OPERADORES DE CONSEQUÊNCIA E RELAÇÕES DE CONSEQUÊNCIA

CONSEQUENCE OPERATORS AND CONSEQUENCE RELATIONS

Hércules de Araújo Feitosa[1]
Angela Pereira Rodrigues Moreira[2]
Marcelo Reicher Soares[3]

Resumo: Neste artigo analisamos o operador de consequência de Tarski e algumas relações de consequência num ambiente conjuntista de lógica universal. Neste âmbito, mostramos propriedades e axiomas relativos a estas definições que implicam e são implicadas por outras. Também mostramos a independência de algumas delas e lapidamos os conceitos envolvidos nestas noções abstratas que caracterizam lógicas em contexto universal.

Palavras-chave: Operador de consequência. Relações de consequência. Lógica. Lógica universal.

Abstract: We analyses the Tarski's consequence operator and some definitions of consequence relations. In the context of universal logic, we show properties or axioms of these definitions that implies and are implied by others. We show independence of some of them and improve the knowledge about these abstract logics notions.

Keywords: Consequence operators. Consequence relations. Logic. Universal logic.

Introdução

Até o final do século XIX assumíamos a existência da Lógica. Uma única Lógica que surgiu na antiguidade e tinha como atribuição central investigar a validade de raciocínios via as leis fundamentais do pensamento. No século XIX, passamos a desenvolver grande vinculação da Lógica com a Matemática. Na primeira metade, os trabalhos desenvolvidos foram no sentido de encontrar aspectos matemáticos neste arcabouço teórico que vinha da antiguidade. Foi um processo de matematização da Lógica. Mais ao final do século, com os trabalhos de Frege e o seu Logicismo, a intensão seria a logicização da Matemática. Nas duas abordagens, a Matemática e a

[1] Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Bauru e do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da mesma instituição, Campus de Marília. E-mail: haf@fc.unesp.br
[2] Professora Substituta do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Bauru. Doutora em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. E-mail: angela.p.rodrigues@bol.com.br
[3] Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Bauru. E-mail: reicher@fc.unesp.br

Lógica ganharam enorme afinidade e reflexões.

No início do século XX, foram aparecendo inúmeras lógicas distintas da Lógica até então reconhecida. Passamos então a denominar a Lógica iniciada entre os gregos, com particular contribuição de Aristóteles, portanto vinda do mundo clássico, de Lógica Clássica e as lógicas distintas daquela de lógicas não clássicas. Foram muitas construídas desde então.

Em 1930, Alfred Tarski procurou explicitar o que estas muitas lógicas teriam em comum. Para tanto, ele defendeu que a noção central de uma lógica está no seu aspecto dedutivo, de derivação ou de consequência. Assim, Tarski definiu o operador de consequência de Tarski, como veremos na primeira seção, uma função que coloca em evidência os aspectos fundamentais da consequência.

De um modo intuitivo e bastante usado na literatura sobre Lógicas, a consequência é vista como uma relação, um conceito matemático mais geral que função, que relaciona, associa, a um conjunto de informações uma informação conclusiva. Está na noção de regra de inferência, donde obtemos uma conclusão a partir de uma coleção de premissas. Esta noção também recebe algumas formulações levemente distintas.

Neste artigo, procuramos apresentar algumas destas formulações e tecer comparações entre elas. A nossa contribuição está no âmbito desta comparação, quando mostramos que uma versão é equivalente a outra, mas que algum princípio é mais forte que outro, que ocorre em outra definição. Mostramos a independência de alguns dos princípios e tentamos expor com clareza estas noções básicas de consequência. Também desenvolvemos isto no contexto da lógica universal, quando não fazemos uso de linguagens artificiais, mas apenas de ambiente conjuntista. Então não tratamos ainda de operadores lógicos como negação, conjunção, disjunção e outros. Tratamos dos operadores e relações de Tarski, mas como bem sabemos, na avalanche de criação de novas lógicas, temos muitas lógicas com propriedades ainda mais gerais ou distintas daquelas presumidas por Tarski.

1. Alguns conceitos básicos

Como ponto de partida, relembramos algumas definições bastante usuais sobre relações e funções e refinamos alguns destes conceitos para adequarmos aos desenvolvimentos do artigo.

Definição 1.1: Dados dois conjuntos E e F, uma *relação binária* R de E em F é qualquer subconjunto do produto cartesiano $E \times F$.

Como trabalharemos sempre com relações binárias, então diremos apenas relações.

Definição 1.2: Se $E = F$, então dizemos que a relação R é *sobre* E ou é uma *relação em* E.

