SOBRE O CARÁTER INTUITIVO DA TEORIA DOS CONJUNTOS DE DEDEKIND: CONSIDERAÇÕES SOBRE O AXIOMA DA REGULARIDADE

Walter Gomide
Departamento de Filosofia
Universidade Gama Filho
waltergomide@yahoo.com

Abstract: In this article, I intend to show that Dedekind's set theory has not an intuitive character, once in Dedekind's set theory the axiom of regularity is not valid. Since such axiom guarantees that the notion of pertinence has a behavior related to our intuitions about sets, Dedekind's set theory is not an intuitive one, but rather *an abstract set theory,* in which our normal conceptions about sets and their properties are not valid.

Key-words: Dedekind, Axiom of regularity, Principle of conversion.

1 INTRODUÇÃO

O matemático alemão Richard Dedekind postulava que a aritmética fundamenta-se nas *leis do pensamento*. Tal tese foi proposta e desenvolvida na obra *Was sind und was sollen die Zahlen?(O que são e o que significam os números?)*, primeiramente publicada em 1888 – doravante essa obra será referida pela abreviatura WSZ.

O que deve ser entendido por "leis do pensamento" é algo controverso, já que nem mesmo o conceito de "pensamento" é esclarecido por Dedekind. Mas, de uma leitura atenta do WSZ, chega-se à conclusão de que a intenção de Dedekind é encontrar o fundamento último da aritmética na capacidade de relacionar objetos, *capacidade esta que existe em nós, humanos, de forma totalmente independente de nossas intuições espácio-temporais* (DEDEKIND, 1963, p. 32).

Basicamente, ao postular que a aritmética está fundamentada nas leis do pensamento, Dedekind se compromete com a perspectiva logicista, segunda a qual as verdades aritméticas se legitimam porquanto são embasadas nos princípios que governam a atividade racional. Assim como seu contemporâneo Frege, Dedekind é completamente avesso à tese de que a evidência empírica pudesse servir de garantia à legitimidade das proposições aritméticas (sobre o logicismo de Frege e de Dedekind, ver GILLIES, 1982, pp. 66 -70).

2 TEORIA DEDEKINDIANA DOS CONJUNTOS

Para levar a termo a sua proposta fundacional, Dedekind precisa de uma teoria dos conjuntos; é nesta teoria que os conceitos aritméticos serão apresentados e desenvolvidos. Obviamente, uma teoria de conjuntos pressupõe as noções de *elemento de um conjunto* e de *conjunto*, propriamente dito. Antes de apresentar tais conceitos, Dedekind parte de um conceito mais básico ainda, porquanto indefinível em termos mais fundamentais: a noção de *coisa*. Logo no início da apresentação de sua teoria conjuntista, Dedekind, no WSZ, diz o seguinte:

> No que se segue, eu entendo por *coisa* todo objeto de nosso pensamento (DEDEKIND, 1963, p. 44).

Aqui não há maiores esclarecimentos sobre o que entender por "nosso pensamento", nem se haveria um outro tipo de pensamento diferente do *nosso* – um pensamento não-humano, por assim dizer. Denominando o *universo dos nossos pensamentos* de Ξ, podemos afirmar que na base da teoria dos conjuntos de Dedekind está Ξ na qualidade de um pressuposto indispensável: sem o *universo dos nossos pensamentos* não se pode fazer nada; nenhum discurso que se pretenda inteligível e expressivo da racionalidade humana se faz possível sem Ξ. Este universo de objetos do nosso pensamento – ou do pensamento humano - é a *totalidade fundamental* da teoria de conjuntos de Dedekind.

Após a apresentação da noção de *coisa*, Dedekind introduz uma *lei de identidade* para os objetos do pensamento:

> Uma coisa *a* é a mesma [coisa] que *b* (idêntica a *b*), e *b* é a mesma [coisa] que *a*, quando tudo que pode ser pensado em relação a *a* pode também ser pensado em relação a *b*, e quando tudo que é verdadeiro de *b* pode ser pensado de *a* (DEDEKIND, 1963, p. 44).

