa de um conjunto fechado em L_2 é um conjunto fechado em L_1, então T é uma tradução de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$;
(ii) Se a imagem inversa de um conjunto fechado em L_2 é um conjunto fechado em L_1 então, para todo $Y \subseteq L_2$, $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.
Demonstração:
(ii) Seja um conjunto qualquer $Y \subseteq L_2$. Então, $T^{-1}(Y) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$. Como C_1 é um operador de Tarski, segue que $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq C_1(T^{-1}(C_2(Y)))$. Por hipótese, $C_1(T^{-1}(C_2(Y))) = T^{-1}(C_2(Y))$. Portanto, $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.

Nas duas proposições anteriores a atenção é dada apenas aos itens (a) e (c) do Teorema 2.2.7, pois esses itens são mais relevantes, haja visto que, a partir de conjuntos fechados, foram definidos operadores induzidos e co-induzidos. A Proposição 2.2.8, que é semelhante a (a) $\Rightarrow$ (c) no Teorema 2.2.7, não utiliza a hipótese (1) desse teorema; a Proposição 2.2.9 (i), que é semelhante a (c) $\Rightarrow$ (a), não utiliza a hipótese (2); e a parte (ii) dessa proposição, que é semelhante a (c) $\Rightarrow$ (d), não utiliza a hipótese (3).

Proposição 2.2.10: Sejam $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ lógicas cumulativas e a aplicação sobrejetora T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$. Se T é tradução então, para todo $Y \subseteq L_2$, $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.

Demonstração:
Seja um conjunto qualquer $Y \subseteq L_2$. Como T é sobrejetora, existe $X_0 \subseteq L_1$ tal que $T(X_0) = Y$. Além disso, como T é tradução, $T(C_1(T^{-1}(Y))) \subseteq C_2(T(T^{-1}(Y)))$
(ver Proposição 2.2.2). Aplicando T^{-1} a ambos os lados dessa expressão, resulta que $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.

A partir da Proposição 2.2.9 e Proposição 2.2.10, obtemos um resultado análogo ao Teorema 2.2.7.

Teorema 2.2.11: Seja $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ uma lógica de Tarski, $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ uma lógica cumulativa e a aplicação sobrejetora T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$. As seguintes afirmações são equivalentes:
(a) T é uma tradução;
(b) Para qualquer $X \subseteq L_1$, $C_2(T(C_1(X))) = C_2(T(X))$;
(c) A imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado;
(d) Para todo $Y \subseteq L_2$, $C_1(T^{-1}(Y)) \subseteq T^{-1}(C_2(Y))$.
Demonstração:
(a) $\Leftrightarrow$ (b) Ver Teorema 2.2.7.
(c) $\Rightarrow$ (a) Ver Proposição 2.2.9 (i).
(c) $\Rightarrow$ (d) Ver Proposição 2.2.9 (ii).
(a) $\Rightarrow$ (d) Ver Proposição 2.2.10.
(d) $\Rightarrow$ (c) Ver Teorema 2.2.7.

Na próxima seção iremos tratar das traduções conservativas.

2.3 Traduções Conservativas

A definição de tradução entre lógicas não fornece uma relação de reciprocidade entre as lógicas envolvidas. Isto não ocorre com as chamadas traduções conservativas. A partir dessas traduções, podemos verificar a validade de certas propriedades de uma lógica em função de outra lógica, por isso as traduções conservativas merecem atenção especial.

O conceito de tradução conservativa foi introduzido por Feitosa e D'Ottaviano em (Feitosa, 1997) e (Feitosa; D'Ottaviano, 2001), e refere-se à classe das lógicas de Tarski.

Em (Scheer, 2002), o conceito de tradução conservativa é estendido para a classe das lógicas cumulativas e são demonstrados todos os resultados que apresentamos nesta seção.