Uma função pode então ser definida como um tipo especial de relação.

Definição 1.3: Sejam E e F dois conjuntos não vazios. Uma *função* de E em F é uma relação $f \subseteq E \times F$, tal que para todo $x \in E$ existe um único $y \in F$ tal que $(x, y) \in f$.

Denotamos uma função f de E em F por $f: E \to F$. Nessa notação, se $(x, y) \in f$, então escrevemos $f(x) = y$.

Da definição, todo elemento de E está na relação f e, mais, se $f(x) = y$ e $f(x) = z$, então $y = z$.

Por outro lado, temos algumas relações destacadas que são definidas sobre um conjunto E, isto é, $R \subseteq E \times E$.

Relações de equivalência, de ordem parcial e de ordem são definidas sobre um conjunto E e a necessidade de que tais relações sejam sobre E deriva das próprias definições de reflexividade, simetria, antissimetria e transitividade, uma vez que são estas propriedades que, combinadas de modo específicos, caracterizam as relações de equivalência, ordem e ordem total.

Definição 1.4: Denominamos uma relação $R \subseteq E \times E$ de *equipotente* e uma relação $R \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ de *não-equipotente,* em que $\mathcal{P}(E)$ é o conjunto das partes de E.

Estes nomes decorrem do fato dos conjuntos $\mathcal{P}(E)$ e E não possuírem a mesma potência ou cardinalidade.

Definição 1.5: *Relação de equivalência* sobre E é qualquer relação equipotente reflexiva, antissimétrica e transitiva. Assim, $\sim \subseteq E\times E$ e valem:

(E_1) para todo $x \in E$, $x \sim x$ (reflexividade)

(E_2) para todos $x, y \in E$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (simetria)

(E_3) para todos $x, y, z \in E$, $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (transitividade).

Definição 1.6: *Relação de ordem* sobre E é uma relação equipotente reflexiva, antissimétrica e transitiva. Assim, $\preccurlyeq \subseteq E\times E$ e valem:

(O_1) para todo $x \in E$, $x \preccurlyeq x$ (reflexividade)

(O_2) para todos $x, y \in E$, $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq x \Rightarrow x \sim y$ (antissimétrica)

(O_3) para todos $x, y, z \in E$, $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$ (transitividade).

Definição 1.7: A relação $\preccurlyeq$ é uma *ordem total* ou *linear* se vale ainda:

(O_4) para todos $x, y \in E$, $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$ (conexidade).

Neste trabalho precisaremos considerar relações não-equipotentes, em $\mathcal{P}(E)\times E$, as quais, de alguma forma, evoquem as propriedades de reflexividade, antissimetria e transitividade, embora não se deem exatamente em E.

2. Espaços de Tarski

Na década de 1930, ao buscar uma caracterização uniforme para a noção de lógica, Alfred Tarski introduziu o conceito de operador de consequência. O conceito original de Tarski é um pouco mais específico que o considerado a seguir, porém suas noções centrais estão preservadas na definição seguinte.

No contexto lógico usual, o domínio E, a seguir, corresponde ao conjunto das fórmulas bem formadas sobre a linguagem da lógica considerada. Este é o conjunto dos portadores de verdade que podem ser proposições, sentenças, enunciados, juízos, entre outros.

Definição 2.1: Um *operador de consequência* sobre E é a uma função $\mathsf{C}: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ tal que, para todos A, B $\subseteq$ E, valham:

(C_1) $A \subseteq \mathsf{C}(A)$ (autodedutibilidade)

(C_2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(B)$ (monotonicidade)

(C_3) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$ (idempotência).

Para todo operador de consequência C, por (C_1) e (C_3), vale a igualdade $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) = \mathsf{C}(A)$.

Definição 2.2: Um operador de consequência C sobre E é *finitário* quando, para todo $A \subseteq E$:

(C_4) $\mathsf{C}(A) = \cup\{\mathsf{C}(A_f) : A_f$ é subconjunto finito de $A\}$.

Definição 2.3: *Espaço de Tarski* (sistema dedutivo, espaço de fecho, lógica) é qualquer par (E, C), em que E é um conjunto e C é um operador de consequência sobre E.

Definição 2.4: Seja C um operador de consequência sobre E. O conjunto A é *fechado* em (E, C) quando $\mathsf{C}(A) = A$, e A é *aberto* em (E, C) quando o complementar de A, denotado por A^C, é fechado em (E, C).