Uma versão para a *lei de identidade* de Dedekind pode ser a seguinte:

1) $\forall x \forall y\, [(x = y) \leftrightarrow \forall F(Fx \leftrightarrow Fy)]$

O que é dito pela lei de identidade de Dedekind é que, dados dois objetos quaisquer do nosso pensamento – assume-se, aqui, que qualquer quantificação será feita em relação ao universo Ξ dos objetos do nosso pensamento -, a identidade entre eles se dá conforme o critério leibniziano: dois objetos são iguais se, e somente se, todas as propriedades que se aplicam a um deles aplicam-se também ao outro e *vice-versa* – o critério conhecido como *identitas indiscernibilium* (FRAENKEL, 1961, p. 13).

Após a introdução de sua lei de identidade, Dedekind passa às noções capitais de *sistema* e de *elementos* de um sistema:

> Freqüentemente acontece de diferentes coisas *a,b,c*,... poderem ser associadas [na mente] a partir de um ponto de vista comum; dizemos, então, que elas formam um *sistema* S; chamamos as coisas *a,b,c,* ...de *elementos* de S, [isto é], [tais coisas] estão contidas em S; da mesma forma, dizemos que S *consiste* destes elementos. Tal sistema S (um agregado, uma totalidade, uma multiplicidade), na qualidade de um objeto do pensamento, é igualmente uma coisa (DEDEKIND, 1963, p. 45).

Na passagem acima, Dedekind nos diz que o pensamento humano pode agrupar coisas, gerando-se com isto novas coisas. Para tal fim, o pensamento considera tais coisas sob um *ponto de vista comum*; esta capacidade de *pensar as coisas sob um ponto de vista comum* se relacionaria com o fato de as coisas poderem estar em uma relação de pertinência umas com as outras. Disto resulta que as coisas podem ser definidas ou como *elementos* ou como *sistemas*. Tomando a relação de pertinência como primitiva na teoria dos conjuntos de Dedekind[1], temos então as definições de *elemento* e de *sistema,* respectivamente:

2) $Elx \equiv_{df} (\exists z)(x \in z)$
3) $Sx \equiv_{df} (\exists y)(y \in x)$.

Após apresentar as definições de *elemento* e de *sistema*, Dedekind introduz a igualdade entre *sistemas*:

> O sistema *S* é o mesmo que o sistema *T* – em símbolos, *S = T* - quando todo elemento de *S* é elemento de *T* e quando todo elemento de *T* é também um elemento de *S* (DEDEKIND, 1963, p. 45).

Dedekind apresenta aqui o *axioma da extensionalidade*:

4) $\forall x \forall y\ [\ (Sx \wedge Sy) \rightarrow \forall z\ ((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y))]$

Basicamente, ele nos diz que dois sistemas são iguais quando eles têm os mesmos elementos. Mais tarde, tal axioma viria aparecer na axiomatização de Zermelo para a teoria dos conjuntos, em 1908[2].

Posteriormente, há no WSZ a definição de *parte*:

> Um sistema *A* é *parte* de um sistema *S* quando todo elemento de *A* é elemento de *S* (DEDEKIND, 1963, p. 46).

Em símbolos, temos:

5) $x \subseteq y \equiv_{df} Sx \wedge Sy \wedge \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$.

Na definição de *parte*, aparece uma observação de importância capital na teoria dos conjuntos de Dedekind:

> [Todo] elemento *s* de um sistema S pode ser visto como um sistema [...] (DEDEKIND, 1963, p. 46).

O que Dedekind afirma aqui é o seguinte:

6) $\forall x(Elx \rightarrow (\exists z)(z \in x))$.

---

[1] Pode-se definir a noção de pertinência a partir de conceitos mais básicos. Por exemplo: $x \in y \equiv_{df} (\exists F)(Fx \wedge y = \varepsilon F)$. Aqui a relação de pertinência foi definida em termos de propriedade e da extensão desta propriedade - $\varepsilon F = \{z / Fz\}$. Na teoria conjuntista de Dedekind, como a noção de extensão de uma propriedade não é explicitamente apresentada como fundamental, toma-se a noção de pertinência como primitiva, posto que, esta sim, aparece no WSZ como básica a outras definições.
[2] Ver (FRAENKEL & BAR-HILLELL,1958).