Definição 2.3.1: Uma aplicação T: $\mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$ entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ é uma *tradução conservativa* se, para todo conjunto $A \cup \{x\}$ de L_1,

$$x \in C_1(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_2(T(A)).$$

Quando L_1 e L_2 são linguagens formais, de forma análoga à definição de tradução, uma tradução conservativa é uma aplicação T: For $(L_1) \to$ For (L_2) tal que, para todo subconjunto $\Gamma \cup \alpha \in$ For (L_1):

$$\Gamma \mid\!\sim_{C1} \alpha \text{ se, e somente se, } T(\Gamma) \mid\!\sim_{C2} T(\alpha).$$

Vários resultados que fornecem condições necessárias e suficientes para que aplicações entre lógicas sejam traduções conservativas e algumas traduções conservativas envolvendo a lógica clássica e várias lógicas não-clássicas são encontrados em (Feitosa, 1997) e (Feitosa; D'Ottaviano, 2001). A classe das lógicas de Tarski e das traduções conservativas entre essas lógicas forma uma subcategoria co-completa de $\mathbf{T_r}$. Esta subcategoria é denotada por $\mathbf{T_{r\,Con}}$ (Feitosa, 1997). Com relação à classe das lógicas cumulativas e das traduções conservativas vejamos um resultado sobre categorias.

Proposição 2.3.2: A classe das lógicas cumulativas e a classe das traduções conservativas entre estas lógicas determinam uma categoria, denotada por $\mathbf{T_{r\,Cum\,Con}}$.

Com este resultado, vemos que $\mathbf{T_{r\,Cum\,Con}}$ é uma subcategoria de $\mathbf{T_{r\,Cum}}$.

A seguir, estendemos para as lógicas cumulativas o resultado que encontramos em (Feitosa, 1997), que nos fornece uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação T entre lógicas de Tarski seja uma tradução conservativa.

Teorema 2.3.3: Uma tradução T: $\mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$, com $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ lógicas cumulativas, é uma tradução conservativa se, e somente se, $T^{-1}(C_2(T(A))) \subseteq C_1(A)$, para todo $A \subseteq L_1$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se $x \in T^{-1}(C_2(T(A)))$, então $T(x) \in T(T^{-1}(C_2(T(A)))) \subseteq C_2(T(A))$. Logo, $T(x) \in C_2(T(A))$. Como T é tradução conservativa, segue que $x \in C_1(A)$.

($\Rightarrow$) Seja um conjunto qualquer $A \cup \{x\}$ de L_1. Se $T(x) \in C_2(T(A))$, então $T^{-1}(T(x)) \subseteq T^{-1}(C_2(T(A)))$. Daí, por hipótese, $T^{-1}(T(x)) \subseteq C_1(A)$. Como $x \in T^{-1}(T(x))$, temos que $x \in C_1(A)$. É claro que, se $x \in C_1(A)$ então $T(x) \in C_2(T(A))$, pois T é tradução.

Vejamos a seguir o que ocorre quando em uma tradução conservativa pelo menos uma das lógicas envolvidas é uma lógica de Tarski.

Proposição 2.3.4: Sejam as aplicações T: $\mathbf{L} \to \mathbf{L_2}$ e $C_2: \wp(L_2) \to \wp(L_2)$, com $\mathbf{L} = (L, C_n)$ uma lógica de Tarski. Além disso, para todo conjunto $A \cup \{x\}$ de L,

$$x \in C_n(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_2(T(A)).$$

Se T é sobrejetora então, para todo $B, D \subseteq L_2$, tal que $B \subseteq D$, $C_2(B) \subseteq C_2(D)$.

Demonstração:

Sejam $B, D \subseteq L_2$ e $y \in C_2(B)$, tal que $B \subseteq D$. Como T é sobrejetora, então existem conjuntos $E, F \subseteq L_1$, tais que $T(E) = B$ e $T(F) = D$, com $E \subseteq F$, e existe um elemento $x \in L_1$, com $T(x) = y$. Logo, $T(x) \in C_2(T(E))$. Daí, por hipótese, segue que $x \in C_n(E)$. Como C_n é operador de Tarski e $E \subseteq F$, então $x \in C_n(F)$. Novamente, por hipótese, temos que $T(x) \in C_2(T(F))$, isto é, $y \in C_2(D)$. Portanto, $C_2(B) \subseteq C_2(D)$.

Proposição 2.3.5: Sejam as aplicações T: $\mathbf{L_1} \to \mathbf{L}$ e $C_1: \wp(L_1) \to \wp(L_1)$, com $\mathbf{L} = (L, C_n)$ uma lógica de Tarski. Além disso, para todo conjunto $A \cup \{x\}$ de L_1,

$$x \in C_1(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_n(T(A)).$$

Então, para todo $B, D \subseteq L_1$, tal que $B \subseteq D$, $C_1(B) \subseteq C_1(D)$.