Proposição 2.5: Se (E, C) é um espaço de Tarski, então o domínio E é fechado, o conjunto $\varnothing$ é aberto e para todo $A \subseteq E$, o conjunto $\mathsf{C}(A)$ é fechado. ■

Proposição 2.6: Toda intersecção de conjuntos fechados num espaço de Tarski (E, C) é ainda um conjunto fechado. Toda união de conjuntos abertos é um aberto em (E, C). ■

Certamente, $\mathsf{C}(\varnothing)$ e E correspondem ao menor e ao maior fechados, respectivamente, associados ao operador de consequência C sobre o conjunto E.

Definição 2.7: Um espaço de Tarski (E, C) é *vácuo* se $\mathsf{C}(\varnothing) = \varnothing$.

Segundo propriedades dos espaços de Tarski, observamos que todo espaço topológico é um espaço de Tarski. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, uma vez que, em geral, num espaço de Tarski $C(\varnothing) \neq \varnothing$. Os espaços topológicos são exemplos de espaços vácuos.

Proposição 2.8: A monotonicidade é equivalente a $C(A) \subseteq C(A \cup B)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Consideremos que vale a monotonicidade. Como $A \subseteq A \cup B$, então $C(A) \subseteq C(A \cup B)$. ($\Leftarrow$) Se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$ e, daí, $C(A \cup B) = C(B)$. Como $C(A) \subseteq C(A \cup B)$, então $C(A) \subseteq C(B)$. ■

Corolário 2.9: A monotonicidade é equivalente a $C(A \cap B) \subseteq C(A)$. ■

Conseguimos verificar, como Martin e Pollard (1996), que as três condições da definição do operador de Tarski podem ser sintetizadas em uma única.

Proposição 2.10: Dado um conjunto E não vazio e uma função $C: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, então C é um operador de consequência sobre E se, e somente se, para todos $A, B \subseteq E$, vale (C_5): $A \subseteq C(B) \Leftrightarrow C(A) \subseteq C(B)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja C um operador de consequência sobre E. A implicação da esquerda para a direita de (C_5) decorre da monotonicidade e da idempotência. A implicação reversa decorre da autodedutibilidade.

($\Leftarrow$) Consideremos que vale (C_5). (C_1) Se tomamos $A = B$ em (C_5), temos $A \subseteq C(A) \Leftrightarrow C(A) \subseteq C(A)$. Como vale $C(A) \subseteq C(A)$, então $A \subseteq C(A)$. (C_2) Se $A \subseteq B$, como por (C_1) $B \subseteq C(B)$, então $A \subseteq C(B)$. Segue daí, por (C_5), que $C(A) \subseteq C(B)$. (C_3) Como $C(A) \subseteq C(A)$, a condição ($C_5 \Rightarrow$) garante que $C(C(A)) \subseteq C(A)$. ■

Proposição 2.11: No espaço (E, C) vale o seguinte: $C(A \cup B) = C(C(A) \cup B)$.

Demonstração: ($\subseteq$) $A \cup B \subseteq C(A) \cup B \Rightarrow C(A \cup B) \subseteq C(C(A) \cup B)$.

($\supseteq$) $A \subseteq A \cup B \Rightarrow C(A) \subseteq C(A \cup B)$ e $B \subseteq A \cup B \subseteq C(A \cup B)$. Daí, $C(A) \cup B \subseteq C(A \cup B) \Rightarrow C(C(A) \cup B) \subseteq C(C(A \cup B)) = C(A \cup B)$. ■

Dado um espaço de Tarski (E, C), considera-se a seguinte relação equipotente $\sim \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$:

$$X \sim Y \Leftrightarrow \mathsf{C}(X) = \mathsf{C}(Y).$$

Proposição 2.12: A relação $\sim$ sobre $\mathcal{P}(E)$ é de equivalência, pois é reflexiva, simétrica e transitiva.

Demonstração: (E_1) Desde que $\mathsf{C}(X) = \mathsf{C}(X)$, então $X \sim X$.

(E_2) Se $X \sim Y$, então $\mathsf{C}(X) = \mathsf{C}(Y)$ e desse modo $Y \sim X$.

(E_3) Se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, então $\mathsf{C}(X) = \mathsf{C}(Y)$ e $\mathsf{C}(Y) = \mathsf{C}(Z)$. Da transitividade da igualdade, segue que $\mathsf{C}(X) = \mathsf{C}(Z)$ e, portanto, $X \sim Z$. ■

Observação 2.13: A relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathcal{P}(E)$ induz uma relação $\approx$ sobre E de forma que, para todos x, y $\in$ E, temos $x \approx y \Leftrightarrow \{x\} \sim \{y\}$. Segue da Proposição 2.12 que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre E.