3 AXIOMA DA REGULARIDADE

Para Dedekind, se algo é um elemento, então é um sistema: sempre é possível postular algo que pertença ao elemento considerado. Dado um objeto do pensamento *a*, ainda que ele seja elemento, vale a fórmula seguinte:

7) $(\exists x)(x \in a)$

Instanciando existencialmente *x* com *d,* temos que:

8) $d \in a$.

Uma vez que d é elemento, então existe um d' tal que:

9) $d' \in d$.

Surge então algo um tanto inconveniente: *em princípio*, posto que *d'* é elemento, existe um objeto do pensamento que pertence a *d'*. Podemos partir da hipótese que tal objeto do pensamento pertencente a *d'* é *a*, o que gera a seguinte *circularidade* conjuntista:

10) $d' \in d \wedge d \in a \wedge a \in d'$.

Tal situação, uma possibilidade logicamente dada na teoria dos conjuntos de Dedekind, por conta de 6), tem o incômodo de ser, nas palavras de Patrick Suppes, "contra-intuitiva"(SUPPES, 1972, p.53). Sem dúvida, uma das características mais evidentes da teoria dos conjuntos de Dedekind é a sua natureza intuitiva; das concepções dedekindianas de conjunto ou sistema não se espera que surjam certas *extravagâncias*[3], como a circularidade da relação de pertinência entre os objetos do nosso pensamento – e mesmo entre os objetos que *não são dos nossos pensamentos.* Entretanto, por mais que a teoria de Dedekind se pretenda intuitiva, o postulado 6), tácito em sua teoria, leva a conseqüências pouco usuais, como a já expressa *circularidade* da relação de pertinência. Mas não só isto: também é possível na teoria de Dedekind algo do tipo

11) $x \in y \wedge y \in x$,

que também fere a intuição conjuntista comum[4]. A expressão 11) surge como um caso particular da circularidade da pertinência envolvendo *n* conjuntos; no caso, obviamente, instanciada para $n = 2$.

Surge então uma questão: dada uma teoria dos conjuntos em que vale o postulado 6) ou outro equivalente, como tal teoria pode evitar o aparecimento extravagante da circularidade da pertinência? Evita-se tal inconveniente municiando a teoria com axiomas adequados, de tal forma que estes sirvam com antídoto ao comportamento cíclico

[3]No prefácio da primeira edição do WSZ, de 1888, Dedekind enfatiza a natureza intuitiva e familiar dos conceitos a serem abordados em seu livro. Dedekind aponta que o material que está prestes a ser apresentado "pode ser entendido por qualquer um que possua o que usualmente se denomina de bom senso; nenhum conhecimento filosófico ou técnico é minimamente pressuposto" (DEDEKIND, 1963, p. 33).

[4] Contra aqueles que julgam que 11) não é contra-intuitivo, Patrick Suppes se manifesta dizendo: "Se você não acredita que [$x\in y \wedge y \in x$] é contra-intuitivo, tente dar um exemplo de conjuntos [*x* e *y*] satisfazendo [tal relação] (SUPPES, 1972, p. 53).

da pertinência. Tais axiomas podem ser os de Zermelo, incluso entre eles o axioma da escolha[5]. Mas somente os axiomas de Zermelo não garantem o não surgimento da circularidade; é necessário também a inserção do *axioma da regularidade*[6] como pressuposto, assim como os de Zermelo, na base da teoria de uma teoria dos conjuntos em que vale o postulado 6). No contexto dedekindiano, tal axioma pode ser formulado da seguinte maneira:

12) $\forall x \, [\, Sx \rightarrow (\exists z)(z \in x \wedge \forall y \, (y \in z \rightarrow y \notin x)) \,]$.