Demonstração:

Sejam $B, D \subseteq L_1$, tal que $B \subseteq D$. Como C_n é um operador de Tarski, segue que $C_n(T(B)) \subseteq C_n(T(D))$. Pois bem, por hipótese, se $x \in C_1(B)$ então $T(x) \in C_n(T(B))$. Logo, $T(x) \in C_n(T(D))$. Daí, novamente por hipótese, segue que $x \in C_1(D)$. Portanto, $C_1(B) \subseteq C_1(D)$.

Dessas proposições, considerando-se duas lógicas quaisquer, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.6: Dada uma tradução conservativa sobrejetora T entre as lógicas $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_1}$ é uma lógica de Tarski se, e somente se, $\mathbf{L_2}$ é uma lógica de Tarski.

Nas condições do teorema acima, se a aplicação T não for sobrejetora, o conjunto imagem de T deve comportar-se monotonicamente. Assim, traduções conservativas entre lógicas de Tarski e lógicas cumulativas são divididas em classes distintas.

Consideremos uma aplicação T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ lógicas cumulativas, com os operadores C_1 e C_2 supraclássicos relativamente a C_{n1} e C_{n2}, ou seja, $C_{n1} \leq C_1$ e $C_{n2} \leq C_2$. Nesses termos, de acordo com a definição de tradução conservativa (Definição 2.3.1), podemos pensar em outras condições para que a aplicação T seja uma tradução conservativa. Vejamos quais são estas condições:

(i') $x \in C_1(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_{n2}(T(A))$;

(ii') $x \in C_{n1}(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_{n2}(T(A))$;

(iii') $x \in C_{n1}(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_2(T(A))$.

Se C_1 é um operador cumulativo (não-monotônico), a condição (i') não pode ser válida, pois, se isto ocorrer, a Proposição 2.3.5 nos diz que C_1 deve ser um operador de Tarski. Se a condição (iii') for válida, pela Proposição 2.3.4, o operador C_2 deve ser um operador de Tarski, isto é, $\mathbf{L_2}$ deve ser uma lógica de Tarski. No caso em que a condição (ii') for válida, problemas deste tipo não ocorrem, ou seja, podemos considerar $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ lógicas cumulativas, de modo que traduções conservativas entre essas lógicas são traduções entre as partes monotônica e não-monotônica das respectivas lógicas.

Proposição 2.3.7: Seja T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$ uma tradução conservativa entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$, tal que C_2 é operador supraclássico relativamente a C_{n2}. Além disso, para um operador de Tarski C_n sobre L_1 e para todo $A \cup \{x\}$ de L_1 temos que:

$$x \in C_{n1}(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_{n2}(T(A)).$$

Então, $C_{n1} \leq C_1$, isto é, C_1 é supraclássico com relação a C_n.

Demonstração:

Para todo $A \cup \{x\}$ de L_1,

$$x \in C_{n1}(A) \text{ se, e somente se, } T(x) \in C_{n2}(T(A)).$$

Como, $C_{n2} \leq C_2$, então $T(x) \in C_2(T(A))$. Daí, $x \in C_1(A)$, pois T é tradução conservativa. Portanto, se $x \in C_{n1}(A)$ então $x \in C_1(A)$, isto é, $C_n \leq C_1$.

A partir da Proposição 2.3.4 e Proposição 2.3.5, dadas quaisquer duas lógicas da categoria $\mathbf{Tr}_{\mathbf{Cum}}$, verificamos que nem sempre existe tradução conservativa entre essas lógicas.

Corolário 2.3.8: Seja $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ uma lógica cumulativa (não-monotônica). Então, para qualquer lógica de Tarski $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$, não existe tradução conservativa de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$.

Demonstração:

Se existir tradução conservativa T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$ então, pela Proposição 2.3.5, $\mathbf{L_1}$ deve ser uma lógica de Tarski (o que não é o caso).

Corolário 2.3.9: Seja $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ uma lógica cumulativa (não-monotônica). Então, para qualquer lógica de Tarski $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$, não existe tradução conservativa sobrejetora de $\mathbf{L_1}$ em $\mathbf{L_2}$.

Demonstração:

Segue imediatamente da Proposição 2.3.4.

Quando uma aplicação entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$ é uma tradução conservativa, com $C_{n1} \leq C_1$ e $C_{n2} \leq C_2$, a propriedade dedutiva e a condição supracompacta são preservadas de uma lógica para outra. Lembramos que, neste caso, a aplicação T é uma tradução conservativa entre as partes monotônicas e não-monotônicas das respectivas lógicas. Assim, T satisfaz as condições:

(i) $x \in C_{n1}(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_{n2}(T(A))$.