A definição de operador de consequência é dada por uma relação equipotente que é uma função, e associa o operador de consequência às noções de dedução, derivação ou consequência lógica. Estas últimas noções, como veremos, podem ser expressas como relações equipotentes ou não-equipotentes, na medida em que podem ter conclusões múltiplas ou únicas, respectivamente.

Como uma relação, o operador de consequência associa um conjunto de informações, as premissas, com uma única conclusão (no caso um conjunto unitário) ou um conjunto (com cardinalidade maior que um) de conclusões. Quando a conclusão é um conjunto (com cardinalidade maior que um) de informações, temos o que é chamado de sistema dedutivo de múltiplas consequências.

Na próxima seção, veremos algumas definições de relação de consequência expressas por meio de relações não-equipotentes e, portanto, de conclusões únicas (expressas na forma de conjuntos unitários), e como estas definições interagem com a definição de operador de consequência.

As relações de consequência de múltiplas conclusões serão tratadas em outro momento.

3. Relações de consequência

Associada com a noção de consequência, temos usualmente a noção de relação de consequência, a qual buscamos tratar a seguir também no contexto conjuntista e de lógica universal.

Usaremos duas definições de relação de consequência já num contexto apenas conjuntista, sem tomarmos linguagens artificiais subjacentes. A primeira, que pode ser encontrada, por exemplo, em (FONT *et al.*, 2003):

Definição 3.1: Seja E um conjunto não vazio. Uma *relação de consequência* sobre E é uma relação não-equipotente $\vdash \ \subseteq \mathcal{P}(E)\times E$ tal que, para todos A, B, $\{x, y\} \in \mathcal{P}(E)$ valem:

(α) $x \in A \Rightarrow A \vdash x$

(β) $A \vdash x$ e $A \subseteq B \Rightarrow B \vdash x$

(γ) $A \vdash x$ e, para todo $y \in A$, $B \vdash y \Rightarrow B \vdash x$.

Denotamos tal relação de consequência por $(E, \vdash)$, em que ficam evidenciados o domínio E e a relação $\vdash$.

A segunda pode ser encontrada em (KRACHT, 2006):

Definição 3.2: Seja E um conjunto não vazio. Uma *relação de consequência* sobre E é uma relação não-equipotente $\vdash \ \subseteq \mathcal{P}(E)\times E$ tal que, para todos A, B, $\{x, y\} \in \mathcal{P}(E)$ valem:

(δ) $\{x\} \vdash x$

(β) $A \vdash x$ e $A \subseteq B \Rightarrow B \vdash x$

(ε) $A \vdash x$ e $B \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \cup B \vdash y$ (corte).

Estas são maneiras usuais de apresentar a consequência no contexto das lógicas. A versão do operador de consequência é uma busca de escrever isto no contexto conjuntista e aproximar também do contexto topológico.

Faremos, a seguir, comparações entre as condições que definem as *relações de consequência;* entre as definições de *relação de consequência* acima, e entre estas e a definição de *operador de consequência*. Em particular mostraremos como obter a primeira *relação de consequência* $\vdash$ a partir do *operador de consequência* C e vice-versa.

Proposição 3.3: As condições (α) e (γ) da Definição 3.1 implicam na condição (β).

Demonstração: Consideremos que $A \vdash x$ e $A \subseteq B$. Da inclusão $A \subseteq B$, segue que se $y \in A$, então $y \in B$. Daí e da condição (α), segue que para todo $y \in A$, $B \vdash y$. Agora, usando (γ) em $A \vdash x$ e para todo $y \in A$, $B \vdash y$, segue que $B \vdash x$. ■

A primeira definição de relação de consequência induz um operador de consequência da maneira seguinte.

Definição 3.4: Se $\mathsf{C}: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ é um operador de consequência, então para cada $A \in \mathcal{P}(E)$, o *fecho dedutivo* de A é o conjunto $\mathsf{C}(A) = \{x \in E : A \vdash x\}$.

Proposição 3.5: Dada uma relação de consequência como na Definição 3.1, o fecho dedutivo determina um operador de consequência de Tarski.

Demonstração: (i) (Autodedutibilidade) se $x \in A$, por (α) temos que $A \vdash x$ e, pelo fecho dedutivo, $x \in \mathsf{C}(A)$. Logo $A \subseteq \mathsf{C}(A)$.