O axioma da regularidade impede que haja *ciclos de pertinência* entre os sistemas. Se um sistema *x* tem *b* por elemento, então, posto que *a* também é sistema, temos que, por conta de 12), todo y que pertencer a *b* satisfaz a seguinte equação:

13) $x \cap y = \varnothing$.

Como na teoria de Dedekind não se define o conjunto vazio, podemos dizer que a intersecção entre *x* e *y*, quando não há termos em comum entre *x* e *y*, é desprovida de sentido[7]. O axioma da regularidade, no contexto dedekindiano, garante que a intersecção entre os sistemas e os seus elementos constitutivos seja um contra senso conjuntista.

Também em função do axioma da regularidade temos que, para todo *x*, vale:

14) $x \notin x$.

A prova de 14) é como se segue.

Suponhamos que $x \in x$. Como $x \in \{x\}$, temos que

15) $x \in \{x\} \cap x$.

Pelo axioma da regularidade, todo *z* que pertença a *x* faz com que $\{x\} \cap z$ seja *sem sentido*, isto é:

16) $(\forall z) \, (\, z \in x \rightarrow \{x\} \cap z = \varnothing)$

Como $x \in x$, por hipótese, então, instanciando-se universalmente z por x, em 16), temos que:

---

[5] Basicamente, os axiomas de Zermelo são os seguintes:

1) Para quaisquer objetos *a* e *b*, há o conjunto que contém somente *a* e *b*;
2) Dois conjuntos que contém os mesmos elementos são iguais;
3) Para qualquer conjunto S e qualquer predicado bem definido P, para todos os membros de S, há o conjunto S* que contém somente aqueles membros de S tais que P se aplique a eles;
4) Para qualquer conjunto A de conjuntos, há o conjunto que contém os membros dos membros de A;
5) Existe um conjunto infinito;
6) (Axioma da escolha): Se T é um conjunto de conjuntos disjuntos dois a dois, então existe um subconjunto de T que contém somente um membro em comum com cada membro de T.

Sobre a axiomática de Zermelo, ver (ZERMELO, 1967).

[6] O *axioma da regularidade* foi formulado primeiramente por Mirimanoff e, em seguida, por Von Neumann (ver (MIRIMANOFF, 1917) e (VON NEUMMAN, 1925)).

[7] Dedekind define a intersecção como sendo a *comunidade entre sistemas* (DEDEKIND, 1963, p.48). Na ausência de termos comuns aos sistemas que estão sendo avaliados quanto à sua *comunidade*, Dedekind diz que tal noção de intersecção é sem sentido (DEDEKIND, 1963, p.49).

17) $\{x\} \cap x = \emptyset$.

Mas, conforme 15), temos

18) $\{x\} \cap x \neq \emptyset$.

Conjuntamente, as proposições 17) e 18) formam uma contradição cuja causa está na hipótese de que $x \in x$. Assim, por redução ao absurdo, temos 14), isto é, $x \notin x$.

4 PRINCÍPIO DA CONVERSÃO

No mesmo parágrafo do WSZ em que Dedekind apresenta o postulado 6), é apresentado o princípio da *conversão* entre as relações de pertinência e de inclusão – entre "$\in$"e "$\subseteq$". Dedekind diz:

> Desde que qualquer elemento *s* de um sistema *S* pode ser tomado como um sistema, então podemos empregar a notação $s \subseteq S$ (DEDEKIND, 1961, p. 46)[8].

Dedekind estabelece, na citação acima, o seguinte postulado:

19) $(\forall x)(\forall y)\ (x \in y \rightarrow x \subseteq y)$.

O postulado 19) pode ser chamado de *postulado da conversão*: ele permite que da pertinência entre dois objetos do pensamento passemos à inclusão própria entre eles. Aparentemente, tal postulado – claramente afirmado por Dedekind, *ao contrário do axioma da regularidade* – não oferece maiores problemas, a não ser o óbvio *colapso* da pertinência na inclusão[9]. Entretanto, se consideramos que a teoria de Dedekind adota o postulado da conversão como princípio – o que parece ser o caso, já que o próprio Dedekind assim o diz -, segue-se que *o axioma da regularidade não vale na teoria de Dedekind*. A prova deste fato se dá da forma seguinte.