(ii) $x \in C_1(A)$ se, e somente se, $T(x) \in C_2(T(A))$.

Proposição 2.3.10: Seja T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$ uma tradução conservativa sobrejetora entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$, tal que $C_{n1} \leq C_1$ e $C_{n2} \leq C_2$. Se C_1 é um operador dedutivo, então C_2 é um operador dedutivo.

Demonstração:

Sejam os conjuntos $D, E \subseteq L_2$, tal que $y \in C_2(D \cup E)$. Como T é uma tradução sobrejetora, existem conjuntos $A, B \subseteq L_1$, tais que $T(A) = D$, $T(B) = E$ e um elemento $x \in L_1$, com $T(x) = y$. Logo,

$T(x) \in C_2(T(A) \cup T(B))$. Daí, como T é tradução conservativa, segue que $x \in C_1(A \cup B)$. Do fato de que C_1 é operador dedutivo segue que $x \in C_{n1}(A \cup C_1(B))$. Novamente, pelo fato de que T é tradução conservativa, resulta que $T(x) \in C_{n2}(T(A) \cup T(C_1(B)))$. Lembramos que, pela Proposição 2.2.2, $T(C_1(B)) \subseteq C_2(T(B))$. Logo, $T(x) \in C_{n2}(D \cup C_2(E))$. Portanto, $C_2(D \cup E) \subseteq C_{n2}(D \cup C_2(E))$, ou seja, C_2 é um operador dedutivo.

Proposição 2.3.11: Seja T: $\mathbf{L_1} \rightarrow \mathbf{L_2}$ uma tradução conservativa sobrejetora entre as lógicas cumulativas $\mathbf{L_1} = (L_1, C_1)$ e $\mathbf{L_2} = (L_2, C_2)$, tal que $C_{n1} \leq C_1$ e $C_{n2} \leq C_2$. Se C_1 é um operador supracompacto, então C_2 é um operador supracompacto.

Demonstração:

Sejam $A \subseteq L_2$ e $y \in C_2(A)$, onde A é um subconjunto finito de L_2. Queremos mostrar que existe um subconjunto finito $A_0 \subseteq A$ tal que $y \in C_2(A_0 \cup D)$, para todo $D \subseteq C_2(A)$.

De fato, como T é sobrejetora, se $y \in C_2(A)$, existem $B \subseteq L_1$ e $x \in L_1$, tais que $T(x) = y$ e $T(B) = A$, onde B é um conjunto finito. Assim, $T(x) \in C(T(B))$ e, pelo fato de T ser tradução conservativa, segue que $x \in C_1(B)$. Pela condição supracompacta de C_1, existe um subconjunto finito $B_0 \subseteq B$ tal que $x \in C_1(B_0 \cup E)$, para todo $E \subseteq C_1(B)$. Novamente, como T é tradução conservativa, segue que $T(x) \in C_2(T(B_0) \cup T(E))$, isto é, $y \in C_2(A_0 \cup T(E))$, onde $A_0 = T(B_0)$. Lembramos que $T(E) \subseteq C_2(A)$, pois T é tradução (ver Proposição 2.2.2). Sem perda de generalidade, no lugar de T(E) podemos considerar qualquer conjunto $D \subseteq C_2(A)$, pois T é sobrejetora. Portanto, C_2 é operador supracompacto.

Se nas duas proposições anteriores T não é sobrejetora, então estes resultados referem-se à imagem da aplicação T (Im(T)), isto é, C_2 é um operador dedutivo ou supracompacto sobre o conjunto Im (T).

3. Considerações finais

Prováveis assuntos (questões) a serem abordados para complementarmos o que foi apresentado nesse artigo são citados a seguir.

1) Complementar a abordagem categorial, analisando questões como: A categoria $T_{r\ Cum}$ possui produto e co-produto?

O que queremos obter são resultados que possam nos auxiliar na investigação de propriedades que são preservadas via traduções (traduções conservativas). Quando tratamos somente de lógicas de Tarski, os resultados decorrentes da abordagem categorial realizada sobre a classe dessas lógicas nos auxiliam na obtenção de resultados que caracterizam a existência ou não de traduções (traduções conservativas). Pensamos que o mesmo poderá ocorrer com a classe das lógicas cumulativas.