(ii) (Monotonicidade) Se $A \subseteq B$ e $x \in \mathsf{C}(A)$, pelo fecho, $A \vdash x$ e daí, por (β), $B \vdash x$. Mais uma vez pela Definição 3.4, $x \in \mathsf{C}(B)$. Assim, $\mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(B)$.

(iii) (Idempotência) Consideremos que $x \in \mathsf{C}(\mathsf{C}(A))$. Pelo fecho, temos que $\mathsf{C}(A) \vdash x$ e para todo $y \in \mathsf{C}(A)$, temos que $A \vdash y$. Daí, por (γ), segue que $A \vdash x$, isto é, $x \in \mathsf{C}(A)$. Logo, $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$. ■

A recíproca deste resultado também é bem simples.

Precisamos observar que: $x \in Y \Leftrightarrow \{x\} \subseteq Y$.

Proposição 3.6: Se (E, C) é um espaço de Tarski, então a relação não-equipotente $\vdash$, definida a partir de C por: $A \vdash x \Leftrightarrow x \in \mathsf{C}(A)$, é uma relação de consequência na Definição 3.1.

Demonstração: (α) Se $x \in A$, então $\{x\} \subseteq A$ e, daí, por (C_2), que $\mathsf{C}(\{x\}) \subseteq \mathsf{C}(A)$. Por ($C_1$), temos que $\{x\} \subseteq \mathsf{C}(\{x\}) \subseteq \mathsf{C}(A)$ e, portanto, $x \in \mathsf{C}(A)$. Da definição do fecho dedutivo, $A \vdash x$.

(β) Se $A \subseteq B$ e $A \vdash x$, pela definição, $x \in \mathsf{C}(A)$ e, daí, por (C_2), $x \in \mathsf{C}(B)$. Mais uma vez pela definição, $B \vdash x$.

(γ) Consideremos que $A \vdash x$ e, para todo $y \in A$, $B \vdash y$. Pela definição acima, $x \in \mathsf{C}(A)$ e, para todo $y \in A$, $y \in \mathsf{C}(B)$. Daí $A \subseteq \mathsf{C}(B)$. Por ($C_2$) e ($C_3$), segue que $\mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(\mathsf{C}(B)) = \mathsf{C}(B)$. Logo, $x \in \mathsf{C}(B)$ e, pela definição, $B \vdash x$. ■

Mostramos que (γ) $\Rightarrow$ (C_3), mas só (C_3) não implica (γ). Precisamos também de (C_2). No exemplo seguinte, temos um caso em que vale (C_3), mas não vale (C_2) e, portanto, não teremos (γ). Isto mostra que (γ) é mais forte que (C_3). Não consideramos a condição (C_1).

Exemplo: Sejam $E = \{a, b, c, d, e\}$ e $\mathsf{C}: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ tal que:

$$\mathsf{C}(\{a, d\}) = \{a\};$$
$$\mathsf{C}(\{a, b, c\}) = \{a, d\};$$
$$\mathsf{C}(\{a, b\}) = \{a, b, c, e\};$$

E, para todo $B \subseteq E$ diferente dos conjuntos $\{a, d\}$, $\{a, b, c\}$ e $\{a, b\}$, temos $\mathsf{C}(B) = B$. Certamente C não é um operador monotônico.

Para todo $A \in \mathcal{P}(E)$, $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$, pois $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\{a, d\})) = \mathsf{C}(\{a\}) = \{a\} = \mathsf{C}(\{a, d\})$; $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\{a, b, c\})) = \mathsf{C}(\{a, d\}) = \{a\} \subseteq \{a, d\} = \mathsf{C}(\{a, b, c\})$; $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\{a, b\})) = \mathsf{C}(\{a, b, c, e\}) = \{a, b, c, e\} = \mathsf{C}(\{a, b\})$. E para todo $B \in \mathcal{P}(E)$ diferente dos conjuntos $\{a, d\}$, $\{a, b, c\}$ e $\{a, b\}$, $\mathsf{C}(\mathsf{C}(B)) = \mathsf{C}(B)$. No entanto, $d \in \mathsf{C}(\{a, b, c\})$ e, para todo $x \in \{a, b, c\}$, $x \in \mathsf{C}(\{a, b\})$, mas $d \notin \mathsf{C}(\{a, b\})$. Ou ainda, $\{a, b, c\} \vdash d$ e, para todo $x \in \{a, b, c\}$, $\{a, b\} \vdash x$, mas $\{a, b\} \nvdash d$.