Tomemos dois objetos do pensamento B e C, tais que entre eles vale:

20) $B \in C$.

---

[8] No texto original, para designar a relação de inclusão – ou, na terminologia dedekindiana, a relação "parte de" –, Dedekind não utiliza o símbolo usual "$\subseteq$", mas um semelhante à imagem especular do símbolo de pertinência "$\in$". Denominando tal símbolo por "$\ni$", o que Dedekind afirma acima é que de $x \in y$ podemos passar para $x \ni y$, isto é, da relação de pertinência podemos passar para a de inclusão, mas não o inverso, isto é, de $x \ni y$ não podemos necessariamente passar para $x \in y$. Com isto, os contextos conjuntistas em que há relação de pertinência subsumem-se nos contextos em que há a relação de inclusão.

De fato, o primeiro a distinguir claramente os contextos em que se pode falar de pertinência, sem com isto significar inclusão, foi Peano, no seu *Arithmethmetices Principia*, de 1899 (ver (GILLIES, 1982, p. 53)).

[9] Uma clara situação inconveniente do colapso da pertinência na inclusão pode ser visto no caso seguinte: tomemos o conjunto $A = \{a\}$. Pelo colapso da pertinência na inclusão, temos que $a \subseteq A$, o que só se justifica *se todos os elementos de a* são elementos de A. Entretanto, podemos considerar que *a* não tem elemento algum, dado que não é um sistema, mas um *elemento puro*; não é o caso de haver elementos que estejam contidos em *a*.Temos, por conseguinte, que o colapso da pertinência na inclusão não permite elaborar uma teoria de conjuntos baseada na presença de elementos puros, isto é, *objetos que estão nos conjuntos, sem ser, eles mesmos, conjuntos.*

Pelo *postulado da conversão*, temos que:

21) $B \subseteq C$.

Pela definição de inclusão 5), isto implica que:

22) $(\forall y)(\, y \in B \rightarrow y \in C)$.

Consideremos agora que vale, na teoria de Dedekind, o axioma da regularidade, isto é, vale a fórmula 12). Instanciando-se 12) universalmente para C e existencialmente para B, temos:

23) $S(C) \rightarrow (B \in C \wedge \forall y\, (y \in B \rightarrow y \notin C))$.

Como C é um sistema, por *modus ponens* afirma-se o conseqüente de 23). Por eliminação da conjunção presente neste conseqüente, chega-se a:

24) $(\forall y)(\, y \in B \rightarrow y \notin C)$.

Por sua vez, instanciando-se universalmente 24), temos :

25) $y \in B \rightarrow y \notin C$.

Como B é um sistema, então vale a fórmula 2), isto é, existe uma coisa x que pertence a B. Instanciando-se existencialmente 2) para y, temos:

26) $y \in B$.

Por *modus ponens,* de 26) e 25) temos:

27) $y \notin C$.

De 26) e 27), conclui-se que:

28) $(\exists y)(\, y \in B \wedge y \notin C)$.

Entretanto, 28) contradiz 22) e, por conseguinte, temos um absurdo gerado pela hipótese de que vale, na teoria de Dedekind, o *axioma da regularidade.* Portanto, por *redução ao absurdo*, temos de admitir que na teoria conjuntística de Dedekind não vale o axioma da regularidade, *posto que vale o postulado da conversão.*