2) Existem várias subfamílias de operadores cumulativos. A saber, operadores distributivos, operadores dedutivos, operadores supracompactos, entre outros. Mas, quais das propriedades que caracterizam essas subfamílias de operadores cumulativos são preservadas via traduções (traduções conservativas)? Quais não são preservadas? Vimos que algumas propriedades são preservadas, por exemplo, a propriedade dedutiva e supracompacta.

3) Exibir exemplos de traduções, preferencialmente de traduções conservativas, entre lógicas cumulativas. Estes exemplos também podem esclarecer e/ou justificar propriedades satisfeitas pelas lógicas envolvidas em tais traduções. Possíveis propriedades poderão surgir a partir destas traduções.

4) Uma abordagem semântica poderá ser realizada sob o escopo da categoria $T_{r\,Cum}$, ora de um ponto de vista mais geral, ora para lógicas particulares pertencentes a esta categoria.

Enfim, são muitas as questões envolvendo lógicas não-monotônicas e traduções entre elas que precisam ser investigadas. Uma Teoria Geral de Traduções constitui um tema bastante profícuo de investigação.

Abstract: In this paper, the concepts of cumulative logic and of translations between cumulative logics are introduced. Some results that characterize the existence of conservative translations between cumulative logics and that guarantee the preservation of some of the properties of the logics are also presented.

Keywords: Cumulative operators, cumulative logics, translations between cumulative logics.

Referências Bibliográficas:

BELL, J.L. *Toposes and local set theories:* an introduction. Oxford: Claredon Press, 1988.

BROWN, D. J., SUSZKO, R. Abstract Logics. *Dissertationes Mathematicae*, n. 102, p. 1-41. Poland, Warszawa, 1973.

DA SILVA, J. J., D'OTTAVIANO, I. M. L., SETTE, A. M. Translations between logics. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Models, Algebras and Proofs;* v. 203, p. 435-448, 1999.

ETCHEMENDY, J. *The concept of logical consequence.* The David Hume Series – philosophy and cognitive science reissues. CSLI Publications: Leland Stanford Junior University, USA, 1999.

FEITOSA, H. A.*Traduções conservativas*, 1997. 161 p. Tese (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

FEITOSA, H. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. Conservative translations. *Annals of Pure and Applied Logic*. Ed: North Holand, Amsterdam, v. 108, p. 205-227, 2001.

FREUND, M. Supracompact Inference Operations. *Lecture Notes in Artificial Intelligence.* In: PROCEDINGS 1st INTERNATIONAL WORKSHOP KARLSKUHE, Germany, p. 59–73, 1990.

FREUND, M., LEHMANN, D. Deductive inference operations. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, v. 478, p. 227-233, 1991.

FREUND, M., LEHMANN, D. Nonmonotonic inference operations. *Bulletin of the IGPL,* Oxford University Press, v. 1, n. 1, p. 23-68, 1993.

GABBAY, D. M. Theoretical foundations for nonmonotic reasoning in expert systems. *Logics and Models of Concurrent Systems,* Computer and System Sciences, v. 13. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

GOLDBLATT, R. *Topoi* – the categorical analysis of logic. Amsterdam: North Holland, Revised Edition, 1984.

KRAUS, S., LEHMANN, D., MAGIDOR, M. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, v. 44, p. 167 – 207, 1990.

KALUZHNY, Y., LEHMANN, D. Deductive nonmonotonic inference operations: antitonic representations. *Journal of Logic and Computation,* v. 5(1), p. 11-122, 1995.

MAKINSON, D. General theory of cumulative inference. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, v. 346, p. 1-18. Springer Verlag, 1989.

MAKINSON, D. General patterns in non-monotonic reasoning. In: Handbook of Logic Artificial Intelligence and Logic Programming. Oxford University Press, 1992 v. 2, p. 35–108.

MARTINS, A. T. *A syntatical and semantical uniform treatment for the IDL &LEI non-monotonic system,* 1997. 225 p. Tese (Doutorado em Computação) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 1997.

RICH, E. *Artificial Intelligence.* Tradução: Newton Vasconcelos. São Paulo: McGraw-Hill, 1988.

SCHEER, M. C. *Para uma teoria de traduções entre lógicas cumulativas,* 2002. 108 p. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

TARSKI, A. *Logic, semantics, metamathematics* – papers from 1923 to 1938. USA: Hackett Publishing Company, 1983.

WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi* – basic theory of consequence operations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, v. 199, 1988.