A versão mais natural da condição (C_3) é considerar $[A] = \{z \in E : A \vdash z\}$ e o axioma:

(ζ) $[A] \vdash y \Rightarrow A \vdash y$.

Pois, $[A] \vdash y \Rightarrow A \vdash y$ see $y \in \mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \Rightarrow y \in \mathsf{C}(A)$ see $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$.

Agora destacamos o axioma (δ).

Proposição 3.7: Consideremos a condição (δ): $\{x\} \vdash x$, sobre uma relação $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$. Então, valem as seguintes implicações: (α) ⇒ (δ); (β) e (δ) ⇒ (α).

Demonstração: Como $x \in \{x\}$, então por (α), $\{x\} \vdash x$. Agora, se $x \in A$, então $\{x\} \subseteq A$ e, por (δ) e (β), segue que $A \vdash x$. ■

Só (δ) não garante (α), como podemos ver no exemplo seguinte.

Exemplo: Sejam $E = \{a, b\}$ e $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ tal que:

$$\{a\} \vdash a;$$
$$\{b\} \vdash b;$$
$$\{a, b\} \vdash b;$$
$$\{a, b\} \nvdash a;$$

Certamente $\vdash$ não é uma relação monotônica, porém $\vdash$ satisfaz (δ), mas não satisfaz (α), pois $a \in \{a, b\}$ e $\{a, b\} \nvdash a$.

Encontramos na literatura, como em Jeřábek (2012), uma terceira definição de relação de equivalência com as condições (δ), (β) e (γ), ou seja, a definição de Font, Jansana e Pigozzi (2003), com a troca de (α) por (δ). Mas, como mostram as considerações acima, estas duas definições são equivalentes, devido à monotonicidade, embora não sejam equivalentes (α) e (δ).

A regra do corte (ε) tem uma versão mais fraca, que pode ser encontrada em Sundholm (1983):

(η) $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \vdash y$.

Proposição 3.8: O corte (ε) ⇒ (η).

Demonstração: No corte (ε), basta considerarmos B = A. ■

Precisamos ainda verificar que as duas definições de relação de consequência acima são equivalentes. Já vimos que na presença da monotonicidade as condições (α) e (β) são equivalentes a (δ) e (β).

Proposição 3.9: A relação da Definição 3.1 implica a relação da Definição 3.2.

Demonstração: Precisamos garantir que (ε) vale a partir de (α), (β) e (γ).

Consideremos que $A \vdash x$ e $B \cup \{x\} \vdash y$. Pela indução que define o operador C, temos que $x \in \mathsf{C}(A)$ e $y \in \mathsf{C}(\{x\} \cup B)$. Daí, $\{x\} \subseteq \mathsf{C}(A)$ e, pela monotonicidade, $y \in \mathsf{C}(\mathsf{C}(A) \cup B)$. Pela Proposição 2.11, $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A) \cup B) = \mathsf{C}(A \cup B)$ e, assim, $A \cup B \vdash y$. ■

Proposição 3.10: A relação da Definição 3.2 implica a relação da Definição 3.1.

Demonstração: Precisamos garantir que vale (γ) a partir de (δ), (β) e (ε).

Pela Proposição 3.8, (ε) ⇒ (η). Então usaremos uma versão um pouco mais simples, porém implicada pela segunda definição de relação de consequência: (α), (β) e (η). Assim, valem a autodedutibilidade, a monotonicidade e $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \vdash y$, isto é, para todo x, $x \in \mathsf{C}(A)$ e $y \in \mathsf{C}(\{x\} \cup A) \Rightarrow y \in \mathsf{C}(A)$. Daí, pela monotonicidade, $y \in \mathsf{C}(\mathsf{C}(A) \cup A) \Rightarrow y \in \mathsf{C}(A)$ e, pela autodedutibilidade, $y \in \mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \Rightarrow y \in \mathsf{C}(A)$. Assim vale ($C_3$) ou (ζ), que com (α) e (β) garantem (γ). ■

Agora um pouco mais sobre a independência dos axiomas usados nas definições acima.

Vimos que as condições (α) e (γ) implicam a condição (β). Os três exemplos abaixo nos mostram que assim como as condições (α) e (γ) são independentes, as condições (δ), (β) e (γ) também o são.

Exemplo: Sejam $E = \{a, b, c\}$ e $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ tal que:

$$\{a\} \vdash a;$$
$$\{a\} \vdash b;$$
$$\{a, b\} \vdash a;$$
$$\{a, b\} \vdash b;$$
$$\{a, b\} \vdash c;$$

para todo $B \subseteq E$ diferente dos conjuntos $\{a\}$ e $\{a, b\}$, temos que o conjunto das consequências de B é o próprio B.