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dado que Dedekind afirma explicitamente o postulado da conversão em sua teoria, então não há como salvar a teoria dedekindiana daquilo que Dedekind mais evitara: *o seu caráter não-intuitivo*. Posto que na teoria não vale o axioma da regularidade, as já mencionadas extravagâncias da relação de pertinência não são necessariamente descartadas. Pode ser o caso, sem que isto implique em contradição, que entre dois objetos do pensamento a e b se dê que $a \in b$ e que $b \in a$; também não está excluído, *a fortiori*, o caso $\Xi \in x$, sendo x um objeto do pensamento qualquer. Neste caso, Ξ, um exemplo claro de uma multiplicidade inconsistente[10], pode pertencer a qualquer outro objeto do pensamento, assim como pode pertencer a si mesmo. Sendo uma multiplicidade inconsistente, espera-se de Ξ que não pertença a nenhum outro sistema nem a si mesmo, se o conceito de multiplicidade inconsistente, de matiz cantoriana, se traduz no de classe própria de Von Neumman[11]. Mas tal condição não é garantida pela teoria dos conjuntos de Dedekind; sem a regularidade, a noção de pertinência perde a sua base intuitiva e, por conseguinte, transforma-se em uma relação puramente abstrata, sem conexões imediatas com aquilo que usualmente se espera do *comportamento normal* de conjuntos.

Portanto, a teoria dedekindiana dos conjuntos, *uma vez que nela vale o postulado de conversão*, admite uma interpretação desprovida de intuições prévias; podemos interpretá-la sem o pressuposto da regularidade e, com isto, a relação de pertinência deixa de ser vista como o nome que se dá ao fato de um objeto x, por exemplo, estar na extensão de uma propriedade F, a qual denominamos –esta extensão – de y (vide nota 1). No contexto dedekindiano, a pertinência é contra-intuitiva; o comportamento usual dos conjuntos não vale, a não ser que rejeitemos o postulado da conversão, o que parece pouco viável, dado que este é claramente afirmado no WSZ.

REFERÊNCIAS:

CANTOR, G. Cantor's *Grundlagen*. IN: EWALD, W (Ed.) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Volume I. Oxford: Clarendon Press, 2000.

DEDEKIND, R. *Stetigkeit und Irrationalen Zahlen. Was sind und was sollen die Zahlen? Essays on the Theory of Numbers. I Continuity and Irrational Numbers II The Nature and the Meaning of Numbers.* New York: Dover Publications, 1961.

FRAENKEL, A. *Abstract Set Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1961.

FRAENKEL, A & BAR-HILLEL, Y. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North Holland Publishing, 1958.

GILLIES, D. A. *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Mathematics*. Assen: Van Gorcum, 1982.

[10] Em uma carta a Dedekind de 22 de julho de 1899, Cantor introduz a distinção entre *multiplicidades consistentes* e *inconsistentes*. As primeiras seriam aquelas que admitem um fechamento, uma unidade, sem que isto implique em contradição. São o que usualmente denomina-se de *conjunto*. Já as *inconsistentes*, são as multiplicidades que não admitem ser encerradas ou terminadas; da hipótese de elas estão completadas ou terminadas, decorre uma contradição. Como exemplo de uma destas multiplicidades inconsistente, Cantor apresenta o conjunto "de tudo aquilo que é pensável" ["Inbegriff alles Denkbaren"] , pressupostamente o agregado Ξ de Dedekind transposto para o universo cantoriano (CANTOR, 2000, p.941-932).

[11] Em 1925, Janos Von Neumann apresentou uma teoria de conjuntos na qual o conceito de multiplicidade inconsistente de Cantor é reinterpretado como de "classe própria". Uma classe própria é, *grosso modo*, um agregado que não pode pertencer a nenhum outro agregado, isto é, Y é uma classe própria se não existe um agregado X tal que $Y \in X$. De alguma forma, o conceito de classe própria recupera a noção cantoriana de um agregado que não pode ser aumentado; não há como conceber tal agregado em um todo maior que ele (ver (HALLETT, 1997, p. 288) e (VON NEUMANN, 1925)).

HALLETT, M. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon Press, 1997.

MIRIMANOFF, D. “Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles”. *Enseignement mathématique*, v. 19, 1917.

SUPPES, P. *Axiomatic Set Theory*. New York: Dover Publications, 1972.

VON NEUMMANN, J. “Zur Einführung der transfinite Zahlen“. *Acta Szeged*, v. 1, 1925.

ZERMELO, E. “Investigations in the Foundations of Set Theory”. IN: HEIJENOORT, J. VAN (Ed.). *From Frege to Gödel*. Cambridge: Harvard University Press, 1967.