Neste exemplo valem as condições (α), (δ) e (β), mas não vale a condição (γ), pois $\{a, b\} \vdash c$ e, para todo $x \in \{a, b\}$, $\{a\} \vdash x$, mas $\{a\} \nvdash c$.

Exemplo: Sejam E = $\{a, b\}$ e $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ tal que:

$$\{a\} \vdash a;$$

$$\{a, b\} \vdash b;$$

$$\{a, b\} \nvdash a;$$

para todo B $\subseteq$ E diferente dos conjuntos $\{a\}$ e $\{a, b\}$, temos que o conjunto das consequências de B é o próprio B.

Neste exemplo valem as condições (δ) e (γ), mas não valem as condições (α) e (β), pois $a \in \{a, b\}$, $\{a\} \vdash a$ e $\{a\} \subseteq \{a, b\}$, mas $\{a, b\} \nvdash a$.

Exemplo: Sejam E = $\{a, b\}$ e $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ tal que:

$$\{a\} \vdash b;$$

$$\{a\} \nvdash a;$$

para todo B $\subseteq$ E diferente do conjunto $\{a\}$, temos que o conjunto das consequências de B é o próprio B.

Claramente, neste exemplo valem as condições (β) e (γ), mas não vale a condição (δ).

Estas definições de relação de consequência impõem uma condição essencial das lógicas de Tarski, a saber, que temos uma relação de ordem sobre os portadores de verdade do espaço (E, C), isto é, os elementos de E.

Proposição 3.11: As relações de consequência acima são não-equipotentes e têm as seguintes consequências:

(i) $\{x\} \vdash x$;

(ii) $\{x\} \vdash y$ e $\{y\} \vdash z \Rightarrow \{x\} \vdash z$;

(iii) $\{x\} \vdash y$ e $\{y\} \vdash x \Rightarrow x \approx y$.

Demonstração: O item (i) vem da condição (δ). A condição (γ) garante o item (ii) do seguinte modo: se $\{y\} \vdash z$ e, para todo $y \in \{y\}$, $\{x\} \vdash y$, por (γ), $\{x\} \vdash z$. Finalmente, o item (iii) segue da Observação 2.13. ■

Estas condições lembram uma ordem, como na Seção 1. Contudo, a relação acima é não-equipotente e, desse modo, precisamos de certos cuidados com a simples afirmação de que se trata de uma ordem sobre E.

Com algum abuso dos conceitos, poderíamos eliminar as chaves dos antecedentes e termos uma relação de ordem usual.

Eventualmente o conjunto de premissas pode ser unitário e daí abusando da notação, poderíamos escrever apenas:

$$\text{(i) } x \vdash x; \text{ (ii) } x \vdash y \text{ e } y \vdash z \Rightarrow x \vdash z; \text{ (iii) } x \vdash y \text{ e } y \vdash x \Leftrightarrow x \sim y.$$

Mas, genuinamente, nossas relações de consequências são definidas para conjuntos. A concepção das relações de consequência investigadas é de mostrar a associação de um conjunto de dados, informações, com uma conclusão extraída daquele conjunto de premissas ou hipóteses.

Diante disso, para adequarmos o contexto apresentamos a seguinte definição de ordem neste contexto não-equipotente.

Definição 3.12: Chamamos a relação $\vdash$ *de ordem não-equipotente,* definida sobre $\mathcal{P}(E) \times E$, quando satisfaz as seguintes condições:

(i) $\{x\} \vdash x$;

(ii) $\{x\} \vdash y$ e $\{y\} \vdash z \Rightarrow \{x\} \vdash z$;

(iii) $\{x\} \vdash y$ e $\{y\} \vdash x \Rightarrow x \approx y$.

Esta ordem não-equipotente é parcial e não pode ser total, uma vez que não é o caso que, para dois quaisquer x e y, ou $\{x\} \vdash y$ ou $\{y\} \vdash x$.

Considerações finais

Temos até aqui a revisão de algumas definições de operação e relação de consequência e algumas das suas muitas interrelações. Estes resultados são apenas parte de investigações que devem seguir daí.

Desejamos avaliar, partindo apenas do conceito de relação de ordem não-equipotente, quais propriedades precisamos acrescentar para gerar uma relação de consequência equivalente às que tratamos no texto.

Ainda sem incluir operadores lógicos no contexto, podemos incluir para esta relação de ordem não-equipotente, elemento mínimo que corresponde às contradições e elemento máximo, que interpreta as tautologias ou fórmulas válidas. O quanto podemos estender as reflexões sobre estes sistemas dedutivos sem introduzirmos os operadores?

Há sistemas dedutivos que invocam antecedentes unitários, mas há também sistemas dedutivos em que o consequente pode ter mais que uma conclusão.

Tratamos de relações de consequência com uma conclusão por vez, relações com conclusão unitária. Contudo, conforme Gentzen (1969), que investigou sistemas dedutivos gerais e introduziu na década de 1930 os cálculos de sequentes, podemos pensar em relações de consequências com múltiplas conclusões.

O axioma (γ) $B \vdash x$ e, para todo $y \in B$, $A \vdash y \Rightarrow A \vdash x$ poderia receber uma notação assim (γ) $B \vdash \{x\}$ e $A \vdash B \Rightarrow A \vdash \{x\}$, em que $A \vdash B$ é equivalente a dizer que $A \subseteq \mathsf{C}(B)$. Neste caso, estaríamos readequando mais que a notação, mas também a estrutura formal, saindo de uma relação não-equipotente para uma relação equipotente.

Poderíamos, ainda, generalizar o que foi feito no parágrafo anterior definindo a relação equipotente $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)$ tal que: (i) $A \subseteq B \Rightarrow B \vdash A$; (ii) $A \vdash C \Rightarrow A\cup B \vdash C$ e (iii) $A \vdash C$ e $B\cup C \vdash D \Rightarrow A\cup B \vdash D$. Esta é uma definição alternativa de relação de consequência de múltiplas conclusões e mais geral do que aquela que abordamos nestas notas.

Devemos tratar destes e outros casos de lógicas de Tarski no ambiente de lógica universal. Mas, podemos também pensar em lógicas que não são de Tarski e que já contam com alguns comparecimentos na literatura e noções aceitáveis de consequência lógica.

Referências

BEZIAU, J-Y. Universal logic. In: T. CHILDERS; O. MAJER (Eds.). *Proceedings of the 8th International Colloquium - Logica'94*. Prague: Czech Academy of Sciences, p. 73-93, 2004.

______. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In: BEZIAU, J-Y. (Ed.) *Logica universalis*, p. 3-19, 2007.

BOLC, L.; BOROWIK, P. *Many-valued logics: 1 theoretical foundations*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

DE SOUZA, E. G. Lindenbaumologia I: a teoria geral. *Cognitio: Revista de Filosofia*, n. 2, p. 213-219, 2001.
DE SOUZA, E. G.; VELASCO, P. D. N. Lindenbaumologia II: cálculos lógicos abstratos. *Cognitio: Revista de Filosofia*, n. 3, p. 115-121, 2002.
D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. Deductive systems and translations. In: BÉZIAU, J.-Y.; COSTA-LEITE, A. (Eds.). *Perspectives on Universal Logic*. Italy: Polimetrica, p. 125–157, 2007.
FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; SILVESTRINI, L. H. C. Confrontando propriedades lógicas em um contexto de lógica universal. *Cognitio: Revista de Filosofia*, v. 15, n. 2, p. 333-347, 2014.
FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. A survey of abstract algebraic logic. *Studia Logica*, v. 74, p. 13 - 97, 2003.
GENTZEN, G. Investigation into logical deduction. In: SZABO M. E. (Ed.) *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, p. 68-131, 1969.
HOPPMANN, A. G. *Fecho e imersão*. Rio Claro: Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, 1973. (Tese de Doutoramento em Matemática).
JEŘÁBEK, E. The ubiquity of conservative translations. *The Review of Symbolic Logic*, v. 5, p. 666–678, 2012.
KRACHT, M. Modal consequence relations. In: van BENTHEM, J.; VENEMA, Y.; WOLTER F. (Eds.). *Handbook of Modal Logic*. Elsevier, p. 497 - 549, 2006.
MARTIN, N. M.; POLLARD, S. *Closure spaces and logic*. Dordrecht: Kluwer, 1996.
SUNDHOLM, G. Systems of deduction. In GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Eds.) *Handbook of Philosophical Logic*. Dordrecht: Reidel, v. 1, p. 133-188, 1983.
TARSKI, A. *Logic, semantics, metamathematics*. 2. ed. CORCORAN, J. (Ed.). Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983.
WALLMANN, C. A shared framework for consequence operations and abstract model theory. *Logica Universalis*, v. 7, p. 125-145, 2013.
WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi*. Dordrecht: Kluwer, 1998.